I : ESPACIOS MÉTRICOS

Definición: Sea $X \neq \emptyset$. Se dice que una aplicación $d: X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x,y) \longmapsto d(x,y)$

es una distancia o métrica sobre X si verifica:

i) $d(x,y) \geq 0 \quad \forall x,y \in X$

ii) $d(x,y) = 0 \iff x = y \quad \forall x,y \in X$

iii) $d(x,y) = d(y,x) \quad \forall x,y \in X$

iv) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) \quad \forall x,y,z \in X$.

Llamaremos espacio métrico (EM) al par (X,d).

* Son distancias:

- $\mathbb{R}$: $d_{usual}(x,y) := |x-y|$

- X: $d(x,y) := |f(x) - f(y)|$ si $f: X \to X$ inyectiva

- $\mathcal{P}(\mathbb{N})$: $d(A,B) := \begin{cases} 0 & A = B \\ \frac{1}{n} & A \neq B, \quad n = \min\{n : n \in A \cup B, n \notin A \cap B\}. \end{cases}$

- $B(X) = \{f: X \to \mathbb{R} \text{ acotadas}\}$: $d(f,g) := \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)|$.

- $\mathcal{C}([0,1]) = \{f: [0,1] \to \mathbb{R} \text{ continuas}\}$; $d(f,g) := \int_0^1 |f(x) - g(x)|\, dx$.

- $X \neq \emptyset$: $\quad d_{discrete}(x,y) := \begin{cases} 1 & x \neq y \\ 0 & x = y \end{cases}$.

- E Esp. Normado , $\quad d(x,y) := \|x-y\|$.

- $\mathbb{R}^n$: $\quad d_p((x_1,\dots,x_n),(y_1,\dots,y_n)) = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p}$.

- $\mathbb{R}^n$: $\quad d_\infty((x_1,\dots,x_n),(y_1,\dots,y_n)) = \max_{1\leq i\leq n} \{|x_i - y_i|\}$.

Definicion: Sea (X,d) EM y $x_0 \in X$, $r>0$

- $B(x_0,r) := \{x \in X : d(x,x_0) < r\}$ $\equiv$ BOLA ABIERTA
- $B[x_0,r] := \{ \qquad \leq \quad \}$ $\equiv$ BOLA CERRADA
- $S[x_0,r] := \{ \qquad = \quad \}$ $\equiv$ ESFERA

Denotaremos como $\mathcal{B}(x_0) = \{B \overset{NOT}{=} B(x_0,r) : r>0\}$. $\equiv$ BOLAS ABIERTAS DE CENTRO x_0.

Proposicion (Propiedades de Bolas Abiertas):

1) $\forall B \in \mathcal{B}(x_0)$ $\quad x_0 \in B$.

2) $B_1, B_2 \in \mathcal{B}(x_0) \Rightarrow B_1 \cap B_2 \in \mathcal{B}(x_0)$

3) $\forall B \in \mathcal{B}(x_0)$, $\forall y \in B$ $\quad \exists B' \in \mathcal{B}(y) : B' \subseteq B$. $\equiv$ Las bolas abiertas son abiertas.

4) (HAUSDORFF) : $\forall x,y \in X$, $x \neq y$ $\quad \exists B \in \mathcal{B}(x)$, $B' \in \mathcal{B}(y)$: $B \cap B' = \emptyset$.

5) (Primero Contable) : $\exists (B_n) \subset \mathcal{B}(x_0)$ que verifica:

a) $B_{n+1} \subseteq B_n$

b) $\forall B \in \mathcal{B}_n$ $\exists N \in \mathbb{N} : n \geq N \Rightarrow B_n \subseteq B$.

Definición: Sea (X, d) EM y $x_0 \in X$. Se dice que $V \subseteq X$ es entorno de x_0 si existe $B(x_0, r) \subseteq V$. Diremos que $G \subseteq X$ es abierto si es entorno de todos sus puntos. Diremos que F es cerrado si F^c es abierto.

$$\mathcal{V}(x_0) = \{ \text{entornos de } x_0 \}$$

$$\tau_d = \{ \text{abtos de } (X, d) \} \equiv \text{TOPOLOGÍA sobre } X.$$

* $\tau_{usual} = \tau_{d_{usual}} = \{ \text{uniones arbitrarias de intervalos abtos} \} \equiv$ TOPOLOGÍA USUAL DE $\mathbb{R}$

* $\begin{cases} - X, \emptyset \in \tau_d \\ - G_1, G_2 \in \tau_d \Rightarrow G_1 \cap G_2 \in \tau_d \\ - \{G_i\} \subset \tau_d \Rightarrow \bigcup_i G_i \in \tau_d \end{cases}$ $\equiv$ Esto dice que las uniones de abiertos son abiertos.

* $\tau_{d_{discreta}} = \mathcal{P}(X)$, porque cada $\{x\} \subset X$ es una bola abierta (de radio < 1)

Definición: Se dice que un subconjunto $\emptyset \neq A \subset X$ es acotado si $\exists B(x_0, r) \supseteq A$, $x_0 \in A$.

Proposición: A acotado $\iff \exists K > 0 : d(x, y) \leq K \quad \forall x, y \in A$.

Corolario: A, B acotados $\Rightarrow A \cup B$ acotado.

NOTA: La acotación no es una propiedad topológica. ($\mathbb{N}$ acotado con $d_{discreta}$, no con d_{usual}).

Definición: Sea (X, d) EM, y $\emptyset \neq Y \subseteq X$. Definida la aplicación $d_Y : Y \times Y \to \mathbb{R}$, $d_Y(x, y) := d(x, y)$, llamaremos subespacio métrico al par (Y, d_Y).

* En general, $B_Y(y_0, r) = B_X(y_0, r) \cap Y$.

II : ESPACIOS TOPOLÓGICOS

Definición: Sea $X \neq \emptyset$ y $\tau \in \mathcal{P}(X)$. Se dice que τ es una topología para X si verifica:

i) $X, \emptyset \in \tau$

ii) $G_1, G_2 \in \tau \Rightarrow G_1 \cap G_2 \in \tau$

iii) $\{G_i\}_{i \in I} \subseteq \tau \Rightarrow \bigcup_i G_i \in \tau$.

Llamamos espacio topológico al par (X, τ), y abiertos a los elementos de τ.

* Todo espacio métrico (X, d) induce un espacio topológico (X, τ_d).

