I: MEDIDA

Sea Ω un conjunto

<u>Definición</u>: Un <u>anillo</u> en Ω es una colección de subconjuntos $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ tal que dados $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A}$, $A \setminus B = A \cap B^c \in \mathcal{A}$.

- $\mathcal{A}$ anillo $\Rightarrow A \Delta B := (A \cap B^c) \cup (B \cap A^c) \in \mathcal{A}$, $A \cap B \in \mathcal{A}$, $\emptyset \in \mathcal{A}$.

<u>Definición</u>: Un anillo $\mathcal{A}$ se dice <u>álgebra</u> si $\Omega \in \mathcal{A}$, y un álgebra se dice <u>σ-álgebra</u> si $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$.

- Se puede ~~decir~~ resumir que $\mathcal{A}$ σ-álgebra $\Longleftrightarrow \begin{cases} 1)\ \emptyset, \Omega \in \mathcal{A} \\ 2)\ A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A} \\ 3)\ A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}. \end{cases}$

<u>Definición</u>: Sea $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(\Omega)$. Denotamos como <u>$\sigma(\mathcal{C})$</u> a la mínima σ-álgebra que contiene a $\mathcal{C}$; y <u>$\alpha(\mathcal{C})$</u> a la mínima álgebra.

<u>Definición</u>: Dado (Ω, τ) ET, llamamos <u>σ-álgebra de Borel</u>, y sus elts los denotamos como <u>borelianos</u>, a $\mathcal{B}(\Omega) := \sigma(\tau)$.

<u>Lema</u>: Sea (Ω, τ) ET. Si $\mathcal{N}$ es base de τ, entonces $\sigma(\mathcal{N}) = \mathcal{B}(\Omega) = \sigma(\tau)$.

<u>Definición</u>: Se dice que $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ es <u>clase monótona</u> si

i) $A_n \in \mathcal{M}$, $A_n \uparrow A \Rightarrow A \in \mathcal{M}$

ii) $A_n \in \mathcal{M}$, $A_n \downarrow A \Rightarrow A \in \mathcal{M}$.

__Definición__: Llamaremos $\mathcal{M}(\mathcal{C})$ a la mínima clase monótona que contiene a $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(\Omega)$.

__Proposición__: $\mathcal{A}$ álgebra $\Longrightarrow$ $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ álgebra.

__Proposición__: σ-álgebra $\Longleftrightarrow$ álgebra + clase monótona

__Teorema__ (de la clase monótona): Sea $\mathcal{A}$ álgebra.

$$\mathcal{M}(\mathcal{A}) = \sigma(\mathcal{A}).$$

__Proposición__: Sea $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ y $A \subset \Omega$, y $\sigma_A(\dots)$ la mínima σ-alg. en A. Entonces

$$\sigma(\mathcal{C}) \cap A = \sigma_A(\mathcal{C} \cap A)$$

__Corolario__: Sea (Ω, τ) ET y (Y, τ_Y) SET. Entonces

$$\mathcal{B}(Y) = \mathcal{B}(\Omega) \cap Y.$$

__Def__: $\longrightarrow$ $\limsup A_n := \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=m}^{\infty} A_n$; $\liminf A_n := \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=m}^{\infty} A_n$.

__MEDIDAS__

__Definición__: Dada una σ-álgebra $\mathcal{A}$ en Ω, llamaremos __espacio medible__ a $(\Omega, \mathcal{A})$; y llamaremos __medida__ en $(\Omega, \mathcal{A})$ a toda función de conjunto

$$\mu : \mathcal{A} \longrightarrow [0, \infty]$$

tal que

i) $\mu(\emptyset) = 0$

ii) $\mu\left(\dot{\bigcup}_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$ (μ __σ-aditiva__)

- Se dice que la terna $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ es un espacio de medida.

- Si dicha μ cumple ii) sólo para uniones finitas se dice que es <u>finitamente aditiva</u> (o aditiva).

- Además, μ se dice <u>σ-finita</u> si dados $A_n \in \mathcal{A}$ disjuntos, $\overset{\infty}{\bigcup} A_n = \Omega$ y $\mu(A_n) < \infty$.

- Si $\mu(\Omega) = 1$ μ se dice probabilidad.

- $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ se dice <u>completo</u> si $B \subset A$, $\mu(A) = 0 \Rightarrow B \in \mathcal{A}$.
- Se dice que μ es <u>finita</u> si $\mu(A) < \infty$ $\forall A \subseteq \Omega$.

<u>Proposición</u>: Sean $A, B \in \mathcal{A}$.

1) $\mu(A) = \mu(A \cap B) + \mu(A \cap B^c)$

2) $A \subset B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$

3) $A \subset B$, $\mu(A) = \infty \Rightarrow \mu(B) = \infty$

4) $\mu(A) + \mu(B) = \mu(A \cup B) + \mu(A \cap B)$

5) $\mu(A \cup B) \leq \mu(A) + \mu(B)$

6) $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)$.

<u>Proposición</u>: Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida.

1) <u>Continuidad del superior</u>: $A_n \uparrow A \Rightarrow \mu(A_n) \rightarrow \mu(A)$

2) <u>Continuidad del inferior</u>: $A_n \downarrow A$, $\mu(A_1) < \infty \Rightarrow \mu(A_n) \rightarrow \mu(A)$.

Teorema* (de extensión de Carathéodory):

1) $\mathcal{A}_*$ es σ-álgebra, y $\mu^*|_{\mathcal{A}_*}$ es una medida completa.

2) Si μ^* está generada por una medida $\rho: \mathcal{A}_0 \to [0,\infty]$, $\mathcal{A}_0$ anillo $\Rightarrow \mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}_*$ y $\rho = \mu^*$ en $\mathcal{A}_0$.

Lema: $\lambda: \mathcal{A} \to [0,\infty)$ medida extensión de $\rho: \mathcal{A}_0 \to [0,\infty]$, $\mathcal{A}$ σ-álgebra

$\Rightarrow \mu^*(E) \geq \lambda(E) \quad \forall E \in \mathcal{A}$.

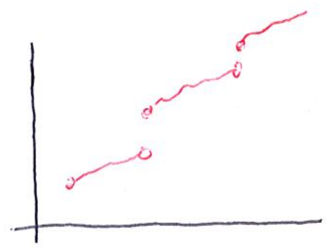
Teorema* (de unicidad extensión de Hahn): Toda medida σ-finita $\rho: \mathcal{A}_0 \to [0,\infty]$ en un anillo $\mathcal{A}_0$ extiende de modo único en $\mathcal{A}_*$ ($= \{\mu^*\text{-medibles}\}$, μ^* medida ext. generada por ρ)

MEDIDAS DE LEBESGUE - STIELTJES EN $\mathbb{R}$

Definición: Una medida de Lebesgue-Stieltjes en $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ es una medida finita en los compactos ($\Rightarrow$ acotados); y una función de distribución en $\mathbb{R}$ es una función $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que verifica:

i) Monótona creciente: $x < y \Rightarrow F(x) \leq F(y)$

ii) Continua a la dcha: $x_n \downarrow x \Rightarrow F(x_n) \to F(x)$.



• Vamos a ver la siguiente identificación con dos Teoremas:

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Medidas} \\ \text{LS} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{FD identificando} \\ \text{cada dos que difieren} \\ \text{en una cte} \end{array} \right\}$$

$$\mu \longleftrightarrow F$$

cumpliendo $\mu(a,b] = F(b) - F(a)$.

- Se dice que la terna $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ es un espacio de medida.

- Si dicha μ cumple ii) sólo para uniones finitas se dice que es <u>finitamente aditiva</u> (o aditiva).

- Además, μ se dice <u>σ-finita</u> si dados $A_n \in \mathcal{A}$ disjuntos, $\bigcup^{\infty} A_n = \Omega$ y $\mu(A_n)<\infty$

- Si $\mu(\Omega)=1$ μ se dice probabilidad.

- $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ se dice <u>completo</u> si $B \subset A$, $\mu(A)=0 \Rightarrow B \in \mathcal{A}$.
- Se dice que μ es <u>finita</u> si $\mu(A)<\infty$ $\forall A \subseteq \Omega$.

<u>Proposición</u>: Sean $A, B \in \mathcal{A}$.

1) $\mu(A) = \mu(A \cap B) + \mu(A \cap B^c)$

2) $A \subset B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$

3) $A \subset B$, $\mu(A)=\infty \Rightarrow \mu(B)=\infty$

4) $\mu(A)+\mu(B) = \mu(A \cup B) + \mu(A \cap B)$

5) $\mu(A \cup B) \leq \mu(A) + \mu(B)$

6) $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)$.

