

FRACTALES

Definición (Provisional): Un fractal es una estructura autosimilar que se consigue mediante iteración retroalimentada de escala.

- Dada una estructura inicial, se le aplica un cierto operador L , que convierte la estructura en otra cuyas partes son similares a la original. Sobre cada una de sus partes se le aplica L , y así sucesivamente.
- "Autosimilar" indica que partes de la estructura son semejantes a toda, y "de escala" que multiplicado por un cierto factor una parte se obtiene la original.
- Tenemos dos tipos de autosimilitud: estricta cuando esas partes son (solo un factor de prop.) idénticas a la original, y estadísticas cuando son parecidas (ej.: ramos de un árbol, helecho, río, pulmón, brécol romano...)

Definición: Una fotocopiadora reductora múltiple (FRM) es un "operador" que transforma un objeto en otro aplicando un cierto algoritmo. "Donde" se realiza dicho algoritmo se dice unidad procesadora, y "gracia" de los órdenes unidad de control. Tal operador consiste en reducir el tamaño del objeto y poner varias copias.

Definición (Fractal, 1): Un fractal es el límite del sistema dinámico definido por la aplicación iterativa y retroalimentada de una FRM.

Definición: Llamamos transformaciones de semejanza a las dilataciones, reflexiones, rotaciones, traslaciones y composiciones de ellas.

Definición: Un operador de Hutchinson es una aplicación entre subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ que es unión de las imágenes de un subconjunto por transformaciones de semejanza:

$$W: \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$$

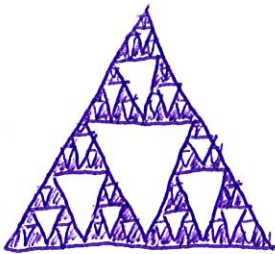
$$A \longmapsto W(A) := w_1(A) \cup \dots \cup w_k(A),$$

donde cada w_i es una transformaci3n de semejanza. Al conjunto $W(A)$ se le llama huelle del operador.

Definici3n (Fractal, 2): Un fractal es el l3mite del sistema dinámico definido por las aplicaciones iterativas y retráctiles de un operador de Hutchinson. A esta aplicaci3n iterativa tambi3n se le llama sistema de funciones iteradas (SFI).

Ejemplos:

1)



Triángulo de Sierpinski

Proo. A un triángulo  se le quita la parte central , y a cada uno de los 3 triángulos resultantes se le quita el triáng. central, y sucesivamente.

1. L3mite de la FRA  $\rightarrow$ , que encoje y triplica.

2. L3mite del operador de Hutchinson $W(A) = w_1(A) \cup w_2(A) \cup w_3(A)$,

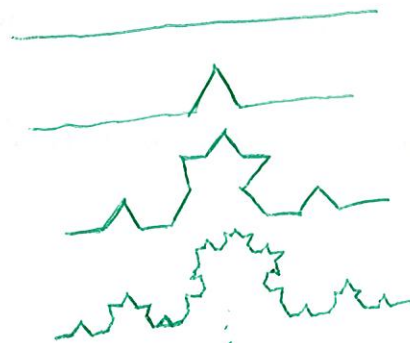
donde $A = \triangle$ y $\begin{cases} w_1 = \text{dilataci3n de ratio } \frac{1}{2}, \\ w_2 = \text{ " " " } \circ \text{ traslaci3n de } (\frac{1}{2}, 0) \\ w_3 = \text{ " " " } \circ \text{ " " " } (\frac{1}{4}, \frac{1}{2}). \end{cases}$

2)



Conjunto de Cantor

3)



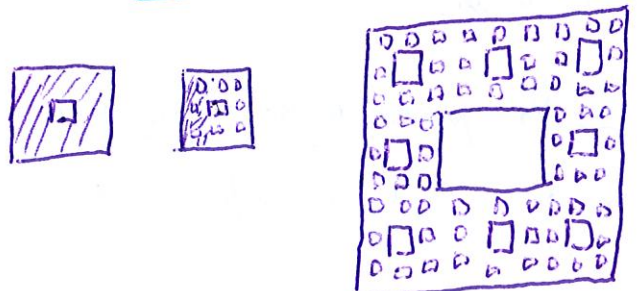
Curva de Koch

4)



Logo (o isla) de Koch

5)



Alfombra de Sierpinski

• Dado un fractal K definido por un operador de Hutchinson W_K , y claro, por construcción, que K será la única estructura que es invariante mediante el operador W_K . Esta es otra forma de definir fractales (pero concretos). Se dice que K es el atractor de W_K .