* $\tau_{grosera} = \{X, \emptyset\}$; $\tau_{discreta} = \mathcal{P}(X)$
menor top   mayor top

Definición: Se dice que dos topologías τ, τ' sobre X son comparables si $\tau \subseteq \tau'$ ó $\tau \supseteq \tau'$.
En el primer caso se dice que τ' es más fina que τ (tiene más elementos).

* $(\mathbb{R}, \tau = \{\mathbb{R}, \emptyset, \mathbb{Q}, \mathbb{I}\})$, $p \in X$, $(X, \tau = \{G \subset X : p \notin G\} \cup \{X\})$.

$(\mathbb{R}, \tau_{usual} = \{\bigcup (a_i, b_i)\})$, $p \in X$, $(X, \tau = \{G \subseteq X : p \in G\} \cup \{\emptyset\})$.

$(X$ inf no numerable, $\tau_{conumerable} := \{G \subseteq X : G^c$ es num. $\} \cup \{\emptyset\})$

$(X$ inf, $\tau_{cofinita} = \{G \subseteq X : G^c$ es finito $\} \cup \{\emptyset\})$.

Definición: Sea (X,τ) ET. Se dice que $F \subseteq X$ es cerrado si $F^c \in \tau$. Denotamos con $\mathcal{C} = \{$cerrados de $(X,\tau)\}$.

Proposición (Propiedades de $\mathcal{C}$):

1) $X, \emptyset \in \mathcal{C}$.

2) $F_1, F_2 \in \mathcal{C} \Rightarrow F_1 \cup F_2 \in \mathcal{C}$.

3) $\{F_i\} \subset \mathcal{C} \Rightarrow \bigcap_i F_i \in \mathcal{C}$.

Definición: (X,τ) ET. Se dice que $V \subset X$ es entorno de $x_0 \in X$ si $\exists\, G \in \tau : x_0 \in G \subseteq V$.
Denotamos con $\mathcal{V}(x_0) = \{$entornos de $x_0\}$.

Proposición: A abto $\Longleftrightarrow$ es entorno de todos sus puntos. $A = \bigcup_{x \in A} G_x$

Proposición (Propiedades de $\mathcal{V}$):

1) $x \in V \quad \forall V \in \mathcal{V}(x)$

2) $V_1, V_2 \in \mathcal{V}(x) \Rightarrow V_1 \cap V_2 \in \mathcal{V}(x)$

3) $V \in \mathcal{V}(x)$, $V \subseteq W \Rightarrow W \in \mathcal{V}(x)$ (cualquier superconjunto de un entorno es entorno).

4) $\forall V \in \mathcal{V}(x)\ \exists\, V' \in \mathcal{V}(x) : V \in \mathcal{V}(y) \ \forall y \in V'$.

Definición: (X,τ) ET, $x_0 \in X$. Se dice que $\mathcal{B}(x_0) \subseteq \mathcal{V}(x_0)$ es una base de entornos de x si para cada $V \in \mathcal{V}(x)$ $\exists\, U \in \mathcal{B}(x_0) : U \subseteq V$. Llamamos entornos básicos a los elementos de $\mathcal{B}(x_0)$.

Definición: Se dice que un ET (X,τ) es primer contable, o que verifica el 1er Axioma de numerabilidad, si $\forall x\in X\ \exists\, \mathcal{B}(x)\subseteq \mathcal{V}(x)$ numerable.

* Todo espacio grosero es primer contable
* Todo espacio métrico es primer contable
* $(\mathbb{R}, \tau=\{G\subseteq\mathbb{R} : 0\in G\}\cup\{\emptyset\})$
* $(\mathbb{R}, \tau=\{G\subseteq\mathbb{R} : 0\notin G\}\cup\{\mathbb{R}\})$

Son primer contable.

* $(X, \tau_{conum.})$ no es primer contable.

Definición: Sea (X,τ) ET. Se dice que $\mathcal{B}\subseteq\tau$ es base de la topología o base de abiertos si $\forall G\in\tau\ \exists \{B_i\}\subseteq\mathcal{B} : G=\bigcup_i B_i$. Llamamos abiertos básicos a los el. de $\mathcal{B}$.

Definición: Se dice que un ET es segundo contable, o que verifica el 2º Axioma de numerabilidad, si $\exists\, \mathcal{B}\subseteq\tau$ numerable.

Lema: Si $\mathcal{B}$ es una base de la topología en (X,τ), entonces para cada $x\in X$ una base de entornos es:

$$\mathcal{B}(x)=\{B\in\mathcal{B} : x\in B\}.$$

Proposición: 2º contable $\Longrightarrow$ 1º contable.

Definición: Un ET (X,τ) se dice metrizable si hay alguna métrica d que induzca la topología, $\tau_d=\tau$.

Definición: Se dice que un ET (X,τ) es de Hausdorff, separado, ó T_2, si para cada $x\neq y\in X\ \exists\, G_1, G_2\in\tau : x\in G_1,\ y\in G_2$ y $G_1\cap G_2=\emptyset$.

* (X,τ) metrizable $\Rightarrow \begin{cases} - 1^{\text{o}} \text{ contable} \\ - T_2 \end{cases}$.

Definición: Sea (X,τ) ET y $A \subseteq X$.

INTERIOR DE A $\equiv \mathring{A} = \{ a \in A : \exists V \in \mathcal{V}(a) : V \subseteq A \}$

ADHERENCIA DE A $\equiv \overline{A} = \{ x \in X : \forall V \in \mathcal{V}(x) \; V \cap A \neq \emptyset \}$

FRONTERA DE A $\equiv \partial A = \{ x \in X \; \forall V \in \mathcal{V}(x) \; V \cap A \neq \emptyset \neq V \cap A^c \}$

PUNTOS DE ACUMULACIÓN $\equiv A' = \{ x \in X : \forall V \in \mathcal{V}(x) \; (V \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset \}$

PUNTOS AISLADOS $\equiv A^s = \{ a \in A : \exists V \in \mathcal{V}(x) : V \cap A = \{a\} \}$.

Y donde pone $\mathcal{V}$ se puede escribir $\mathcal{B}$.