<u>Proposición</u>: Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida.

1) <u>Continuidad del superior</u>: $A_n \uparrow A \Rightarrow \mu(A_n) \to \mu(A)$

2) <u>Continuidad del inferior</u>: $A_n \downarrow A$, $\mu(A_1)<\infty \Rightarrow \mu(A_n) \to \mu(A)$.

Teorema: Sea μ una medida finitamente aditiva en un anillo $A \subset \mathcal{P}(\Omega)$. Si μ es, bien continua superiormente bien continua inferiormente en el vacío (ie, $A_n \downarrow \phi$), entonces μ es σ-aditiva, ie, una verdadera medida.

MEDIDA EXTERIOR

Defin: Una medida exterior en Ω es una func de cjts

$$\mu^*: \mathcal{P}(\Omega) \longrightarrow [0, \infty]$$

tq

i) $\mu^*(\phi) = 0$

ii) $A \subset B \Rightarrow \mu^*(A) \leq \mu^*(B)$

iii) $\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$.

- Consideramos $\inf \phi = \infty$, $\sup \phi = 0$.

Teorema*: Sea $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ y $\rho: \mathcal{C} \to [0, \infty)$ una func de cjts para la cual $\phi \in \mathcal{C}$ y $\rho(\phi) = 0$. Entonces, dado $A \subset \Omega$,

$$\mu^*(A) := \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \rho(A_i) : A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i,\ A_i \in \mathcal{C} \right\}$$

1) μ^* es una medida exterior en Ω, a la q llamamos generada por ρ.

2) $B \in \mathcal{C} \Rightarrow \mu^*(B) \leq \rho(B)$

3) $\mathcal{C} = \mathcal{A}_0$ anillo y ρ es una medida sobre $\mathcal{A}_0 \Rightarrow \mu^* = \rho$ en $\mathcal{A}_0$.

• Medida exterior de Lebesgue en $\mathbb{R}$: $\mu^* = m^*$; $\mathcal{C} = \{(a,b]\}$, $m(a,b] = b-a$; $\rho = m$.

• Medida exterior de Hausdorff (en cualquier EM): Sea (Ω, d) EM. El diámetro de $B \subset \Omega$ es $d(B) = \sup\{d(x,y) : x,y \in B\}$. Entonces, $\forall p \in \mathbb{R}^+ (>0)$ y $\forall \delta > 0$, definimos la medida exterior

$$H_{p,\delta}(A) := \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty} d(A_i)^p : A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i,\ d(A_i) \leq \delta\right\}$$

(con las notaciones del Th, $\mathcal{C} = \{A \subset \Omega;\ d(A) \leq \delta\}$, $\rho(A) = d(A)^p$.) ; y además se verifica $\delta \leq \varepsilon \Rightarrow H_{p,\delta}(A) \geq H_{p,\varepsilon}(A)$, luego $\exists \lim_{\delta \to 0}$.

<u>Definición</u>: Llamamos <u>medida exterior p-dimensional de Hausdorff</u> a

$$H_p(A) := \lim_{\delta \to 0} H_{p,\delta}(A)$$

• H_p es en efecto una medida exterior.

<u>Definición</u>: Sea $\mu^* : \mathcal{P}(\Omega) \to [0, \infty]$ una medida exterior. Diremos que un conjunto $A \subset \Omega$ es <u>μ^*-medible</u> si $\forall E \subset \Omega$

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c) \qquad \text{(Def. Carathéodory)}$$

y denotamos como $\mathcal{A}_* = \{A \subset \Omega\ \mu^*\text{-medibles}\}$.

Teorema* (de extensión de Carathéodory):

1) $\mathcal{A}_*$ es σ-álgebra, y $\mu^*|_{\mathcal{A}_*}$ es una medida completa.

2) Si μ^* está generada por una medida $\rho: \mathcal{A}_0 \to [0,\infty]$, $\mathcal{A}_0$ anillo $\Rightarrow \mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}_*$ y $\rho = \mu^*$ en $\mathcal{A}_0$.

Lema: $\lambda: \mathcal{A} \to [0,\infty)$ medida extensión de $\rho: \mathcal{A}_0 \to [0,\infty]$, $\mathcal{A}$ σ-álgebra $\Rightarrow \mu^*(E) \geq \lambda(E) \ \forall E \in \mathcal{A}$.

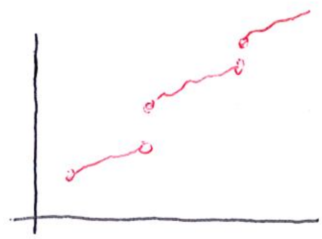
Teorema* (de extensión (unicidad) de Hahn): Toda medida σ-finita $\rho: \mathcal{A}_0 \to [0,\infty]$ en un anillo $\mathcal{A}_0$ extiende de modo único en $\mathcal{A}_*$ ($= \{\mu^*\text{-medibles}\}$, μ^* medida ext. generada por ρ)

MEDIDAS DE LEBESGUE-STIELTJES EN $\mathbb{R}$

Definición: Una medida de Lebesgue-Stieltjes en $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ es una medida finita en los compactos ($\Leftrightarrow$ acotados); y una función de distribución en $\mathbb{R}$ es una función $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que verifica:

i) Monótona creciente: $x < y \Rightarrow F(x) \leq F(y)$

ii) Continua a la derecha: $x_n \downarrow x \Rightarrow F(x_n) \to F(x)$.



• Vamos a ver la siguiente identificación con dos Teoremas:

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Medidas} \\ \text{LS} \end{array} \right\} \quad = \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{FD identificando} \\ \text{cada dos que difieren} \\ \text{en una cte} \end{array} \right\}$$

$$\mu \longleftrightarrow F$$

cumpliendo $\mu(a,b] = F(b) - F(a)$.

Lema: Sea x, y dos sol. de la ec. homog., y $t_0 \in I$. Ento

$$W(x,y)(t) = W(x,y)(t_0)\, e^{-\int_{t_0}^{t} a(s)\, ds}.$$

Teorema: Sean x, y dos sol de la ec. hom y $t_0 \in I$. Son equivalentes:

1) x e $y \in C^2(I)$ son L.I.

2) $(x(t_0), \cancel{x}'(t_0)), (\cancel{y}(t_0), y'(t_0)) \in \mathbb{R}^2$ son L.I.

3) $W(x,y)(t) \neq 0 \quad \forall t \in I$.

4) $W(x,y)(t_0) \neq 0$.

• Sea $x(t)$ una sol de la EC. HOM. ¿Como encontrar una sol. L.I.? (y así todo Z).

Derivando $\left(\frac{\cancel{Z}}{\cancel{x}}\right)(t)$, y eligiendo $y(t_0) = 0$, $y'(t_0) = \frac{1}{\cancel{x}(t_0)}$, se tiene

Proposición: Sea $x(t)$ sol de la ec. hom. Entonces

$$y(t) := x(t) \cdot \int_{t_0}^{t} \frac{e^{-\int_{t_0}^{s} a(\tau)\, d\tau}}{x^2(s)}\, ds$$

es una sol L.I. con $x(t)$, y por tanto $Z = \langle x(t), y(t) \rangle$.

• Entonces, ya conocemos Z, ¿Cómo encontrar x_p para tener $x_p + Z \equiv$ subesp. afín de sol de la ec. no homog.? Se trata de encontrar una solución de la forma $x_p = \lambda(t)\, x(t) + \mu(t) \cdot y(t)$, donde se trata de encontrar $\lambda(t)$ y $\mu(t)$.

Proposición (Método de Variación de Parámetros): Sean $x(t), y(t)$ base de Z. Una solución particular de la ecuación no homogénea $x''+ax'+bx=c$ es

$$x_p(t) = \left(\int \frac{-c\cdot y}{W(x,y)}\right) x(t) + \left(\int \frac{c\cdot x}{W(x,y)}\right)\cdot y(t)$$

y por tanto $x_p + Z$ son todas las soluciones de la ec. no hom.

- En lo que sigue podrá ser $x: I \to \underline{\underline{\mathbb{C}}}$, y $x(t) = (\mathrm{Re}\, x)(t) + i(\mathrm{Im}\, x)(t)$.