• Por una trf. de hnt. deben obtenerse nuevas figuras auto semejantes, pero las transform. de regiones conservan la "forma" de la figura original. Por eso el límite (el fractal) que es auto semejante.

Ej: Triángulo de Sierpinski S : def:

- 1) S la única figura de $\mathbb{R}^2$: $S = W(S)$, donde W def por auto.
- 2) $S := \lim_{n \rightarrow \infty} A_n$, donde $A_{n+1} := W(A_n)$, y $A_0 = \text{triángulo}$.

Nota: El resultado del fractal, en realidad, no depende del conjunto inicial. En el límite coinciden todos. Por eso se dice que es el atractor.

• Hay fractales que se pueden formar mediante operadores de Hutchinson pero usando afinidades ("transform. afines") en lugar de transform. de similitud. Esto no conserva la forma de las figuras, pero (Th. Fud. Gen. Aff.) tienen rectos en rectos.

Ej: Laberinto de Cantor, Lado de Borsky.

(Un poco de rigor)

Definición: Sea (X, d) un esp. métrico completo. Para cada conjunto $A \subset X$ y $\varepsilon > 0$, se llama ε -cubierta de A a

$$A_\varepsilon := \{x \in X : d(x, A) \leq \varepsilon\}.$$

Definición: Sea $A, B \subseteq X$ compactos. Se llama distancia de Hausdorff de A a B a

$$h(A, B) := \inf \{ \varepsilon > 0 : A \subset B_\varepsilon \text{ y } B \subset A_\varepsilon \}.$$

Propiedad: Sea W un operador de Hutchinson contractivo, i.e., $h(W(A), W(B)) \leq c \cdot h(A, B)$, $0 \leq c < 1$.

Entonces el límite (atractor) por tal transform. existe, es único, y es invariante por tal transform.

Proposición: Si (X, d) es un espacio métrico completo $\rightarrow (C, h)$ es un espacio ultramétrico; donde

$C := \{A \subseteq X \text{ compactos} \mid A \subseteq P(X)\}$, h es la distancia de Hausdorff.

• Esta prop. formaliza el concepto de $\dim_{\text{An}}$.

DIMENSIÓN FRACTAL

• Hablaremos sobre 3 tipos distintos de dimensión (3 interpretaciones de lo mismo matemático): dim de copias, de autosimilitud y de recuento por cajas.

Definición: Supongamos una estructura autosimilar por la que, midiendo su "longitud" con una regla o copias de tamaño S , necesitamos N copias de la regla (o copias). Diremos que la dimensión de copias de tal estructura es D_c si $N = S^{-D_c}$ (o $N \sim S^{-D_c}$, "del orden").

• Para una figura que es estadísticamente autosimilar, se toman una serie de S 's y se registra el valor $N(S)$ (o $L(S)$). Al ser autosimilar, se espera una ley de tipo exponencial. Se registra $\log S^{-1}$ frente $\log N$ (o $\log L$).

• Se traza la recta que mejor ajuste. Esa es D (o $D-1$), pero

$$\log N \sim D \cdot \log S^{-1} = \log S^{-D} \Rightarrow N \sim S^{-D}$$

$$\log L \sim (D-1) \log S^{-1} = \log S^{1-D} \Rightarrow L = N \cdot S \sim S^{1-D} \Rightarrow N \sim S^{-D}$$

• Ej: $\dim_{\text{copias}}$ curva de Koch = $\frac{\log 4}{\log 3} = \log_3 4$.

Definición: Supongamos una estructura autosimilar por la que, aplicando un factor de reducción $0 < S < 1$, se necesitan N copias de la figura reducida para recuperar la original. Se llama dimensión de autosimilitud al número D_s tal que $N = S^{-D_s}$.

• Para estructuras no fractales, $D_c \neq D_s$ es la versión de dimensión entera usual. En particular, tales definiciones vienen inspiradas de ahí.

$$D_c = \frac{\log N}{\log \frac{1}{s}}$$

$$D_s = \frac{\log N}{\log \frac{1}{s}}$$

• Observar que ambos denominadores de los cocientes, ¡ por supuesto es lo mismo!