Proposición (Propiedades):

1) $\partial A = \overline{A} \cap \overline{A^c} = \overline{A} \cap \widehat{\mathring{A}}^c = \overline{A} \setminus \mathring{A}$, 2) $\overline{A}^c = \widehat{A^c}^{\circ}$

3) $\overline{A}^c = \widehat{A^c}^{\circ} \Leftrightarrow \widehat{\mathring{A}}^c = \overline{A^c}$, 4) $\overline{A} = A' \,\dot{\cup}\, A^s$

5) $\mathring{A} \subseteq A \subseteq \overline{A}$

Proposición (Propiedades de Abiertos y Cerrados):

1) G abierto $\Leftrightarrow \mathring{G} = G$

2) F cerrado $\Leftrightarrow \overline{F} = F$

3) $A \subseteq B \Rightarrow \mathring{A} \subseteq \mathring{B}$

4) $A \subseteq B \Rightarrow \overline{A} \subseteq \overline{B}$

5) $\mathring{A} = \bigcup_{\substack{G \subseteq A \\ \text{abtos}}} G$ = máx abto contenido en A.

6) $\overline{A} = \bigcap_{\substack{A \subseteq F \\ \text{cerrados}}} F \equiv$ min cerrado que contiene a A.

7) $\mathring{\mathring{A}} = \mathring{A}$

8) $\overset{\circ}{\overbrace{A \cap B}} = \mathring{A} \cap \mathring{B}$

Definición: Dado $\emptyset \neq Y \subseteq (X, \tau)$ ET, se define la topología de subespacio inducida por τ sobre Y como

$$\tau_Y := \{ G \cap Y \}_{G \in \tau} .$$

Y se dice que el par (Y, τ_Y) es un subespacio topológico.

* Hay que comprobar que τ_Y es topología!

* De modo equivalente:

- $\mathcal{C}_Y = \{ V \cap Y \}_{V \in \mathcal{C}}$

- $\mathcal{V}_Y(y) = \{ V \cap Y \}_{V \in \mathcal{V}(y)}$

Lema: Todo SET de un ET grosero es grosero, e ídem para ET discreto.

SUCESIONES EN UN ET

Definición: Se dice que una sucesión $(x_n) \subset (X, \tau)$ ET converge a x_0 o que $x_0 \in \lim (x_n)$, si

$$\forall V \in \mathcal{V}(x_0) \ \exists \nu \in \mathbb{N} : n > \nu \Rightarrow x_n \in V.$$

* En $(X, \tau_{\text{grosera}})$, $\lim (x_n) = X \quad \forall (x_n)$.

Obs: Sea (X,d) EM.

$$(x_n) \xrightarrow{(X,\tau_d)} x_0 \iff (d(x_n,x_0)) \xrightarrow{(\mathbb{R},\tau_u)} 0$$

Definición: Una sucesión se dice eventualmente constante si $x_n = cte$ $\forall n \geq n_0$ (para algún n_0).

* $(X, \tau_{discr.})$ $\quad (x_n) \to x_0 \iff x_n$ eventualmente cte
* $(X$ infinito no numerable, $\tau_{conumerable})$ $\quad (x_n) \to x_0 \iff x_n$ eventualmente cte.

Proposición: (X,τ) $T_2 \Rightarrow$ Toda suc. convergente tiene límite único.

* $\Leftarrow$ en general (X infinito no numerable, $\tau_{conumerable}$)

Lema: Todo elemento de un (X,τ) 1º contable admite una base de entornos numerable y decreciente.

Proposición: Sea (X,τ) ET 1º contable.

$$(X,\tau)\ T_2 \iff \text{Toda sucesión convergente tiene lím. único}$$

Definición: Sea $(x_n) \subset (X,\tau)$ ET. Se dice que x_0 es valor de adherencia si

$$\forall V \in \mathcal{N}(x_0),\ \forall k \in \mathbb{N}\ \exists n \geq k : x_n \in V$$

* x_n lím $\equiv$ en todo entorno están todos los términos de la suc. salvo finitos
* x_n V. Adh $\equiv$ en todo entorno hay infinitos términos de la suc.

* x_0 lím $\Rightarrow x_n$ V. Adh.

Proposición: Sea $(x_n) \subset (X, \tau)$ y $A_k := \{ x_n \in (x_n) : n \geq k \}$

$$\{ \text{v. adh de } (x_n) \} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{A_k}$$

* {v. adh} siempre tiene que ser un cerrado en (X, τ).

III: APLICACIONES CONTINUAS

Definición: Se dice que una aplicación $f:(X,\tau)\longrightarrow(Y,\tau')$ es continua en x_0 si

$$\forall V\in\mathcal{V}(f(x_0))\ \exists U\in\mathcal{V}(x_0) : f(U)\subseteq V.$$

Y que f es (globalmente) continua si lo es $\forall x\in X$.

Proposición: f cont. en $x_0 \iff f^{-1}(V)\in\mathcal{V}(x_0)\quad \forall V\in\mathcal{V}(f(x_0))$.

Proposición: Son continuas:

1) Las aplicaciones constantes
2) Las aplicaciones $(X,\tau_{discreta})\longrightarrow(\quad)$
3) Las aplicaciones $(\quad)\longrightarrow(Y,\tau_{grosera})$.

Teorema: Sea $(X,\tau_X)\longrightarrow(Y,\tau_Y)$ una aplicación entre ET. Son equivalentes:

1) f continua
2) $f^{-1}(G)\in\tau_X\quad\forall G\in\tau_x$
3) $f^{-1}(F)\in\mathcal{C}_X\quad\forall G\in\mathcal{C}_Y$

Corolario I: La composición de continuas es continua.

Corolario II: La topología de subespacio es la topología menos fina que hace continua la inclusión natural.

Corolario III: La restricción de cualquier aplicación continua a un subespacio es continua.

Corolario IV: $(X,\tau_X) \longrightarrow (Y,\tau_Y)$ cont. $\iff (X,\tau_X) \longrightarrow (f(X),\tau_{f(X)})$ cont.

HOMEOMORFISMOS

Definición: Se dice que una aplicación $f:(X,\tau) \longrightarrow (Y,\tau')$ es un homeomorfismo si es biyectiva y bicontinua, y que dos ET's son homeomorfos si $\exists$ algún homeomorfismo entre ellos, y se denota como $(X,\tau) \simeq (Y,\tau')$.

Teorema: Sea $(X,\tau) \longrightarrow (Y,\tau')$ una biyección. Son equivalentes:

1) f homeomorfismo

2) $f(G)\in\tau' \iff G\in\tau$ $\quad \overset{\text{abta}}{\Leftarrow}$, $\overset{\text{cont (con } f^{-1})}{\Rightarrow}$

3) $f(F)\in\mathcal{C}' \iff F\in\mathcal{C}$.