Proposición: Sea $x''+ax'+bx=c$, donde $a,b: I \to \mathbb{R}$ y $c: I \to \mathbb{C}$, y $x: I \to \mathbb{C}$

$$x(t) \text{ es sol. de } x''+ax'+bx=c \iff \begin{cases} \mathrm{Re}\, x \text{ es sol de } x''+ax'+bx = \mathrm{Re}\, c \\ \mathrm{Im}\, x \text{ es sol de } x''+ax'+bx = \mathrm{Im}\, c. \end{cases}$$

ECUACIONES LINEALES CON COEF. CONSTANTES

- Se trata de resolver $x''+ax'+bx=0$ (CASO HOMOGÉNEO), con $a,b \in \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$.

Proposición: Sea la ED $x''+ax'+bx=0$, con $a,b \in \mathbb{C}$, y $\lambda \in \mathbb{C}$.

$$x(t) = e^{\lambda t} \text{ es solución} \iff \lambda^2 + a\lambda + b = 0.$$

Definición: Llamamos ecuación característica a $\lambda^2+a\lambda+b=0$.

- ¿Cuáles son las soluciones?

- CASO COMPLEJO: $a,b \in \mathbb{C}$, $x: I \to \mathbb{C}$.

- $a^2-4b \neq 0$: Hay dos raíces distintas $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$, luego $e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}$ son dos sol l.i.

- $a^2-4b = 0$: Hay una raíz doble $\lambda = \frac{-a}{2}$, luego $e^{\frac{-at}{2}}$ es sol. Otra l.i. con ella es $te^{\frac{-at}{2}}$.

Teorema ($\mu \longmapsto F$): Dada una medida $\mu: \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to [0,\infty)$ LS, existe una FD $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $\mu(a,b] = F(b) - F(a)$.

Dicha FD es única salvo que difieran en una constante.

- Sea $\mathcal{A}_0 = \{ \dot{\bigcup}_{finita} (a,b] \}$.

Lema I: $\forall A \in \mathcal{A}_0$, $\forall \varepsilon > 0$ $\exists B \in \mathcal{A}_0$, con $\overline{B} \subset A$: $\mu(A \setminus B) < \varepsilon$

Lema II: Sea (Ω, τ) ET Hausdorff. Dada $(K_i)_{i \in I}$ disjuntos, existe una cantidad finita de ella que son disjuntos.

Lema III: $\mu: \mathcal{A}_0 \to [0,\infty)$, $\mu(\dot{\bigcup} I_n) = \sum_n \mu(I_n)$ es σ-aditiva.

Teorema ($F \longmapsto \mu$): Dada una FD $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, existe una única medida $\mu: \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to [0,\infty]$ LS tal que $\mu(a,b] = F(b) - F(a)$.

MEDIDAS LS EN $\mathbb{R}^n$

Proposición: $\mathcal{A}_0 := \left\{ \dot{\bigcup}_{finita} \left(\prod_{i=1}^{n} (a_i, b_i] \right) \right\}$ es un anillo.

Definición: Una medida de Lebesgue-Stieltjes en $\mathbb{R}^n$ es una medida $\mu: \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \to [0,\infty)$ que es finita en los compactos (o acotados).

Definición: Llamamos conjunto de esquinas de $(a,b] = \prod (a_i, b_i] \subset \mathbb{R}^n$ a

$$S_{ab} = \{ x \in \mathbb{R}^n : x_i = a_i \text{ ó } b_i \ \forall i \}$$

y diremos que el signo de $x \in S_{ab}$ es

$$\sigma(x) = \begin{cases} 1 & \text{si hay un nº par de } a_i \\ -1 & \text{impar} \end{cases}$$

Definición: Una función de distribución en $\mathbb{R}^n$ es una función $F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que

i) F continua a la derecha: $x_n \searrow x$, $\Rightarrow F(x_n) \to F(x)$.

ii) $\sum_{x \in S_{ab}} \sigma(x) F(x) \geq 0 \quad \forall a,b \in \mathbb{R}^n$.

Proposición: Sea $F_i: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $i=1,\dots,n$ FD de $\mathbb{R}$. Entonces $F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $F(x) := F_1(x) \cdots F_n(x)$ es una FD de $\mathbb{R}^n$.

- Se trata de ver al igual que en $\mathbb{R}$ que

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Medidas LS} \\ \text{en } \mathbb{R}^n \end{array} \right\} \equiv \left\{ \begin{array}{c} \text{FD en} \\ \mathbb{R}^n \end{array} \right\} / \sim$$

$$\mu \longleftrightarrow F$$

$$\mu(a,b] = \sum_{x \in S_{ab}} \sigma(x) F(x)$$

Teorema ($\mu \mapsto F$): Sea $\mu: \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \to [0,\infty)$ una medida finita. Entonces $F(x) := \mu(-\infty, x]$ es una FD de $\mathbb{R}^n$ y satisface $\mu(a,b] = \sum \sigma(x) F(x)$.

Teorema ($F \mapsto \mu$): Dada una FD $F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, existe una única medida $\mu: \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ de LS tal que $\mu(a,b] = \sum \sigma(x) F(x)$.

- Consideremos $F_i(x) = x$ FD en $\mathbb{R}$, luego $F(x_1,\dots,x_n) = x_1 \cdots x_n$ es FD en $\mathbb{R}^n$. Entonces la medida asociada a los semi-rectángulos es $\mu(a,b] = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i)$; y los teoremas de Carathéodory-Hahn construyen el espacio de medida completo

$$(\mathbb{R}^n, \underbrace{\mathcal{A}_* = \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)}_{\text{Lebesgue-medibles}}, \underbrace{\mu^* = m}_{\text{medida de Lebesgue.}})$$

MEDIDA DE LEBESGUE

Teorema:

1) $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ es invariante por traslaciones : $E \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \Rightarrow E+x \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$

2) m " " " " : $m(E) = m(E+x)$

3) $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ " " " " : $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \Rightarrow E+x \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$

Teorema: Sea $\mu : \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \to [0,\infty]$ una medida invariante por traslaciones tal que $\mu([0,1]^n) < \infty$. Entonces existe un $c > 0$ tal que $\mu = cm$.

Corolario: La medida de Lebesgue en $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ es la única medida invariante por traslaciones que asigna a cada n-semicubo su n-volumen.

MEDIDAS EXTERIORES EN (Ω, d)

Definición: Se dice que una med. ext. $\mu^* : \mathcal{P}(\Omega) \to [0,\infty]$ en un EM (Ω, d) es una medida exterior métrica si dados $A, B \subset \Omega$, $d(A,B) > 0 \Rightarrow \mu^*(A \cup B) = \mu^*(A) + \mu^*(B)$

Teorema: μ^* medida exterior métrica en $(\Omega, d) \Rightarrow \mathcal{B}(\Omega) \subset \mathcal{A}_*$.

Teorema: $H_p : \mathcal{P}(\Omega) \to [0,\infty]$ (medida exterior p-dimensional de Hausdorff) es una med. exterior métrica.

Corolario: Para cualquier medida exterior de Hausdorff $\mathcal{B}(\Omega) \subset \mathcal{A}_*$.

Definición: Llamamos medida de Hausdorff p-dimensional a la $H_p|_{\mathcal{B}(\Omega)}$:

$$H_p : \mathcal{B}(\Omega) \to [0,\infty)$$

Teorema: Sea $A \subset \Omega$ y $0<p<q$.

1) $H_p(A) < \infty \implies H_q(A) = 0$

2) $H_q(A) > 0 \implies H_p(A) = \infty$.

Definición: Llamamos dimensión Hausdorff de $A \subset \Omega$ a

$$\dim_H(A) := \inf\{q>0 : H_q(A) = 0\} = \sup\{p>0 : H_p(A) = \infty\}$$

MEDIDAS DE HAUSDORFF EN $\mathbb{R}^n$

Lema: $0 < H_p(A) < \infty \implies \dim_H(A) = p$.

Teorema: La medida de Hausdorff n-dimensional del cubo unidad es finita, en particular,

$$\frac{1}{m(B)} \le H_n(Q) \le \sqrt{n}^{\,n}$$

donde $B = B[0,1]$ y $Q = [0,1]^n$.

Corolario: $\dim_H(Q) = n$.

Proposición: $\dim_H\left(\dot{\bigcup} A_i\right) = \sup \dim_H(A_i)$.

Proposición: Las medidas de Hausdorff son invariantes por isometrías

Corolario: $\dim_H \mathbb{R}^n = n$

<u>Proposición</u>: (Ω, d) EM y $(\Omega' \subset \Omega, d' := d_{/\Omega'})$ SEM. Entonces

$$H_p = H_{p/\Omega'}.$$

• Puesto que H_p y m_n son invariantes por traslaciones, y y m_n es la única medida salvo proporcionales en $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, entonces para cada n $\exists\, \gamma_n \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{\gamma_n H_n = m_n}$$

<u>Proposición</u>: $H_1 = m_1$.