Ejemplos:

- 1) Triáng. de Sierp. : Se reduce el tamaño a la mitad ($s = \frac{1}{2}$) y se muestran 3 copias : $D = \frac{\log 3}{\log 2} = \log_2 3$.
- 2) Conj. de Cantor : " " " " en 3 parts ($s = \frac{1}{3}$) " " " " 2 " : $D = \frac{\log 2}{\log 3} = \log_3 2$.
- 3) Alfombrina de Sierp. : " " " " en un factor $s = \frac{1}{3}$, y se muestran 8 copias : $D = \frac{\log 8}{\log 3} = \log_3 8$.

Definición : Consideremos una estructura autosimilar, y encajémosla en un rectángulo, el cual tracemos en cuadrados de tamaño S . Sea N el número de cuadrados que cubren a la estructura. Se llama dimensión de recuento por cajas al número D_B tal que $N \sim S^{-D_B}$.

• Si una estructura sigue una ley potencial de recuento por cajas (o copias), se espera que sea autosimilar, pero indica que se ha repetido el mismo proceso iterativo a todas las escalas. Esto se ve representado en $\log \frac{1}{s}$ vs. $\log N$, y por lo tanto la interpolación es una recta.

Nota : ¡OJO! Con la dim. de autosimilitud. Si la figura se superpone puede dar valores extraños (p.ej., > 2 en el plano). Con la de recuento por caja describe esto con precisión.

• Con un frontal aleatorio (p.ej., la isla de Koch para que los "píxeles" puedan ir bien entre o hacia abajo) la dimensión de cajas o copias será exactamente la misma, ¡ se pegan los mismos cajas/copias que en la estructura original en la fase original! Aquí no se puede hablar de autosimilitud, debido solo por exactos.

Mecanismos independientes de la escala dan lugar a estructuras autosimilares, y siguen una ley potencial $N \sim S^{-D}$.

AUTÓMATAS CELULARES

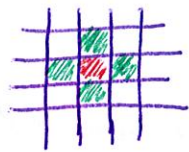
Definición: Un autómata finito de p estados es un sistema (individuo) que adopta un número finito p de estados z en el que su futuro está determinado por su estado actual z y por las señales externas que le afectan.

Definición: Un autómata celular es un conjunto de autómatas finitos en los que el estado actual de cada uno de ellos afecta a sus vecinos, i.e., el estado de cada autómata z y la señal externa que afecta a otros autómatas. Una vecindad es el conjunto de autómatas que afectan a uno dado. Cada miembro es un vecino.

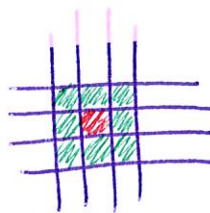
Los autómatas celulares se definen en redes discretas: una fila de cuadrados $\dots \boxed{} \boxed{} \boxed{} \boxed{} \boxed{} \dots$ en el caso 1-dim o con cuadrículas $\begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}$ en el 2-dim.

La evolución en el tiempo es discreta, y las reglas son deterministas.

Definición: En el caso 2-dim definimos dos tipos de vecindades:



Vecindad de Von Neumann



Vecindad de Moore

■ : Yo

■ : Vecinos

En una red finita (i.e., un autómata celular formado por finitos autómatas) se pueden tomar los vecindades tipo toro (identificando los extremos) o tipo absorbente (completando con 0's).

Definición: Un autómata de Wolfram es un autómata celular unidimensional booleano (i.e., cada autómata solo posee 2 estados) y con vecinos simétricos (el de su izquierda y su derecha). A cada uno de los dos estados lo denotaremos con un 1 ó un 0.

Una regla queda determinada en cuanto se dice cuál será el futuro de un autómata dado un estado z y el de sus vecinos. Ahora, hay 8 estados posibles, $\boxed{a|b|c}$, con $a, b, c = 0 \text{ ó } 1$; y cada uno de ellos puede dar lugar a 2: que b se convierta en 0 ó 1. Total: $2^8 = 256$ diferentes reglas.

- ¿Cómo llevar a cada uno de sus reglas? Por binario: cada uno de los diferentes 8 estados se codifica con potencias $2^0, 2^1, \dots, 2^7$; y cada estado 0 o 1 con 0 o 1.

(0,0,0)	(0,0,1)	(0,1,0)	(0,1,1)	(1,0,0)	(1,0,1)	(1,1,0)	(1,1,1)
2^0	2^1	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6	2^7

Si un estado da lugar a 0, etc. no aparece ($0 \cdot 2^i$); y si da lugar a 1 sí aparece ($1 \cdot 2^i$).

Ej: La regla 45 $\rightarrow 00101101_2$, i.e., $(000) \rightarrow 1$; $(001) \rightarrow 0$, ...