Definición: Una aplicación entre ET's se dice abierta (cerrada) si lleva abiertos en abiertos (cerrados en cerrados).

Lema: Sea $(X,\tau) \xrightarrow{f} (Y,\tau')$ una biyección.

$$f^{-1} \text{ continua} \iff f \text{ abta (o cerrada)}$$

Y por tanto $\quad f$ abta $\iff f$ cerrada.

Proposición: f homeomorfismo $\iff \begin{cases} - f \text{ biyectiva} \\ - f \text{ continua} \\ - f \text{ abta (o cerrada)} \end{cases}$

Definición: Se dice que P es una propiedad topológica si puede expresarse en términos de la τ del espacio.

* Las prop. top. se conservan mediante homeomorfismos.
* Isometría $\Longrightarrow$ homeomorfismo.

IV: TOPOLOGÍAS PRODUCTO Y COCIENTE

TOPOLOGÍA PRODUCTO

Definición: Sea $\{(X_i, \tau_i)\}_{i=1}^n$ una familia de ET's. Definimos sobre $\prod_{k=1}^n X_k$ la topología producto τ_{producto} como la topología menos fina que hace continuas las proyecciones naturales $\prod_k X_k \xrightarrow{\pi_i} X_i$, ie,

$$\tau_{\text{producto}} := \left\{ \bigcup_{\text{arbit.}} \prod_{k=1}^n G_k \right\} = \left\{ \bigcup_{\text{arbit.}} \left(\bigcap_{k=1}^n \pi_k^{-1}(G_k) \right) \right\}_{G_k \in \tau_k}.$$

Se dice que cada $\prod_{k=1}^n G_k$ es un abierto básico, ya que $\mathcal{B} = \{\prod_{k=1}^n G_k\}_{G_k \in \tau_k}$ es una base de τ_{producto}.

Proposición: El ET producto de una familia finita de ET's groseros (discretos) es un espacio grosero (discreto).

Proposición: Las proyecciones naturales $(\prod_{k=1}^n X_k, \tau_{\text{prod}}) \xrightarrow{\pi_i} (X_i, \tau_i)$ son epi + cont + abta.

Teorema (Prop. Univ. del ET Producto): Sea $(\prod_{k=1}^n X_k, \tau_{\text{prod}})$ un ET producto, y sea $f: (Y, \tau_Y) \longrightarrow (\prod_k X_k, \tau_{\text{prod}})$ una aplicación entre dos ET.

$$\boxed{f \text{ continua} \iff \pi_i \circ f \text{ continua}} \quad \forall i = 1, \dots, n$$

Definición: Sea $(\prod X_k, \tau_{producto})$ un ET producto. Se llama sección paralela al factor i-ésimo que pasa por $(a_1, \ldots, a_n)$ a

$$S[X_i ; (a_1, \ldots, a_n)] := \{(a_1, \ldots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \ldots, a_n)\}_{x_i \in X_i} .$$

Teorema:
$$(S[X_i ; (a_1, \ldots, a_n)], \tau_{subespacio}) \cong (X_i, \tau_i) .$$

Teorema (Metrizabilidad del ET producto):

$$(\prod_k X_k, \tau_{producto}) \text{ metrizable} \iff (X_i, \tau_i) \text{ metrizable } \forall i .$$

TOPOLOGÍA COCIENTE

Definición: Dada una aplicación $f : (X, \tau) \longrightarrow Y$ epi, se llama topología cociente definida por f sobre Y a

$$\tau_f := \{G \subseteq Y : f^{-1}(G) \in \tau\} .$$

Se dice pues que $f : (X, \tau) \longrightarrow (Y, \tau_f)$ es una aplicación cociente y que (Y, τ_f) es un ET cociente.

Proposición: La topología cociente es la topología más fina que hace continua $f : (X, \tau) \to (Y, -)$.

Proposición: $\underset{\substack{\text{GROSERO} \\ \text{(DISCRETO)}}}{f : (X, \tau)} \longrightarrow Y \implies \tau_f$ grosero (discreto).

Proposición: f epi + cont + abierta $\Longrightarrow$ f aplicación cociente.

Corolario: Las proyecciones canónicas $\pi_i : (\prod X_\alpha, \tau_{prod}) \longrightarrow (X_i, \tau_i)$ son aplicaciones cociente.

Teorema (Prop. Univ. del Espacio Cociente): Sea $(X,\tau) \xrightarrow[\text{COCIENTE}]{f} (Y, \overset{\tau_f}{\overset{\parallel}{\tau'}}) \xrightarrow{g} (Z,\tau'')$.

$$\boxed{g \text{ continua} \Longleftrightarrow g\circ f \text{ continua}}$$

Teorema (de Factorización por el Cociente): Sea $f:(X,\tau) \longrightarrow (Y,\tau')$ una aplicación cociente, y $g:(X,\tau) \longrightarrow (Z,\tau'')$ continua.

$$\begin{tikzcd}
(X,\tau) \arrow[r, "g \text{ cont}+(x)"] \arrow[d, "f \text{ cociente}"'] & (Z,\tau'') \\
(Y,\tau') \arrow[ur, "h"'] &
\end{tikzcd} \quad : h\circ f = g.$$

$$\{ f(x_1)=f(x_2) \Longrightarrow g(x_1)=g(x_2) \} \Longleftrightarrow \exists h:(Y,\tau') \underset{\text{continua}}{\longrightarrow} (Z,\tau'') : h\circ f = g.$$

- Si definimos una relación de equivalencia sobre un conjunto X, podemos considerar la su proyección canónica $(X,\tau) \xrightarrow{\pi} (X/\sim, \tau_\pi)$ con la topología cociente. Es decir, una proyección de paso al cociente es una aplicación cociente. ¿Y al revés? Sí.

  Si $(X,\tau) \xrightarrow{f} (Y,\tau')$ es una aplicación cociente, definimos sobre X la relación $x_1 \sim_f x_2 \Longleftrightarrow f(x_1)=f(x_2)$. Entonces

Teorema: Si $f:(X,\tau) \longrightarrow (Y,\tau')$ es una aplicación cociente $\Longrightarrow \exists \sim_f$ sobre X tal que $(X/\sim, \tau_\pi) \simeq (Y,\tau')$.