II: INTEGRACIÓN

<u>Definición</u>: Una aplicación $F:(\Omega_1,\mathcal{A}_1)\longrightarrow(\Omega_2,\mathcal{A}_2)$ se dice <u>medible</u> si $F^{-1}(\mathcal{A}_2)\subset\mathcal{A}_1$. Si $(\Omega_1=E\tau,\ \mathcal{A}_1=\sigma(\tau)=\mathcal{B}(\Omega_1))$, entonces se dice que F es <u>Borel-medible</u>.

<u>Proposición</u>: Sea $F:(\Omega_1,\mathcal{A}_1)\longrightarrow(\Omega_2,\mathcal{A}_2=\sigma(\mathcal{E}))$ $(\mathcal{E}\subset\mathcal{P}(\Omega_2))$ medible. Entonces

$$F \text{ medible} \iff F^{-1}(\mathcal{E})\subset\mathcal{A}_1.$$

<u>Corolario</u>: Sea $f:(\Omega,\mathcal{A})\to(\overline{\mathbb{R}},\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$.

$$f \text{ es medible} \iff \{x\in\Omega : f(x)>\alpha\}\in\mathcal{A}\quad\forall\alpha\in\mathbb{R}.$$

<u>Proposición</u> (Propiedades): Sean f,g,f_n medibles.

1) $g\circ f$ medible
2) $|f|$, $-f$ medible
3) $\max(f,g)$, $\min(f,g)$ medible.
4) $f^+:=\max(f,0)$, $f^-:=\max(-f,0)$ medible,
5) $\sup f_n$, $\inf f_n$ medibles
6) $\overline{\lim}\, f_n$, $\underline{\lim}\, f_n$ medibles
7) Si $\exists$, $\lim f_n$ medible

Defin: Llamamos **función indicadora** o **característica** de $A \in \mathcal{A}$ a

$$I_A(x) := \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \notin \end{cases}.$$

Defin: Una función $s: \Omega \to \mathbb{R}$ se dice **simple** si $\# \operatorname{Im} s < \infty$ y es medible

Propos: s simple $\iff s = \sum a_i I_{A_i}$, $\dot{\bigcup} A_i = \Omega$

Proposición: s, r simples $\Rightarrow s+r, s \cdot r, \frac{s}{r}$ simples (si $r \neq 0$).

Lema: Considera la sucesión de funciones $s_n : [0,\infty) \to [0,\infty]$:

$$s_n(x) := \begin{cases} \frac{i-1}{2^n} & , x \in \left[\frac{i-1}{2^n}, \frac{i}{2^n}\right) \quad ; i = 1, \dots, 2^n \\ n & x \in [n, \infty) \end{cases}$$

1) s_n son simples
2) $0 \leq s_n \leq n$
3) Es creciente: $s_n \leq s_{n+1}$
4) $s_n(\alpha) \xrightarrow{u} \alpha$ en cualquier acotado.

Teorema: Sea $f: (\Omega, \mathcal{A}) \to (\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$.

f medible $\iff \exists\, s_n$ simples : $s_n \to f$. , y $\xrightarrow{u}$ donde f acotada.

Corolario: Si $f, g : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ son medibles, entonces si están definidas (i.e., $\neq \infty - \infty$),

$\lambda \cdot f$, $f+g$, $f \cdot g$ y $\frac{f}{g}$ son medibles.

INTEGRACIÓN

Definición: Sea $s \geq 0$ simple, $s = \sum a_i I_{A_i}$ $(a_i \geq 0)$. Definimos la integral de s respecto de μ como

$$\boxed{\int s := \sum_{i=1}^{n} a_i \, \mu(A_i)}$$

Proposición: Si $0 \leq s, r$ simples, $\lambda \geq 0$, entonces

1) $\lambda \int s = \int \lambda s$
2) $\int (s+r) = \int s + \int r$
3) $s \leq r \Rightarrow \int s \leq \int r$.

- $\int s$ se puede expresar como $\sup \{ \int s' : 0 \leq s' \leq s \}$ (y s un máximo para s' simple), y en general

Definición: Sea $f \geq 0$ medible. Se define la integral de f resp. μ como

$$\boxed{\int f := \sup \left\{ \int s : 0 \leq s \leq f, \ s \text{ simple} \right\}}$$

Entonces, si f es general, $f:\Omega\to\overline{\mathbb{R}}$, se define (si $\exists$)

$$\boxed{\int f := \int f^+ - \int f^-}$$

Y se dice que <u>existe la integral</u> si es $\neq \infty - \infty$, y que f es integrable si ambas son finitas. Si $f:\Omega\to\mathbb{C}$, $f = f_1 + i f_2$, y f medible $\Leftrightarrow$ f_1, f_2 medibles, y $\int f = \int f_1 + i\int f_2$.

<u>Proposición</u> (Propiedades). Sean f, g medibles.

1) $\exists \int f \Rightarrow \exists \int \lambda f = \lambda \int f$ $\quad(\lambda\in\mathbb{R})$

2) $\exists \int f, \int g$, $f\leq g \Rightarrow \int f \leq \int g$.

3) $f\leq g$, y bien $\exists \int g < \infty$, bien $\exists \int f > -\infty \Rightarrow \exists \int$ "la otra", y $\int f \leq \int g$.

4) $\exists \int f \Rightarrow \left|\int f\right| \leq \int |f|$.

<u>Lema</u>: $\quad f$ integrable $\Longleftrightarrow |f|$ integrable

<u>Propos.</u>:

1) $f\geq 0 \Rightarrow \int_B f = \int I_B \cdot f$

2) $\exists \int f \Rightarrow \exists \int_B f = \int I_B \cdot f$

3) f integrable (en Ω) $\Longleftrightarrow$ f integrable en B $\forall B\in\mathcal{A}$.

<u>Definición</u>: Sea $(\Omega, \mathcal{A})$ un espacio medible y μ, λ dos medidas. Se dice que <u>λ es absolutamente continua respecto de μ</u>, <u>$\lambda << \mu$</u>, si $\forall A \in \mathcal{A}$,

$$\mu(A) = 0 \Rightarrow \lambda(A) = 0$$

<u>Definición</u>: Una <u>carga</u> en $(\Omega, \mathcal{A})$ es una función de conjuntos $\lambda : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}$ tal que

i) $\lambda(\emptyset) = 0$

ii) $\lambda\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(A_i)$.

<u>Teorema</u> (de la Carga): Sea $h : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ una función medible en $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$.

1) Si $h \geq 0$, entonces $\lambda(A) := \int_A h \, d\mu$, es una medida $\lambda << \mu$.

2) Si h general, si $\exists \int h$, entonces $\lambda(A) := \int_A h \, d\mu$ es una carga $\lambda << \mu$.

<u>Lema</u>: h integrable $\Rightarrow$ h finita c.s.

• $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$ es una función <u>no</u> Lebesgue integrable: $\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$, pero $\int_0^{\infty} \left| \frac{\operatorname{sen} x}{x} \right| = \infty$.

<u>Teorema</u>: Sea f_n medibles. Se puede hacer

$$\lim \int f_n = \int \lim f_n$$

1) <u>Teorema de la Convergencia Monótona</u>: $f_n \geq 0$ y crecientes / $f_n \leq 0$ y decrecientes.

2) <u>Teorema de la Convergencia Monótona Extendida</u>: $\exists F : \exists \int F$, y bien $\int F > -\infty$ y $F \leq f_n$, f_n creciente / bien $\int F < \infty$, $f_n \leq F$, f_n decreciente.

3) Teorema de la Convergencia Dominada: $\exists F \in \mathcal{L}^1$, f_n convergente, $|f_n| \leq F$ $\forall n$.

Lema (Fatou): Sean f_n, F medibles y $\exists \int F$.

1) $\int F > -\infty$, $F \leq f_n \Rightarrow \int \underline{\lim} f_n \leq \underline{\lim} \int f_n$

2) $\int F < \infty$, $f_n \leq F \Rightarrow \overline{\lim} \int f_n \leq \int \overline{\lim} f_n$.

Teorema: Sean f_n medibles. Se puede hacer

$$\int \sum_{n=1}^{\infty} f_n = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n$$

1) $f_n \geq 0$

2) $\sum \int |f_n| < \infty$.

Teorema (de Aditividad): Sean f, g medibles, $\exists \int f, \int g$, y $f+g$ y $\int f + \int g$ están bien definidas. Entonces $\exists \int (f+g) = \int f + \int g$.