- En los autómatos 1-dim, se suele poder iterar en una línea inferior, y la siguiente es Δt_0 , y se muestran todos los estados ($t=0, 1, 2, \dots$).

- Los autómatas celulares son notas caóticas: una mínima variación en las c.i. (en $t=0$) puede dar lugar a un resultado completamente distinto.

- En autómatas 2-dim, con vecindad de Moore (p.ej.), hay 2^9 situaciones posibles para que esté vivo y sus vecinos. Si cada uno puede dar lugar a 0, 1; entonces hay un conjunto de 2^{2^9} reglas. $11!! \approx 10^{157}$.

Una de sus 2^{2^9} reglas es la

Definición: Se llama juego de la vida al autómata celular 2-dim ^{basilario} con vecindad de Moore regido por las sig. reglas.

- Toda célula (autómata finito) puede tener dos estados: viva (1) o muerta.
- Una célula muerta (autómata en 0) cobrará vida en $t+1 \iff \geq 3$ vecinos vivos en t .
- Una célula viva morirá en $t+1$ si en t tiene ≤ 1 vecino (por soledad), o ≥ 4 (por sobrepoblación).

o otro caso la célula mantiene su estado. Estas reglas se suelen recordar con S23/B3: una célula sobrevive si tiene 2 o 3 vecinos vivos; y una muerta nace si tiene 3 vivos.

 es un punto fijo en el juego de la vida.

Mediante aproximación, en EDDP (p.ej. la ec. de difusión $\frac{\partial c}{\partial t} = D \nabla^2 c$) se pueden estudiar mediante métodos numéricos y autómatas celulares.

Definición: Un medio excitable es un medio que propaga ondas de algún tipo pero que son refractorias durante un cierto tiempo al paso de una onda tras haber sufrido anteriormente el paso de otra.

Ej: incendios, molis, químicos, tejido neuronal o cardíaco,...

Definición: Un autómata de Greenberg-Mastings es un autómata celular 2-dim regido por las ej. como:

- i) Las células pueden estar bien en uno de los $E \in \mathbb{N}$ estados excitados (estados $s=1,2,\dots,1E$) o en uno de los R estados refractorios ($s=-R, -R+1, \dots, -1$); o en el estado de reposo $s=0$.
- ii) Si una célula está en estado $s \neq 0$, incrementa su estado en 1. Si alcanza el estado E , el siguiente que tendrá es el $-R$.
- iii) Una célula en reposo $s=0$ se excita si tiene $T \in \mathbb{N}$ vecinos excitados.

Homología del tema: Reglas simples pueden conducir a comportamientos complejos.

II: SISTEMAS DINÁMICOS CONTINUOS

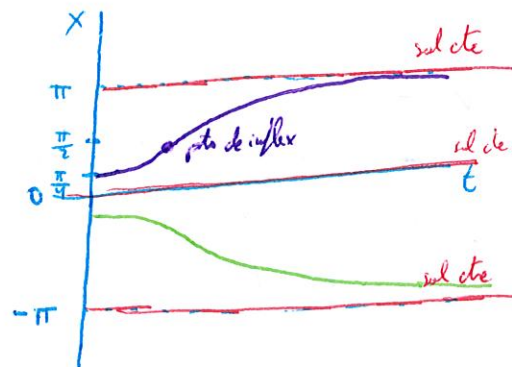
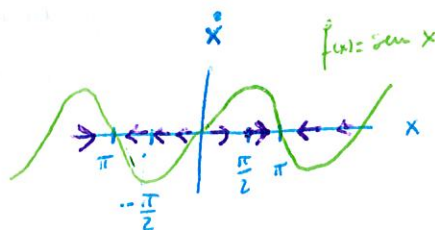
• Toda ecuación diferencial de orden n puede convertirse en un sistema de ecuaciones diferenciales ^{(n+1)-dim} continuos de orden 1: dado $x^{(n)} = f(t, x, x', \dots, x^{(n-1)})$, definimos

$$\left. \begin{array}{l} x_1 := x \\ x_2 := x' (= x_1') \\ x_3 := x'' (= x_2') \\ \vdots \\ x_n := x^{(n-1)} (= x_{n-1}') \\ f(t, x_1, \dots, x_n) := x^{(n)} (= x_n') \\ x_{n+1} = t \end{array} \right\} \quad x^{(n)} = f(t, x, x', \dots, x^{(n-1)}) \equiv \begin{cases} x_1' = x_2 \\ \vdots \\ x_n' = x_{n+1} \\ x_{n+1}' = f(x_{n+1}, x_1, \dots, x_n) \end{cases}$$

• Por tanto, basta estudiar los st. continuos. La derivada resp. a t , en adelante, la denotaremos por $\dot{}$.