Proposición: $(X \times Y, \tau_{\text{producto}}) \simeq (Y \times X, \tau_{\text{producto}})$.

Definición: Sea $f:(X,\tau) \to (Y,\tau')$. Se llama

$$\text{Grafo}(f) := \{(x, f(x)) \in X \times Y\}.$$

Teorema: f continua $\iff$ $(X,\tau) \simeq \text{Grafo } f$.

Definición: Sea (X,τ) un ET. Se llama *diagonal* de X a

$$\Delta := \{(x,x) \in X \times X\}_{x \in X}.$$

Teorema: (X,τ) T_2 $\iff$ Δ es un cerrado.

Proposición: $f:(X,\tau) \to (Y,\tau')$ cont, Y T_2 $\Longrightarrow$ $\text{Grafo}(f)$ es un cerrado (en $(X \times Y, \tau_{\text{producto}})$).

Definición: Se dice que una relación de eq. $\sim$ es *abierta* si $\pi:(X,\tau) \to (X/\sim, \tau_\pi)$ es abierta.

Teorema: Sea $\{(X_i,\tau_i)\}$ ET's y consideremos en cada factor una rel. de eq. $\sim_i$ *abierta*. Entonces

$$\left(\prod (X_i/\sim_i), \tau_{\text{producto}} \right) \simeq \left(\left(\prod X_i\right)/\sim, \tau_\pi \right)$$

donde $\sim$ es la rel. $(x_1,\dots,x_n) \sim (y_1,\dots,y_n) \iff x_i \sim_i y_i \ \forall i$.

Definición: Sea (X,τ) ET y $(A,\tau_{|A})$ SET. Se dice que una aplicación $r:(X,\tau) \to (A,\tau_{|A})$ es un *retracto* si r es cont. y $r \circ i = Id$.

Proposición: r retracto $\Longrightarrow$ r aplicación cociente.

V CONEXIÓN

Definición: Un ET (X,τ) se dice <u>conexo</u> si no existen dos abiertos disjuntos no vacíos $G_1, G_2 \in \tau$ tal que $X = G_1 \dot\cup G_2$.

Lema: Todo espacio grosero es conexo, y todo esp. discreto ($\#X > 1$) es inconexo.

Definición: Un ET (X,τ) se dice T_1 si $\forall x \neq y \; \exists G_1, G_2 \in \tau : x \in G_1, y \in G_2$ pero $y \notin G_1, x \notin G_2$.

Prop: T_1 con algún pto aislado ($\#X > 1$) $\Rightarrow$ inconexo

Propos: $T_2 \Longrightarrow T_1$

Propos: (X,τ) T_1 $\Longleftrightarrow$ Todo punto es cerrado.

Teorema: En $(\mathbb{R}, \tau_{usual})$ $\qquad I$ intervalo $\Longleftrightarrow$ I conexo.

Propos: La imagen continua de un conexo es un conexo.

Conclu: <u>La conexión es una propiedad topológica</u>

Teorema: $\{X_i\}$ SET conexos de (X,τ) : $\bigcap X_i \neq \emptyset$, $\bigcup X_i = X \Rightarrow (X,\tau)$ conexo.

Teorema: $Y \subseteq (X,\tau)$ SET conexo $\Rightarrow \forall A : Y \subseteq A \subseteq \overline{Y}$ <u>A es conexo</u>.

Teorema: $(X \times Y, \tau_{prod})$ conexo $\Longleftrightarrow$ $(X,\tau), (Y,\tau')$ conexos.

Teorema: $A \subset \mathbb{R}^n$ numerable $\Rightarrow$ $\mathbb{R}^n \setminus A$ conexo.

Teorema: (X,τ) conexo $\Longleftrightarrow$ Toda $f:(X,\tau) \xrightarrow{cont} (\mathbb{R},\tau_{usual})$; $a,b \in f(X)$ cumple que $[a,b] \subseteq f(X)$

Teorema (Bolzano): $f:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ cont, $f(a)\cdot f(b) < 0 \Rightarrow \exists c \in (a,b) : f(c) = 0$.

Teorema (de Brouwer del punto fijo): Toda $f:[0,1] \longrightarrow [0,1]$ continua tiene un pto fijo

COMPONENTES CONEXAS

Definición: Se dice que $C(x_0) \subseteq (X,\tau)$ es la componente conexa de x_0 si $C(x_0)$ es el mayor conexo que contiene a x_0. Se dice que $C \subseteq X$ es una componente conexa si es la componente conexa de algún pto.

- La componente conexa es un conexo maximal: si $A \subseteq X$ es conexo y $C \subseteq A \Rightarrow C = A$.
- Si $x \sim y \Longleftrightarrow \exists A$ conexo ~~tq~~ $\subseteq (X,\tau)$: $x,y \in A \Rightarrow C(x_0) = [x_0]$.

Definición: (X,τ) se dice totalmente disconexo si los únicos conexos son los unitarios, i.e., si la componente conexa de un pto es solo el punto.

- Tot. disconexo $\Longrightarrow$ disconexo.
- (X,τ) conexo $\Longleftrightarrow$ $C(x) = X \quad \forall x$.
- $(X, \tau_{discreta}) \rightarrow$ ~~X~~ totalmente disconexo. (obvio) $\not\Leftarrow$
- Contraejemplo: $(\mathbb{Q}, \tau_{usual}|_{\mathbb{Q}})$ es tot. disc. pero no discreto.

Prop: Las componentes conexas son cerradas del espacio.

Teorema: El número de componentes conexas es una prop. topológica, i.e., se conserva por homeomorfismos.

Definición: Sea (X,τ) ET, $x,y\in X$. Un camino o arco en X que une x con y es una aplicación continua $\gamma:(I=[0,1], \tau_{usual}|_I) \longrightarrow (X,\tau)$ tal que $\gamma(0)=x$, $\gamma(1)=y$.

- Se dice lazo si $\gamma(1)=\gamma(0)$.
- El camino inverso de γ es $\gamma^{-1} \equiv \gamma(1-t)$.

Definición: Un subconjunto $C\subset\mathbb{R}^n$ se dice convexo si el segmento que une cada par de ptos está en C; i.e., hay un camino recto en C que los une.

Definición: Un subconjunto $A\subset\mathbb{R}^n$ se dice estrellado si $\exists a_0\in A : \forall a\in A \ [a_0,a]\subseteq A$.