Definición: Se llama espacio de funciones $\mathcal{L}^1$ (ó $\mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, \mu, K)$) al conjunto de funciones integrables $f: \Omega \to K$.

- $\mathcal{L}^1$ es un espacio vectorial

Proposición: $\int : \mathcal{L}^1 \longrightarrow K$, $f \longmapsto \int f$ es lineal, y $|\int f \, d\mu| \leq \int |f|$.

Proposición (Desigualdad de Tchebychev): Sea f medible y $k \in \mathbb{R}$, y denotemos con $A = \{ x \in \Omega : |f| \geq k \}$. Entonces

$$k \cdot \mu(A) \leq \int_A |f| \leq \int |f| .$$

APLICACIONES DEL TCD

Defin. Una integral paramétrica es una función $F(t) := \int f(t,x)\, dx$, donde la t actúa como "parámetro", y $f(t,x) \equiv f_t(x)$. $f : I \times \Omega \to \mathbb{R}$.

Teorema (Continuidad de las IP):

$$\left.\begin{array}{l} \exists \lim\limits_{t \to t_0} f(t,x) \\ \\ \exists h \in \mathcal{L}^1 : |f(t,x)| \leq h \quad \forall x, \forall t \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{l} \lim f(t,x) \text{ es integrable y} \\ \\ \int \lim\limits_{t \to t_0} f(t,x) = \lim\limits_{t \to t_0} \int f(t,x) . \end{array}$$

En particular, si $\overset{\text{fijado } x}{f_x(t)} = f(t,x)$ son continuas, entonces $F(t) := \int f(t,x)$ es continua
$: I \to \mathbb{R}$

Teorema (Derivabilidad de la IP):

$$\left.\begin{array}{l} \exists \dfrac{\partial f}{\partial t}, \\ \exists h \in \mathcal{L}^1 : \left| \dfrac{\partial f}{\partial t} \right| \leq h \quad \forall t, \forall x \\ \exists s \in I : f_s(x) \in \mathcal{L}^1 \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{l} \dfrac{\partial f}{\partial t}, f_t \in \mathcal{L}^1 ; F(t) := \int f(t,x) \text{ es} \\ \text{derivable y} \\ F'(t) = \int \dfrac{\partial f}{\partial t}(t,x)\, dx. \end{array}$$

• La función $\pi(t):(-1,\infty)\to\mathbb{R}$ es C^∞ y $\pi(n)=n!$, y $\pi(-\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$

Es la función Γ de Euler trasladada (porque interpola bien al factorial).

$$\Gamma(t):=\int_0^\infty e^{-x}x^{t-1}\,dx$$

INTEGRAL DE RIEMANN

Definición: Una partición de $[a,b]$ es una colección $P=\{x_0=a<x_1<\dots<x_n=b\}$.

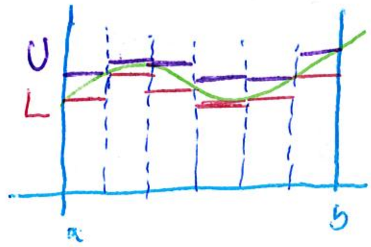
• Todas las funciones aquí son "acotadas": $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ y $|f|\le M$.

• Dada una partición P, podemos crear una partición de $[a,b]$ así: $E_i:=(x_i,x_{i+1}]$.

Definición: Se llama función superior e inferior a

$$U(f,P)=\alpha_P=\sum_{i=1}^{n}\Big(\sup_{E_i} f\Big)\cdot I_{E_i}$$

$$L(f,P)=\beta_P=\sum\Big(\inf f\Big)\cdot I_{E_i}$$



• $P\subset Q$ particiones (Q más fina) $\Rightarrow \alpha_P\geq\alpha_Q$ y $\beta_P\leq\beta_Q$. (pues se hace mejor la aproximación).

• $P_n\uparrow P\Rightarrow \alpha_n\downarrow\alpha$ y $\beta_n\uparrow\beta$.

Definición: Una función acotada $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ se dice Riemann-integrable,

$f\in\mathcal{R}[a,b]$, si $\exists\, r\in\mathbb{R}: \forall P_n\uparrow P: |P_n|:=\max\{|x_i-x_{i+1}|\}\to 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \int\alpha\,dm=r=\int\beta\,dm$, y denotamos a ese número real

$$r=\int_a^b f.$$

Lema: Sea $P_n \uparrow P$.

1) $x \notin P$, $\alpha(x) = \beta(x) \Rightarrow f$ cont. en x

2) $|P_n| \to 0$, f cont. en x $\Rightarrow \alpha(x) = \beta(x)$.

Teorema (Caracterización de Funciones $\mathcal{R}$-int): Sea $f: [a,b] \to \mathbb{R}$. Son equivalentes

1) $f \in \mathcal{R}[a,b]$

2) f es continua c.s.

3) $\exists P_n \uparrow P$: $\int \alpha = \int \beta$.

Y entonces $f \in \mathcal{L}^1$ y $\displaystyle\int_{[a,b]} f \, dm = \mathcal{R}\int_a^b f \, dx$.

Definición: Sea $f: (a,b) \to \mathbb{R}$ $(-\infty \leq a < b \leq \infty)$ tal que $f \in \mathcal{R}[c,d]$ ~~$\forall [c,d] \subset$~~ $\forall [c,d] \subset (a,b)$. Entonces llamamos integral impropia de Riemann, si existe, a

$$\lim_{\substack{c \to a^+ \\ d \to b^-}} \mathcal{R}\int_c^d f \, dx = \int_a^b f \, dx.$$

III : MEDIDA PRODUCTO

Definición: Sean $(\Omega_1, \mathcal{A}_1), \dots, (\Omega_n, \mathcal{A}_n)$ espacios medibles y consideremos $\Omega := \prod_i \Omega_i$. Llamaremos σ-álgebra producto en Ω de los espacios $(\Omega_i, \mathcal{A}_i)$ a toda σ-álgebra $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ que verifique

i) $\pi_i : (\Omega, \mathcal{A}) \longrightarrow (\Omega_i, \mathcal{A}_i)$ son medibles $\forall i$

ii) $(\Phi, \mathcal{B})$ otro espacio medible, $F : (\Phi, \mathcal{B}) \longrightarrow (\Omega, \mathcal{A})$ una aplicación, entonces

$$F \text{ medible} \iff \pi_i \circ F \text{ medibles } \forall i.$$

• Denotemos $\mathcal{R} := \{A_1 \times \dots \times A_n\}_{A_i \in \mathcal{A}_i}$.

Teorema: La σ-álgebra producto existe, es única y es $\sigma(\mathcal{R}) \overset{\text{NOT}}{=} \mathcal{A}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{A}_n$

Proposición: La menor álgebra que contiene a $\mathcal{R}$, ie, $\alpha(\mathcal{R})$ es $\mathcal{A}_0 := \{\dot{\bigcup}_{\text{finita}} E_i\}_{E_i \in \mathcal{R}}$.

Definición: Sean $(\Omega_1, \mathcal{A}_1)$ y $(\Omega_2, \mathcal{A}_2)$ espacios medibles y consideremos $(\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2)$.

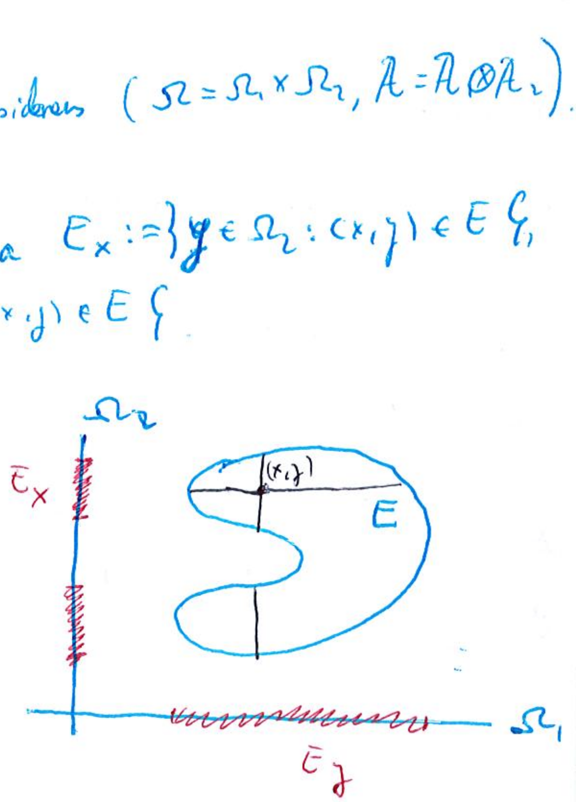
• Dado $E \subset \Omega$, llamamos sección de E por $x \in \Omega_1$ a $E_x := \{y \in \Omega_2 : (x,y) \in E\}$, y sección de E por $y \in \Omega_2$ a $E_y := \{x \in \Omega_1 : (x,y) \in E\}$

• Dada $f : \Omega \longrightarrow \Omega'$, llamamos sección de f por x a

$$f_x : \Omega_2 \longrightarrow \Omega', \quad y \longmapsto f_x(y) := f(x,y),$$

y sección de f por y a

$$f_y : \Omega_1 \longrightarrow \Omega', \quad x \longmapsto f_y(x) := f(x,y).$$



<u>Proposición</u>:

1) $E \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 \Rightarrow E_x \in \mathcal{A}_2$, $E_y \in \mathcal{A}_1$.