• La resolución analítica de ED es muy poco tenera. Para saber el comportamiento cualitativo puede hacerse feasible, puede hacerse un estudio cualitativo: dado $\dot{x} = f(x)$, y una sol x ,

- Si $f(x) > 0 \Rightarrow x$ es ^{estríc.} creciente
- Si $f(x) < 0 \Rightarrow x$ es ^{estríc.} decreciente
- Si $f(x) = 0 \Rightarrow x$ es cte.
- Si $f'(x) = 0 \Rightarrow x$ tiene un pto de inflexión



Definición: Dado $\dot{x} = f(x)$, se dice que $x^* \in \mathbb{R}$ es un punto fijo o punto de equilibrio si $f(x^*) = 0$.

Definición: Un punto de equilibrio se dice estable si toda perturbación cercana al desaparece en el tiempo. Diremos que es inestable si las perturbaciones crecen en el tiempo.

• Esto es: si x^* estable, toda solución que comience en $x^* + \epsilon$ (ϵ pequeño) tenderá a x^* . Si es inestable, se separará de él.

Definición: Llamamos diagrama de fases a la gráfica de f junto al campo de vectores directos, el campo de vectores en el eje x $\{f(x)\}_{x \in \mathbb{R}}$ (i.e. en cada pto del eje x se pone un flechito a la derecha si $f(x) > 0$ y a la izquierda si $f(x) < 0$). En inglés: diagrama de fases $\equiv$ phase portrait.

Proposición: Sea $\dot{x} = f(x)$, y sea x^* un pto de equilibrio.

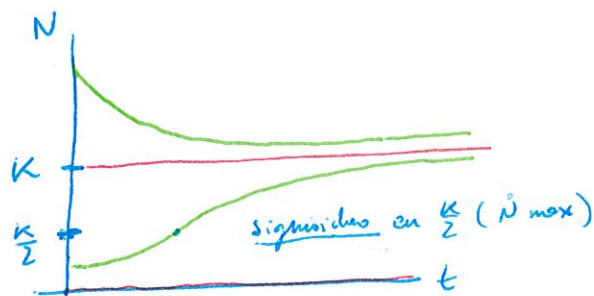
- 1) $f(x^*) < 0 \Rightarrow x^*$ es un pto estable
- 2) $f(x^*) > 0 \Rightarrow x^*$ es un pto inestable.
- 3) $f(x^*) = 0$ no hay criterio general, puede pasar de todo! Hay que dibujar $f(x)$ y analizar el diagrama de fases.

• Un pto puede ser semi-estable si el campo $\dot{x}$ es el mismo sentido a la derecha e izquierda del pto fijo.

• La ecuación logística (o de Verhulst): El crecimiento poblacional viene determinado por la ec. dif

$$\dot{N} = rN \left(1 - \frac{N}{K}\right)$$

- $r > 0$ define la tasa de creciento (es proporcional al nº de individuos)
- $K > 0$ es la capacidad de carga del ecosistema. mide la competencia por los recursos que hay. Si $N > K$, entonces la población disminuye por la escasez de recursos.



$$\lim_{t \rightarrow \infty} N(t) = K.$$

Solución exacta: si $N(0) = N_0$,

$$N(t) = \frac{K}{1 + \left(\frac{K}{N_0} - 1\right) e^{-rt}}$$

Definición: Sea $\varepsilon > 0$ y consideres la ec. dif $\dot{x} = f(x)$. Llamos campo vectorial de pendientes (CVP)

a la representación en el plano t, x ($\mathbb{R}^2$) del campo tangente $D = \{D_{(t,x)} = (\varepsilon, f(x) \cdot \varepsilon)\}_{(t,x) \in \mathbb{R}^2}$.

(Es claro que $D_{(t,x)}$ es igual a toda una recta horizontal, a x fijo).

Llamos campo vectorial de trayectorias (CVT) a la representación de las trayectorias solución en el plano.

Las trayectorias deben de ser tangentes al campo en todo pto, por def. de solución.

BIFURCACIONES EN SISTEMAS 1-DIM

Se quiere estudiar cómo un sistema definido por 1 ED varía en su comportamiento dependiendo de 1 (o más) parámetro.

Para ciertos valores del parámetro se producen cambios bruscos, de ahí el nombre de bifurcación.