- Convexo $\Rightarrow$ Estrellado.

Definición: Un ET (X,τ) es conexo por arcos o arco-conexo si para cada par de puntos x,y existe un camino en (X,τ) que los une.

Prop: A convexo (estrellado) $\Rightarrow$ A arco-conexo.

Teorema: La imagen continua de un arco-conexo es arco-conexo.

Corolario: La arco-conexión es una prop. topológica.

Teorema: Arco-conexo $\Longrightarrow$ Conexo.

- $\not\Leftarrow$: Curva del topólogo $\cup$ pto de $\{0\}\times[-1,1]$; Peine del Topólogo.

Definición: Un espacio se dice localmente arco-conexo si todo pto posee una base de entornos arco-conexos.

Teorema: Conexo y loc. arco-conexo $\Longrightarrow$ Arco-conexo.

Corolario: G abierto y conexo $\Longrightarrow$ G arco-conexo.

VI: COMPACIDAD

<u>Definición</u>: Se dice que una colección $\{G_i\}_{i\in I}$ es un <u>recubrimiento (por abiertos)</u> de (X,τ) ET si $X = \cup G_i$; y se llama <u>subrecubrimiento</u> del recubrimiento $\{G_i\}$ una subcolección cuya unión siga siendo X.

<u>Definición</u>: Se dice que (X,τ) es <u>compacto</u> si todo recubrimiento admite un subrecubrimiento finito.

<u>Proposición</u>: La imagen continua de un compacto es compacto.

<u>Corolario</u>: La compacidad es una propiedad topológica.

<u>Teorema</u>: Sea (X,τ) ET, $A\subseteq X$.

1) A cerrado en (X,τ) compacto $\Longrightarrow$ A compacto

2) A compacto en (X,τ) T_2 $\Longrightarrow$ A cerrado.

<u>Corolario</u>: $\underset{\text{COMPACTO}}{f:(X,\tau)} \longrightarrow \underset{T_2}{(Y,\tau')}$ continua $\Longrightarrow$ f es cerrada.

<u>Teorema</u> (Compacidad del ET producto):

$$(X\times Y, \tau_{\text{producto}}) \text{ compacto} \Longleftrightarrow (X,\tau);\ (Y,\tau') \text{ compactos.}$$

COMPACIDAD EN ESPACIOS METRICOS

Definición: $(X,d) \xrightarrow{f} (Y,d')$ se dice lipschitziana si $\exists k>0$:

$d'(f(x),f(y)) \le k \cdot d(x,y)$ $\forall x,y \in X$. Se dice q es un homeomorfismo lipschitziano

si es homeomorfismo y f y f^{-1} son lipsch.

Definición: d, d' sobre X se dicen

- topológicamente equivalentes si $\tau_d = \tau_{d'}$ (Id homeomorfismo)
- uniformemente equivalentes si Id es un homeomorfismo uniforme
- lipsch. equivalentes si Id es un homeomorf. lipsch.

- $d \overset{l}{\sim} d' \underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} d \overset{u}{\sim} d' \underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} d \overset{t}{\sim} d'$

Teorema (Heine-Borel): Sea $A \subset (\mathbb{R}^n, \tau_{usual})$

$$A \text{ compacto} \iff A \text{ cerrado y acotado.}$$

Cuidado: En $(X,d) \in M$, A compacto $\underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$ A cerrado y acotado.

- Contraejemplo: "$\not\Leftarrow$": $(\mathbb{R}, \tau_{discreta})$ A cerrado y acotado. ¿compacto? No. compacto $\Leftrightarrow$ finito.

Lema (Riesz): Sea $(E, \|\cdot\|)$ espacio normado.

$$\dim E < +\infty \iff B_{\|\cdot\|}[0,1] \text{ compacto.}$$

Teorema (HBLBW): Sea $A \subset (\mathbb{R}^n, \tau_{u})$. Son equivalentes:

1) A compacto

2) Todo subconjunto infinito de A tiene algún pto de acumulación

3) Toda sucesión de A tiene alguna subsucesión convergente

4) A cerrado y acotado.

Teorema: Sea $(X, d) \in M$. Son equivs 1) $\Rightarrow$ 2) $\Rightarrow$ 3) (del Th anterior)

Definición: Una sucesión $(x_n) \subset (X, d)$ se dice de Cauchy si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} : p, q > N \Longrightarrow d(x_p, x_q) < \varepsilon.$$

- Convergente $\underset{\not\Leftarrow}{\Longrightarrow}$ Cauchy.

Definición: Un EM (X, d) se dice completo si (x_n) Convergente $\Longleftrightarrow (x_n)$ Cauchy.

¡OJO! La completitud NO es una prop. topológica. $\underset{\text{completo}}{(\mathbb{R}, \tau_u)} \simeq \underset{\text{no compl.}}{((0,1)\ d_{u})}$

Propos.: (x_n) de Cauchy con una subsucesión convergente $\Longrightarrow (x_n) \longrightarrow x_0$.

Teorema: (X, d) EM compacto $\Longrightarrow (X, d)$ Completo.

- $(\mathbb{R}^n, d_{\|\cdot\|})$ completo

Defin: $\{A_i\} \subset (X,\tau)$ tiene la propiedad de la intersección finita (p.i.f) si toda subcolección finita tiene intersección no vacía.

Prop: (X,τ) compacto $\Longleftrightarrow$ Toda familia de cerrados p.i.f tiene intersección no vacía.

Lema (del Recubrimiento de Lebesgue, 1ª versión): Sea $(X,d) \in \mathcal{M}$ compacto, y $X = \bigcup_{i \in I} G_i$. Entonces $\exists \lambda > 0$, llamado número de Lebesgue del recubrimiento, tal que $\forall x \in X \; \exists G_i$: $B(x, \lambda) \subseteq G_i$.

Teorema: $f: \underset{\text{COMPACTO}}{(X,d)} \longrightarrow (Y,d')$ continua $\longrightarrow f$ unif. contin.

Teorema: (X,τ) compacto, $A \subseteq X$ infinito $\Longrightarrow A' \neq \emptyset$.

Lema: (X,τ) T_1, $A \subseteq X$, $x_0 \in A'$ $\Longrightarrow \forall V \in \mathcal{V}(x_0)$ $V \cap A$ es infinito.

Teorema (Bolzano-Weierstrass): Toda sucesión acotada en $(\mathbb{R}, \tau_{usual})$ tiene alguna subsucesión convergente.