2) $f:(\Omega, \mathcal{A}) \to (\Omega', \mathcal{A}')$ medible $\Rightarrow f_x, f_y$ medible.

<u>Proposición</u>: Sean $(\Omega_1, \tau_1), (\Omega_2, \tau_2)$ ET, y $(\Omega, \mathcal{T})$ su ET producto. Entonces $\mathcal{B}(\Omega_1) \otimes \mathcal{B}(\Omega_2) \subseteq \mathcal{B}(\Omega_1 \times \Omega_2)$; y se da la igualdad si los espacios son 2º contables.

<u>Teorema</u> (de la Medida Producto): Sean $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, \mu_1), (\Omega_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ dos espacios de medida. Entonces existe una medida μ en $(\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2)$ tal que

$$\mu(A \times B) = \mu_1(A) \cdot \mu_2(B)$$

Además, μ es única si los espacios son σ-finitos; y si son de probabilidad μ también.

<u>Definición</u>: Sea $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ un espacio de medida, y $(\Omega_2, \mathcal{A}_2)$ un espacio medible. Se llama <u>medida de transición</u> en $(\Omega_2, \mathcal{A}_2)$ relativa a $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ a toda colección $\{\mu_x\}_{x \in \Omega_1}$, con μ_x medidas en $(\Omega_2, \mathcal{A}_2)$ tales que $\forall B \in \mathcal{A}_2$ la función $\mu_B: \Omega_1 \to [0, \infty]$ $\mu_B(x) := \mu_x(B)$ sea medible (en $\mathcal{A}_1$). Se dice que $\{\mu_x\}_{x \in \Omega}$ es σ-finita, finita o probabilidad cuando cada μ_x lo sea.

<u>Definición</u>: Se dice que una medida de transición $\{\mu_x\}_{x \in \Omega_1}$ es <u>uniformemente σ-finita</u> si existen $B_n \in \mathcal{A}_2$ disjuntos, $\dot{\bigcup} B_n = \Omega_2$, y $0 \le k_n < \infty$ tales que $\mu_x(B_n) \le k_n \quad \forall x \in \Omega_1, n \in \mathbb{N}$.

Teorema (General de la Medida Producto): Sea $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ un espacio de medida σ-finito, y $(\Omega_2, \mathcal{A}_2, \{\mu_x\}_{x\in\Omega_1})$ un espacio de medida con una medida de transición uniformemente σ-finita. Entonces

1) $\forall E \in \mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$, la función $x \in \Omega_1 \longrightarrow \mu_x(E_x) \in [0,\infty]$ es medible

2) $\dot{\exists}$ medida μ en $(\Omega, \mathcal{A})$, que es σ-finita, tal que $\forall E \in \mathcal{A}$

$$\mu(E) = \int \mu_x(E_x)\, d\mu_1$$

y para los productos de medibles,

$$\mu(A \times B) = \int_A \mu_B \, d\mu_1$$

3) Si μ_1 y $\{\mu_x\}$ son probabilidades, μ también.

Teorema (Clásico de la Medida Producto): Sean $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ y $(\Omega_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ espacios de medida σ-finitos.

1) $\forall E \in \mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$, las funciones $x \in \Omega_1 \longrightarrow \mu_2(E_x) \in [0,\infty]$ y $y \in \Omega_2 \longrightarrow \mu_1(E_y) \in [0,\infty]$ son medibles

2) $\dot{\exists}$ medida μ en $(\Omega, \mathcal{A})$, que es σ-finita, tal que $\forall E \in \mathcal{A}$,

$$\mu(E) = \int \mu_2(E_x)\, d\mu_1 = \int \mu_1(E_y)\, d\mu_2$$

y para los productos de medibles

$$\mu(A \times B) = \mu_1(A)\,\mu_2(B)$$

3) Si μ_1, μ_2 son probabilidades, μ también.

<u>Teorema</u> (de Fubini): Sean $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ un espacio de medida $\underline{\underline{\sigma\text{-finito}}}$ y $(\Omega_2, \mathcal{A}_2, \{\mu_x\}_{x \in \Omega_1})$ un espacio de medida con una medida <u>unifor. σ-finita</u>. Sea $f: \Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \underset{\text{medible}}{\longrightarrow} \overline{\mathbb{R}}$. Ent.

1) $\boxed{f \geq 0}$, la función $\int f_x \, d\mu_x \overset{\text{NOT}}{=} g(x)$ es medible en Ω_1 y verifica

$$\int f \, d\mu = \int \left(\int f_x \, d\mu_x \right) d\mu_1 \qquad (*)$$

2) $\boxed{f \text{ arbitr.}}$, y $\exists \int f$, $\Rightarrow \exists\, g: \Omega_1 \to \overline{\mathbb{R}}$ medible tal que $g(x) \overset{\text{c.s.}}{=} \int f_x \, d\mu_x$ y verifica $(*)$ (si f int. $\Rightarrow g$ finita)

3) Si $\int \left(\int |f_x| \, d\mu_x \right) d\mu_1 < \infty$, f int y se verifica $(*)$.

<u>Teorema</u> (Clásico de Fubini): Sean $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ y $(\Omega_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ dos espacios de medida <u>σ-finitos</u>, y $f: \Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \to \overline{\mathbb{R}}$ medible. Entonces

1) $\boxed{f \geq 0}$, las funciones $\int f_x \, d\mu_2$ y $\int f_y \, d\mu_1$ son medibles y se verifica

$$\int f \, d\mu = \int \left(\int f_x \, d\mu_2 \right) d\mu_1 = \int \left(\int f_y \, d\mu_1 \right) d\mu_2 \qquad (*)$$

2) $\boxed{f \text{ arbitr.}}$, $\exists \int f \Rightarrow \exists$ funciones medibles $g_1 : \Omega_1 \to \overline{\mathbb{R}}$, $g_2 : \Omega_2 \to \overline{\mathbb{R}}$ tales que

$g_1(x) \overset{c.s.}{=} \int f_x \, d\mu_2$, $g_2(x) \overset{c.s.}{=} \int f_y \, d\mu_1$ y se verifica $(\ast)$.

3) Si se verifica $\int \left(\int |f_x| \, d\mu_2 \right) d\mu_1 < \infty$ ó $\int \left(\int |f_y| \, d\mu_1 \right) d\mu_2 < \infty$, se da $(\ast)$.

OJO!: Si alguno de los espacios no es σ-finito, no se da el resultado (Contraejemplo).

Teorema: Sea $f : \Omega \to [0,\infty]$ medible en $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ y sea $\text{Ord}\, f := \{(x,y) \in \Omega \times [0,\infty) : 0 \leq y \leq f(x)\}$, y sea $g(x) := \mu\{x : y \leq f(x)\}$. Entonces $\text{Ord}\, f \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$, g es medible y

$$(\mu \times m)(\text{Ord}\, f) = \int f \, d\mu = \int_0^\infty g \, dm$$

Teorema (de Pappus de los Volúmenes): Dado $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ y una recta r que no corte a E, si $C(E)$ es el centro de masas de E, $\left(x_i[C(E)] = \dfrac{\int_E x_i \, dm_2}{m_2(E)} \right)$, entonces el volumen del cuerpo de revolución $\hat{E}$ resultado de hacer girar E alrededor de r es

$$m_3(\hat{E}) = 2\pi \cdot d(r, C(E)) \cdot m_2(E).$$

• Consideremos el homeomorfismo

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^n \setminus \{0\} &\longrightarrow (0,\infty) \times S_{n-1} \\ p &\overset{F}{\longmapsto} \left(\|p\|, \frac{p}{\|p\|} \right) \\ rz &\overset{G}{\longleftarrow\!\!\!\shortmid} (r, z) \end{aligned},$$

y supongamos que tenemos las medidas m_n en $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, y sobre $(0,\infty)$ la medida $\lambda : \mathcal{B}(0,\infty) \longrightarrow [0,\infty]$, $\lambda(B) := \int_B x^{n-1} \, dm$ (es medida por Th Lebesgue), y sobre $(0,\infty) \times S_{n-1}$ $m_F = F_* m = \mu$.