Consideremos una ED $\dot{x} = f(r, x)$, dependiente de un parámetro $r \in \mathbb{R}$. Si x^* es un pto fijo, tenemos $0 = f(r, x^*)$.

Definición: Se llama diagrama de bifurcación al plano r, x^* ($\mathbb{R}^2$) junto con la gráfica de la ecu $f(r, x^*) = 0$.

El pto (r_c, x_c^*) que hace que varíe el comportamiento se le llama punto de bifurcación o punto crítico.

En las ramas de $f(r, x^*) = 0$ se distingue trazo continuo si el pto fijo es estable y discontinuo si es inestable.

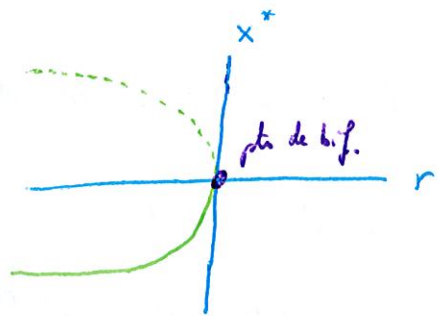
Si x^* se puede expresar en función de r tenemos una rama (o ramas), $x^*(r) = g(r)$. Si no por $f(r, x^*) = 0$.

Veamos los tipos:

1) Bifurcación silla-nudo:

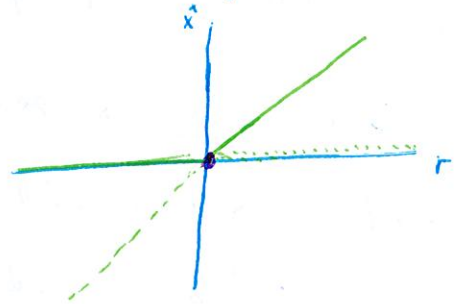
$$\boxed{\dot{x} = r + x^2}$$

(ec. reducida)



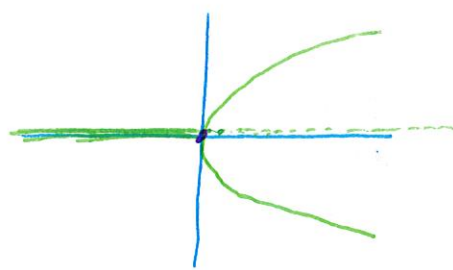
2) Bifurcación transcritical:

$$\boxed{\dot{x} = rx - x^2}$$



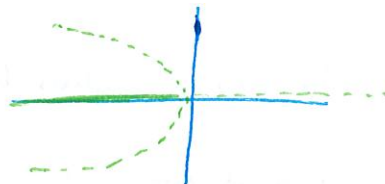
3) Bifurcación pitchfork supercrítica:

$$\boxed{\dot{x} = rx - x^3}$$



4) Bifurcación pitchfork subcrítica :

$$\dot{x} = rx + x^3$$



o Se le pueden añadir más parámetros, y se hace una caricatura grande.

CLASIFICACIÓN DE SISTEMAS LINEALES 2-DIM

• Trabajos con sist. de ED de 2 vars, grado 1 y lineales:

$$\begin{cases} \dot{x} = ax + by \\ \dot{y} = cx + dy \end{cases} \equiv \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{si es} \\ \text{lineal} \end{array} \right. \quad \begin{cases} \dot{x} = f_1(x,y) \\ \dot{y} = f_2(x,y) \end{cases}$$

Definición: Llamamos espacio de fase al plano xy ($\mathbb{R}^2$), y diagrama de fase al espacio de fase junto con las trayectorias solución de la ED.

Llamamos campo vectorial de direcciones (CVD) al espacio de fase donde se representa el campo tangente

$$D = \{ D_{(x,y)} = (\varepsilon \cdot f_1(x,y), \varepsilon \cdot f_2(x,y)) \}_{(x,y) \in \mathbb{R}^2}, \quad \varepsilon = \text{h.j.}$$

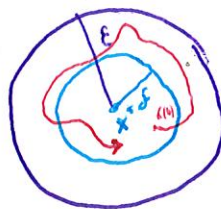
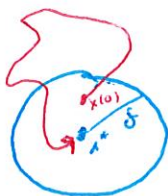
Definición: Sea x^* un punto fijo del sistema $\dot{x} = f(x)$

a) Se dice que x^* es atractivo si $\exists \delta > 0$: $\forall x(0) \text{ tal que } \|x(0) - x^*\| < \delta \Rightarrow x(t) \rightarrow x^* \text{ cuando } t \rightarrow \infty$.