Lema (del Recubrimiento de Lebesgue, 2ª versión): Sea $(X,d) \in \mathcal{M}$ que verifica que cualquier sucesión tiene alguna subsucesión convergente ($:=$ secuencialmente compacto). Entonces para cualquier recubrimiento $X = \bigcup G_i$ $\exists \lambda > 0$, llamado número de Lebesgue del recubrimiento, tal que $\forall x \in X \; \exists G_i : B(x,\lambda) \subseteq G_i$.

EJEMPLOS

$\boxed{\text{I}}$

DISTANCIAS

$\mathbb{R}$: $d_{usual}(x,y) = |x-y|$

X : $d(x,y) = |f(x) - f(y)|$, con $f: X \longrightarrow \mathbb{R}$ inyectiva

$\mathcal{P}(\mathbb{N})$: $d(A,B) = \begin{cases} 0 & , A=B \\ \frac{1}{n} & , A \neq B \end{cases}$ $n = \min\{z \in \mathbb{N} : a \in A$ ó B, pero no a $A \cap B\}$.

$B(X)$: $d(f,g) = \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)|$

$\mathcal{C}([0,1])$: $d(f,g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)|\, dx$

X : $d_{discreta}(x,y) = \begin{cases} 0 & , x=y \\ 1 & x \neq y. \end{cases}$

Dado (X,d) EM, se define una distancia en $X \times X$: $d((x_1,x_2),(y_1,y_2)) := \max\{d(x_1,y_1), d(x_2,y_2)\}$.

BOLAS

$B_{discr.}(x_0,r) = \begin{cases} \{x_0\} & , r \leq 1 \\ X & r > 1 \end{cases}$

ABIERTOS

$\mathcal{T}_{usual} = \mathcal{T}_{d_{usual}}$ en $\mathbb{R}$

$\mathcal{T}_{usual} = \mathcal{T}_{d_n}$, $n = 1,2,\dots$ en $\mathbb{R}^p$, y $\mathcal{T}_{usual} = \mathcal{T}_{d_\infty}$

ACOTACION

- La acotación no es una prop. topológica: con $(\mathbb{N}, d_{disc.})$, $\mathbb{N}$ es acotado; con $(\mathbb{N}, d_{usual})$, $\mathbb{N}$ no lo es; pero $\mathcal{T}_{d_{discreta}} = \mathcal{T}_{discreta} = \mathcal{T}_{d_{usual}}$. Depende de la distancia.

- $\emptyset \neq A, B \subset X$, se define

$$dist(A,B) := \inf\{d(a,b) : a\in A, b\in B\}.$$

que no es una distancia. Y dado $x_0 \in X$,

$$dist(x_0, A) = \inf\{d(x_0,a) : a\in A\}.$$

- $\delta(A) := \sup\{d(x,y) : x,y\in A\}$ = diámetro de A, y verifica

$$A \text{ acotado} \Leftrightarrow \exists\, \delta(A).$$

y

$$\delta(B(x_0,r)) \leq 2r$$

- EM con una bola abierta con diámetro < que su radio:

$(\mathbb{R}, d_{discr.})$ $\quad B(x_0,\frac{1}{2}) = \{x_0\}$, $\quad r=\frac{1}{2} > \delta(\{x_0\}) = 0.$

II

TOPOLOGÍAS

- τ_{usual}, $\tau_{discr.}$, $\tau_{groser.}$, τ_{PEG}, τ_{PEG}, τ_{conum}, $\tau_{cofinita}$, ...

- En $\mathbb{R}^n$, $\tau_{usual} = \tau_{\|\cdot\|} = \tau_{d_p} = \tau_{d_\infty}$, que todas las normas en $\mathbb{R}^n$ son equivalentes.

ENTORNOS Y BASES

- $(\mathbb{R}, \tau_{0\in G})$: $\mathcal{B}(0) = \{\{0\}\}$; $\mathcal{B}(x\neq 0) = \{\{x,0\}\}$

- $(\mathbb{R}, \tau = \{\mathbb{R}, \emptyset, \mathbb{I}, \mathbb{Q}\})$: $\mathcal{B}(q) = \{\mathbb{Q}\}$; $\mathcal{B}(i) = \{\mathbb{I}\}$

- (X, τ_{discr}) , $\mathcal{B}(x) = \{\{x\}\}$

- $(X_{no\ nu}, \tau_{cont})$: $\boxed{\underline{no} \text{ es } 1^{\circ} \text{ contable}}$

entorno de x_0 $\Longleftrightarrow$ abierto y contiene a x_0.

- $(\mathbb{R}, \tau_{0\notin})$: $\mathcal{B}(0) = \{\mathbb{R}\}$, $\mathcal{B}(x \neq 0) = \{\{x\}\}$.

- $\left.\begin{array}{l}\text{Grosera}\\ \text{Métrica}\end{array}\right\} \Longrightarrow 1^{\circ}$ contable.

- <u>2° CONTABLE</u> : Ver bien una base de abiertos y ver que cardinal es numerable, o bien ver que un conjunto no numerable tiene que estar incluido en una $\mathcal{B}$; luego card $\mathcal{B} \geq$ card "conj. no numerable"

- (X, τ_{gros}), $(X, \tau_{numerable})$, $(\mathbb{R}, \tau_{usual})$, $(X_{<\infty}, \tau_{cofin})$, $(X_{\infty}^{numerable}, \tau_{cofinito})$: <u>2° CONTABLE</u>

- $(\mathbb{R}, \tau_{0\in})$, $(\mathbb{R}, \tau_{0\notin})$, $(X_{no\ nu}, \tau_{contable})$, ~~$(X_{no\ nu}, \tau_{contable})$~~ : <u>NO 2° CONTABLE</u>

<u>SET</u> :

- $\tau_{usual}|_{\mathbb{N}} = \tau_{discreta}$.

- En $(X, \tau_{discreta})$ y $(X_{no\ nu}, \tau_{contable})$, $(x_n) \to x_0 \Longleftrightarrow x_n$ eventualmente cte.

- Toda suc. tiene lim único $\not\Rightarrow T_2$: $(X_{no\ nu}, \tau_{conum})$.

- {valores de adherencia} <u>siempre</u> es un cerrado del espacio!

- $\overline{A} = \{x \in X : dist(x, A) = 0\}$.