<u>Teorema</u>: Existe una única medida σ en S_{n-1} tal que $\mu = \lambda \times \sigma$.

Además es invariante por traslaciones.

• Si $E \in \mathcal{B}(S_{n-1})$, $\sigma(E) = n \cdot m_n(E_1)$, donde $E_1 = \{rz : r \in (0,1], z \in E\} = G((0,1], E)$.

<u>Teorema</u>: Sea A_{n-1} el área de la esfera unidad, $A_{n-1} = \sigma(S_{n-1})$; y V_n el volumen n-dim. de la bola unidad de $\mathbb{R}^n$, $V_n = m_n(B_n)$. Sus valores son:

$$A_{n-1} = \frac{2\pi^{n/2}}{\Pi\left(\frac{n}{2} - 1\right)} \quad ; \quad V_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Pi\left(\frac{n}{2}\right)},$$

y en particular $V_{2n} = \dfrac{\pi^n}{n!}$, luego $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} V_{2n} = e^{\pi}$

Teorema (Producto de Convolución): Sean $f, g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ finitas, sea $\|f\|_1 := \int |f| \, dm$ (que es una seminorma). Entonces existe una función medible, finita e integrable $f * g \in \mathcal{L}^1$, que llamamos producto de convolución de f y g, tal que $(f*g)(x) \overset{c.s.}{=} \int f(x-y) g(y) \, dm$.

- Cuando tengamos infinitos espacios $(\Omega_i, \mathcal{A}_i)$ de medida, denotamos $\bigotimes \mathcal{A}_i$ a la σ-álgebra producto.

Teorema (de la Probabilidad Producto): Sean, para cada $n \in \mathbb{N}$, $(\Omega_n, \mathcal{A}_n, P_n)$ espacios de probabilidad, y sea $(\Omega = \prod_{i=1}^{\infty} \Omega_i, \mathcal{A} = \bigotimes \mathcal{A}_i)$. Entonces existe una única probabilidad P en $(\Omega, \mathcal{A})$ tal que para cada $A_1 \in \mathcal{A}_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}_n$,

$$P(A_1 \times \dots \times A_n \times \Omega_{n+1} \times \dots) = P_1(A_1) \cdots P_n(A_n).$$

IV: TH. RADÓN - NIKODYM

• El Th de la Carga nos decía que sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, si $f \geq 0$, entonces $\lambda(A) := \int_A f \, d\mu$ es una medida en $(\Omega, \mathcal{A})$; y $\lambda << \mu$. El Th Radón-Nikodym nos dará el recíproco: si λ, μ dos medidas, y $\lambda << \mu \Rightarrow$ "$\exists f$" $: \lambda = \int f$.

<u>Definición</u>: Sea λ una carga sobre $(\Omega, \mathcal{A})$. Se dice que un conjunto $P \in \mathcal{A}$ es <u>positivo</u> si $\forall E \subset P$ medible $\lambda(E) \geq 0$; y que $N \in \mathcal{A}$ es <u>negativo</u> si $\forall E \subset N$ medible $\lambda(E) \leq 0$.

<u>Proposición</u>: $P_n \in \mathcal{A}$ son positivos $\Longrightarrow \bigcup P_n$ es positivo.

<u>Lema I</u>: Sea λ una carga en $(\Omega, \mathcal{A})$ y $A \in \mathcal{A} : \lambda(A) > -\infty$. Entonces, $\forall \varepsilon > 0$ $\exists B \subset A$ medible $: \lambda(B) \geq \lambda(A)$ y $\forall E \subset B$ medible $\lambda(E) \geq -\varepsilon$.

<u>Lema II</u>: Sea λ una carga en $(\Omega, \mathcal{A})$, con $\lambda(\Omega) < \infty$. Entonces, $\forall A \in \mathcal{A} :$ $\lambda(A) > -\infty$ $\exists P \in \mathcal{A}$ positivo $: P \subset A$ y $\lambda(P) \geq \lambda(A)$.

<u>Definición</u>: Una <u>descomposición de Hahn</u> de una carga λ en $(\Omega, \mathcal{A})$ es una partición de Ω en $P, N = P^c \in \mathcal{A}$, con P positivo y N negativo.

<u>Teorema</u> (de descomposición de Hahn): Toda carga λ posee una descomposición de Hahn.

Proposición: Sea P, N una desc. de Hahn de λ en $(\Omega, \mathcal{A})$; y sean $E \subset B$ medibles.

1) $\lambda(B \cap N) \leq \lambda(E \cap N) \leq \lambda(E) \leq \lambda(E \cap P) \leq \lambda(B \cap P)$.

2) $\lambda(B \cap P) = \max \{ \lambda(E) : E \subset B \text{ medibles} \}$

$\lambda(B \cap N) = \min \{ \lambda(E) : E \subset B \text{ medibles} \}$,

lo cual en particular dice que $\lambda(P) = \lambda(\Omega \cap P)$ es el máximo de λ, y $\lambda(N) = \lambda(\Omega \cap N)$ el mínimo de λ.

3) Si P', N' es otra desc. de Hahn, $\lambda(E \cap N) = \lambda(E \cap N')$ y $\lambda(E \cap P) = \lambda(E \cap P')$.

Corolario: Si $\lambda : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{R}$ es una carga $\Rightarrow \lambda$ es acotada.

• Denotaremos como $\mathcal{M}(\mathcal{A}, \mathbb{R}) := \{ \lambda : \mathcal{A} \to \mathbb{R} \text{ carga} \}$ al conjunto de cargas finitas ó medidas reales.

Definición: Se dice que dos cargas λ_1, λ_2 en $(\Omega, \mathcal{A})$ son mutuamente singulares, $\lambda_1 \perp \lambda_2$, si $\exists A \in \mathcal{A} : \forall E \in \mathcal{A}$, $\lambda_1(E) = \lambda_1(E \cap A)$ y $\lambda_2(E) = \lambda_2(E \cap A^c)$.

• Es decir, que cada una está concentrada en una región: λ_1 vale 0 en A^c y λ_2 0 en A.

Teorema (de descomposición de Jordan): Toda carga λ en $(\Omega, \mathcal{A})$ verifica que

$$\lambda^+(B) := \sup \{ \lambda(E) : E \subset B \text{ medible} \} \; (= \lambda(B \cap P))$$

$$\lambda^-(B) := -\inf \{ \lambda(E) : E \subset B \text{ medible} \} \; (= -\lambda(B \cap N))$$

son medidas, $\lambda = \lambda^+ - \lambda^-$, una de ellas es finita, son mutuamente singulares y es la única descomposición de λ como diferencia de dos medidas mutuamente singulares.

Definición: Llamamos <u>variación</u> de una carga λ a $|\lambda| := \lambda^+ + \lambda^-$, y <u>variación total</u> de λ a $|\lambda|(\Omega) \overset{\text{NOT}}{=} \|\lambda\|$ (pues será una norma en $\mathcal{M}(\mathcal{A},\mathbb{R})$).

Proposición: Sean λ, λ_1, λ_2 cargas.

1) $|\lambda(A)| \leq |\lambda|(A)$; y $|\lambda|$ es la medida más pequeña que verifica la desigualdad.

2) $|\lambda_1 + \lambda_2| \leq |\lambda_1| + |\lambda_2|$

3) $|\lambda|(A) = \sup \{ \sum_{i=1}^{n} |\lambda(A_i)| : \sqcup A_i = A \}$

Definición: Un <u>espacio de Banach</u> es un espacio vectorial <u>normado</u> $(E, \|\cdot\|)$ <u>completo</u>. (ie, Cauchy $\Rightarrow$ Convergente).

- Hilbert $\Rightarrow$ Banach

Teorema: $(\mathcal{M}(\mathcal{A},\mathbb{R}), \|\cdot\|)$, $\|\lambda\| = |\lambda|(\Omega)$, es un espacio de Banach.

Teorema (Radón-Nikodym): Sean λ y μ medidas σ-finitas en $(\Omega, \mathcal{A})$.

$$\lambda << \mu \iff \overset{\bullet}{\exists} (c.s.\ \mu) \text{ función } f \geq 0 : \lambda(A) = \int_A f \, d\mu \quad \forall A \in \mathcal{A}.$$

Teorema (de descomposición de Lebesgue): Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida, y λ una medida σ-finita. Entonces existe un único par de medidas λ_a y λ_s : $\lambda = \lambda_a + \lambda_s$, $\lambda_a << \mu$ y $\lambda_s \perp \mu$.