En otras palabras: toda trayectoria que empiece a distancia $< \delta$ de x^* convergerá a x^* .

b) Se dice que x^* es estable (más preciso, Lyapunov estable) si $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$: $\forall x(t) \text{ trayect.}$

t.q. $\|x(0) - x^*\| < \delta \Rightarrow \|x(t) - x^*\| < \varepsilon \quad (t \geq 0)$. En otras palabras: toda trayectoria que empiece a distancia $< \delta$ de x^* permanece a distancia $< \varepsilon$ de x^* .



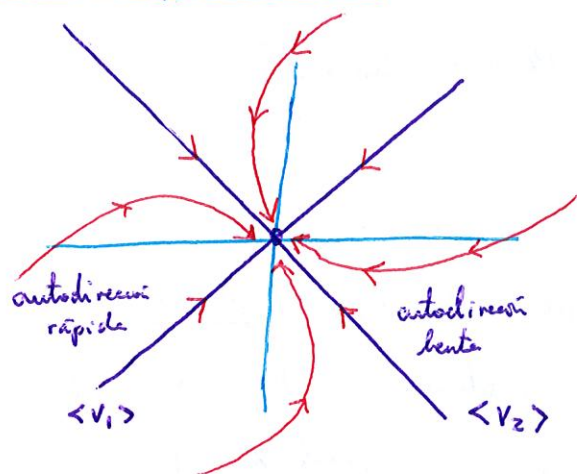
c) Decir que $\dot{x}^*$ es asintóticamente estable si es atractivo y estable.

Teorema (de Clasificación): Sea $\dot{x} = Ax$ un sistema de EDO lineal de dim 2, y sean λ_1, λ_2 los autovalores de A (= raíces de la ec. char). Entonces el sistema es de uno de los siguientes tipos:

Caso I: A tiene dos autovalores reales y distintos, $\lambda_1 \neq \lambda_2$ y $\lambda_i \in \mathbb{R}$.

A es diagonalizable y $\exists v_1, v_2$ autovectores l.i., de autovalores λ_1 y λ_2 , resp.

Caso I.1: $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$: Nodo estable $((0,0))$

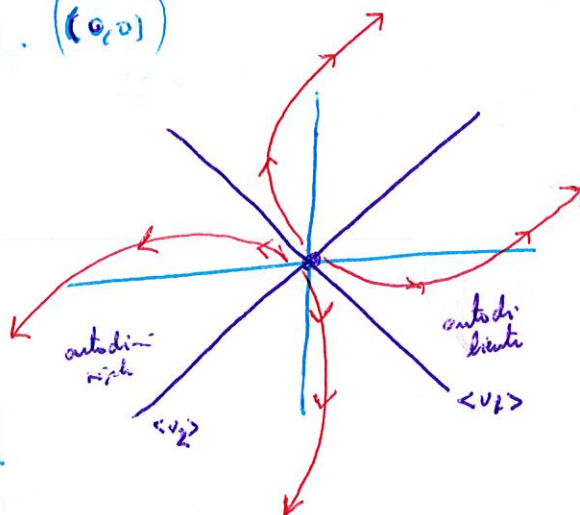


Los solns son de la forma

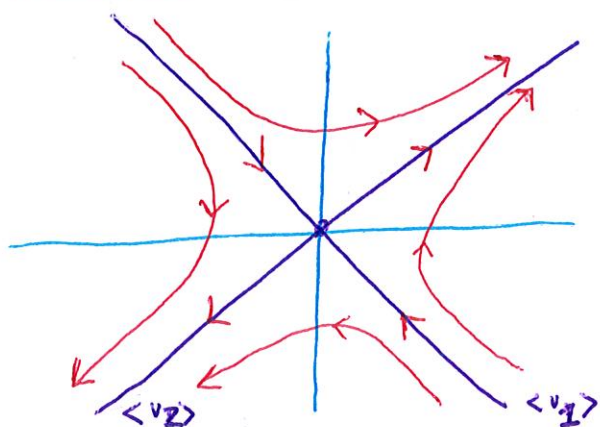
$$x(t) = c_1 \vec{v}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 \vec{v}_2 e^{\lambda_2 t}$$

Como $\lambda_1 < \lambda_2$, $e^{\lambda_1 t} \rightarrow 0$ más rápidamente que $e^{\lambda_2 t} \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$, por lo que prevalece la componente v_1 , más rápida (por eso se llama a la "lenta").