- $B(x_0, r) \subseteq \overline{B(x_0, r)} \subseteq B[x_0, r]$: $\begin{cases} = & = & : (X, d_{discreta}) \quad r = \frac{1}{2} \\ \subsetneq & = & : (\mathbb{R}, d_{usual}) \\ = & \subsetneq & : (X, d\ discr.),\ \#X > 1,\quad r = 1 \\ \subsetneq & \subsetneq & : \left(S_1 \cup ([-1,1] \times \{0\}), d_{2|S_1 ...}\right) \subseteq (\mathbb{R}^2, d_2) \\ & & \quad B \qquad (B((0,0), 1)) .. \end{cases}$

- Si $\exists (x_n) \subset A : (x_n) \to x_0 \Rightarrow x_0 \in \overline{A}$.

III

- $\left.\begin{array}{l} \bullet\ f \text{ cte} \\ \bullet\ (X, \tau_{discr.}) \xrightarrow{f} (\quad) \\ \bullet\ (\quad) \xrightarrow{f} (X, \tau_{grosera}) \end{array}\right\} \Rightarrow f$ globalmente continua..

- $Id : (\mathbb{R}, \tau_{grosera}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \tau_{disc})$ es discontinua.

- Id continua $\Leftrightarrow \tau' \leq \tau$. ; y Id homeomorfismo $\Leftrightarrow \tau' = \tau$.

- χ_A cont. $\Leftrightarrow A \in \tau$ y $A \in \mathcal{C}$.

- f una biyección entre dos (sub) espacios discretos $\rightarrow$ HOMEOMORFISMO !!

- Isometría $\Rightarrow$ Homeomorfismo.

- La metrizabilidad es una prop. topológica.
- La numerabilidad no es una prop. topológica $(\mathbb{N}, \tau_{us}|_{\mathbb{N}}) \neq (\mathbb{N}, \tau_{discreta})$.
- Ser Hausdorff es una prop. topológica.

- Clasificación de intervalos

1.- $\mathbb{R}$, (a,b), $(a,+\infty)$, $(-\infty,b)$
2.- $[a,b)$, $(a,b]$, $[a,+\infty)$, $(-\infty,b]$
3.- $[a,b]$
4.- $\{a\}$

$\boxed{IV}$

- $(\prod X_\alpha, \tau_{prod}) \xrightarrow{\pi_i} (X_i, \tau_i)$ no son cerradas en general.
- recta $\simeq$ parábola ; $S_1 \setminus \{p\} \simeq$ recta.
- $X \times Z \simeq Y \times Z \not\Rightarrow X \simeq Y$.
- $(\mathbb{R}^2, \tau_{usual})$. $H \subseteq \mathbb{R}^2$ SEV. Consideremos $e \sim e' (\text{mod } H) \Leftrightarrow e - e' \in H$.
  - $H = 0$: $(\mathbb{R}^2/H, \tau_\pi) \simeq (\mathbb{R}^2, \tau_{usual})$
  - $H = \mathbb{R}^2$: $(\mathbb{R}^2/H, \tau_\pi) \simeq (0, \tau_{us}|_0)$
  - $H =$ recta que pasa por 0 (SEV de dim 1) : $(\mathbb{R}^2/H, \tau_\pi) \simeq (\mathbb{R}, \tau_{us})$.

• $(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, \tau_\pi) \simeq (S_1, \tau_{u}|_{S_1})$.

• $(\mathbb{P}_1, \tau_\pi) \simeq (S_1, \tau_{u}|_{S_1})$, $\pi : e \in E_2 \longrightarrow \pi(e) = \langle e \rangle \in \mathbb{P}_1$

• $(\mathbb{R}, \tau_{usual}) \simeq (S_1 \setminus \{p\}, \tau_{usual}|_{S_1 \setminus \{p\}})$

$\boxed{V}$

• Recta y circunferencia menos un punto ($\simeq \mathbb{R}$) son conexos.

• $S_1 \not\simeq \mathbb{R}$; $S_1 \setminus \{p\} \simeq \mathbb{R}$; $S_n \setminus \{p\} \simeq \mathbb{R}^n$.

• S_1 conexo.

• Curva del topólogo ⇒ Conexo.

• $\mathbb{R} \not\simeq \mathbb{R}^n$; $S_1 \not\simeq \mathbb{S}_n$.

• $(\mathbb{Q}, \tau_{usual}|_{\mathbb{Q}})$ es tot. disconexo, pero no discreto.

• $S_1 \not\simeq I$ intervalo

• Porque en la clasificación de intervalos no son homeomorfos los de una clase con los otros.

• $(\mathbb{R}^n, \tau_u)$ arco-conexo.

• Contraejemplo: Conexo ⇏ Arco-conexo: Peine del topólogo.

- $(\mathbb{R}, \tau_{comun})$ conexo; pero un $X \subseteq (\mathbb{R}, \tau_{com})$ con $\# X$ numerable y >1 es inconexo.

  No es arco-conexo.

-

- $(\mathbb{R}, \tau_{0 \notin G})$ es conexo y arco-conexo.

$\boxed{VI}$

- (X, τ_{groera}) compto

- X finito $\Rightarrow (X, \tau)$ compto.

- (X, τ_{discr}) compacto $\Longleftrightarrow \# X < +\infty$.

- $(0,1)$ no compto; $[0,1]$ compto. $([a,b])$

- (X, τ) $\underline{T_2}$, $(x_n) \to x_0 \Rightarrow \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \cup \{x_0\}$ compto.

- S_1 compto pues $S_1 \simeq [0,1)$; S_n compto.

- $S_1 - \{p\}$ no compto pues $\simeq \mathbb{R}$

- $[0,1]^n \simeq [a,b]^n$ compto.

- Cilindro y toro compto.

- $\mathbb{R} \begin{cases} \underline{\text{COMPTO}}: \tau_{cofinit}, \tau_{0 \notin G} \\ \underline{\text{NO COMPTO}}: \tau_{usual}, \tau_{cumble}, \tau_{p \in G} \end{cases}$

- En $(\mathbb{R}, \tau_{conum})$, cpto $\iff$ finito

- Hyperbola, recta, ... no cpto pues son homeomorfas a cosas no compactas.

- $(\mathbb{R}, d_{usual}) \simeq ((0,1), d_{usual})$

  COMPLETO   NO COMPLETO.

- $\nexists f : [a,b)$ cont. y epi