V : DIFERENCIACIÓN

• Si $T: E_k \longrightarrow E_n$ lineal, $T^*: E_n^* \longrightarrow E_k^*$; $T^*(\omega) := T \circ \omega$. Además, si $T \equiv A$, entonces $T^* \equiv A^t$.

• Si (E, g) es un $\mathbb{R}$-EV euclídeo, $E \overset{\phi}{\simeq} E^*$, $\phi(e') = g(e, e')$ = <u>polaridad de la métrica</u>.

Además $\begin{pmatrix} \text{matriz de} \\ \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{matriz} \\ \text{de} \\ g \end{pmatrix}$.

• Por tanto, dado $T: E_k \rightarrow E_n$, tenemos de forma natural un endomorfismo $T_k: E_k \longrightarrow E_k$, $T_k = \phi_k^{-1} T^* T$. Si las bases son ortonormales, $T_k \equiv A^t A$.

<u>Proposición</u>: Si $A \in \mathcal{M}_{n \times k}$, $A^t A \in \mathcal{M}_{k \times k}$ es semidefinida positiva, simétrica y todos sus autovalores son reales y ≥ 0.

<u>Definición</u>: Sea $T: E_k \rightarrow E_n$ lineal, y T_k definido como antes. Entonces llamamos

$$J(T) := \sqrt{\det T_k} = \sqrt{\det(A^t A)}$$

<u>Proposición</u>: Sea $T: E_k \rightarrow E_n$ lineal. Son equivalentes:

1) T inyectiva

2) T_k inyectiva

3) $J(T) > 0$

y en todo caso $k \leq n$

Teorema: Todo isomorfismo lineal $T:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es composición de isomorfismos de 3 tipos: 1)

a) $\begin{pmatrix} r & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$, $r \neq 0$. , b) $\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 0 & \cdots & 1 & \\ & & \vdots & & \vdots & \\ & & 1 & \cdots & 0 & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$, c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$

Teorema: Si $T:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es un endomorfismo, lleva Lebesgue-medibles en Lebesgue-medibles y

$$\boxed{m[T(E)] = |\det T| \cdot m[E]}$$

En particular si T es isomorfismo, los borelianos van a borelianos.

Corolario (Interpretación geométrica del det): El valor absoluto del determinante de un endomorfismo, es el factor por el que quedan multiplicados los volúmenes de los paralelepípedos; i.e., el n-volumen de la imagen del cubo unidad por T.

Lema: $F: U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ continua e inyectiva, U abierto. Entonces

$$E \in \mathcal{B}(U) \iff F(E) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n).$$

Teorema: Sea $T:\mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ lineal e inyectiva. Entonces $k \leq n$, $J(T) > 0$,
$E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^k) \Rightarrow T(E) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ y

$$\boxed{H_k[T(E)] = J(T) \cdot H_k[E]}$$

Teorema (de Cambio de Variable): Sea $F : U \subset \mathbb{R}^n \to V \subset \mathbb{R}^n$ un difeomorfismo de clase C^1 entre abiertos U, V. Entonces $\forall B \in \mathcal{B}(U)$

$$\boxed{m_n[F(B)] = \int_B |\det DF_x| \, dm_n}$$

En particular, si $g : V \to \mathbb{R}$ ≥ 0 ó integrable,

$$\boxed{\int_V g \, dm_n = \int_U (g \circ F) \, |\det DF_x| \, dm_n}$$

Teorema (tipo "Sard"): $F : U \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$, C^1 e inyectiva. Si $E := \{x \in U : J(DF_x) = 0\}$, entonces $H_k[F(E)] = 0$.

Teorema (Longitud de curvas y áreas de grafos): Sea $\sigma : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ una curva regular, y $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de clase C^1.

1) $$\boxed{\operatorname{long}(\sigma) = \int_I \|\sigma'(t)\|_2 \, dt}$$

2) $$\boxed{\operatorname{área}(Gr\, f) = \int_U \sqrt{1 + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\right)^2}}$$

Teorema (de Pappus de Alejandría): Sea A un boreliano del plano de área finita, C una curva en el plano de longitud finita; y supongamos que giran entorno a un eje que no les corta. Entonces

1) (Volumen de Revolución):

$$\boxed{\text{Vol. Rev.}(A) = 2\pi \cdot d(C[A], \text{eje}) \cdot m_2(A)}$$

2) (Área de Revolución):

$$\boxed{\text{Área Rev.}(C) = 2\pi \cdot d(C[C], \text{eje}) \cdot \mathcal{H}_1(C)}$$

• Si $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, $\dim_H A = n$ (es un trozo de plano (espacio...) con área (volumen) no nula y finita), entonces $C(A) = (x_1(C[A]), \dots, x_n(C[A]))$, donde

$$\boxed{x_i[C(A)] = \frac{\int_A x_i \, dm_n}{m_n(A)}}$$

• Si $C = \sigma(I)$ es una curva, $\dim_H C = 1$, $C[C] = (x_1(C[C]), \dots, x_n(C[C]))$,

$$\boxed{x_i[C(C)] = \frac{\int_C x_i \, dm_1}{\mathcal{H}_1(C)}}$$

Y recordar la integral curvilínea: $\int_C f = \int_I f(\sigma(t)) \cdot \|\sigma'(t)\| \, dt$.

3) (Minkowski): $f, g \in \mathcal{L}_p \Rightarrow f+g \in \mathcal{L}_p$ y

$$\boxed{\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p}$$

DESIGUALDAD DE MINKOWSKY

Corolario: $\mathcal{L}_p$, $1 \leq p \leq \infty$, es un esp. vect, y $\|\cdot\|_p$ es una seminorma.

- $\|f\|_p = 0 \Leftrightarrow f = 0$ c.s. $(p < \infty)$; $\|f\|_\infty = 0 \Rightarrow f = 0$ l.c.s.

Definición: Sean f, g medibles, y establecemos la siguiente rel. de equivalencia

$$f \sim g :\Leftrightarrow f = g \text{ l.c.s.} \quad (\Leftrightarrow \{f \neq g\} \text{ loc. nulo})$$

y aplicando esta relación en $\mathcal{L}_p$, llamamos $L_p := \mathcal{L}_p / \sim$.

- L_p es un EV (las opers están bien def).
- $\|f\|_p = 0 \Rightarrow f \sim 0 \Rightarrow f = 0$ l.c.s.

Proposición: Sean $f, g \in \mathcal{L}_p$, $1 \leq p < \infty$. Entonces

$$f = g \text{ c.s.} \Leftrightarrow f = g \text{ l.c.s.}$$

Proposición: $1 \leq p \leq \infty$, $f \sim g \Rightarrow \|f\|_p = \|g\|_p$

- En L_p se define $[f]+[g] := [f+g]$; $\alpha \cdot [f] = [\alpha f]$, y la prop. anterior dice que está bien definido $\|[f]\|_p := \|f\|_p$.

• $(\Omega = \{1,\dots,n\}, \mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega), \mu \equiv$ med. de contar$)$. $f:\Omega \to \mathbb{K} \equiv x = (x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{K}$.

Entonces $\|x\|_p = \sqrt[p]{\sum |x_i|^p}$, $\|x\|_\infty = \max |x_i|$, son normas en $\mathbb{K}^n$.

• $(\Omega = \mathbb{N}, \mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu \equiv$ med. de contar$)$. A L_p se le llama en este espacio $\underline{\ell_p}$.

$f:\mathbb{N} \to \mathbb{K} \equiv (x_n)$ sucesión p-sumable: $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty$. Entonces

$\|(x_n)\|_p = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{\infty} |x_n|^p}$, $\|(x_n)\|_\infty = \sup |x_i|$, son normas.

<u>Lema</u>: $(f_n) \subset \mathcal{L}_p$ Cauchy $\Rightarrow \exists (g_n) \subset (f_n)$ subsucesión convergente c.s. a una función medible.

<u>Teorema</u>: Para cada $1 \leq p \leq \infty$, $(L_p, \|\cdot\|_p)$ es un espacio de Banach.

<u>Proposición</u>: Sea $S = \{s:\Omega \to \mathbb{K}$ simples$\}$ y $\tilde{S} = \{s \in S : \mu\{s \neq 0\} < \infty\}$.

1) $S \subset L_\infty$ y es denso

2) $\tilde{S} \subset L_p$ y es denso $(p < \infty)$