Caso I.2: $0 < \lambda_1 < \lambda_2$: Nodo inestable $((0,0))$



Caso I.3: $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$: Punto de silla



Los solns son

$$x(t) = c_1 \vec{v}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 \vec{v}_2 e^{\lambda_2 t}$$

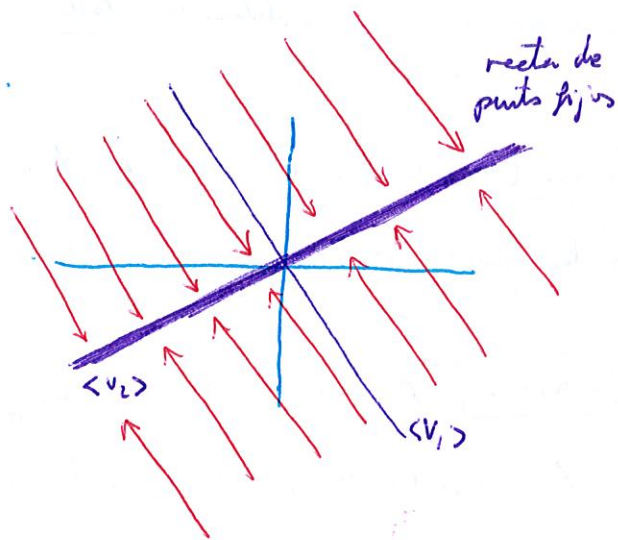
Cuando $t \rightarrow \infty$, $e^{\lambda_1 t} \rightarrow 0$ mientras que $e^{\lambda_2 t} \rightarrow \infty$.
Traza la trayectoria v_2 .

Caso I.4 : $\lambda_1 < 0 = \lambda_2$: Punto "atrasado".

La sol son

$$x(t) = c_1 v_1 e^{\lambda_1 t} + \underbrace{c_2 v_2}_{\text{este componente es cte.}} e^{0 \cdot t}$$

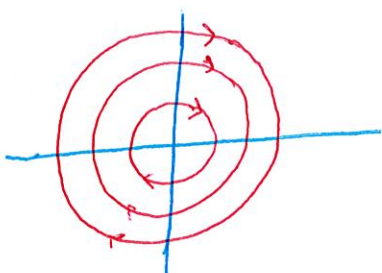
(Si $\lambda_1 > 0$ sería)



Caso II : Raíces complejas-conjugadas $\lambda_1, \lambda_2 = \alpha \pm i\beta$.

Si v_1 es un autovector de autovalor λ_1 , des. sol. L.I. son $\operatorname{Re} v_1 e^{\lambda_1 t}$, $\operatorname{Im} v_1 e^{\lambda_1 t}$.

Caso II.1 : $\lambda_{1,2} = \pm i\beta$: Centro.



- La sol es un folleto de sen y cos ; periódica.

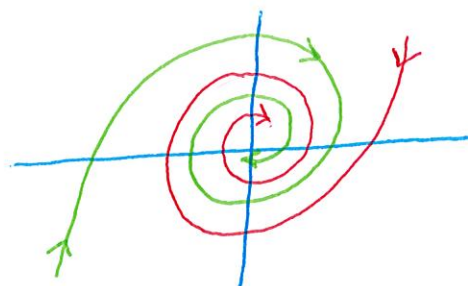
-- El sentido de giro se determina mirando la cc, en los ejes (haciendo $x=0$ o $y=0$ y viendo el signo de $\dot{x}$ o $\dot{y}$, resp.)

Caso II.2 : $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, $\alpha < 0$: Espiral estable.

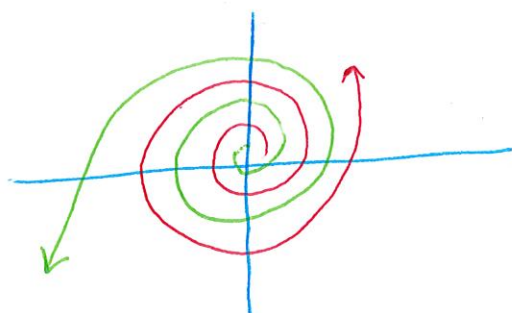
La sol es

$$x(t) = e^{\alpha t} (\text{folleto de sen y cos})$$

$\downarrow$
o si $t \rightarrow \infty$



Caso II.3 : $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, $\alpha > 0$: Espiral inestable.



La sol es

$$x(t) = e^{\alpha t} (\text{folleto de sen y cos})$$

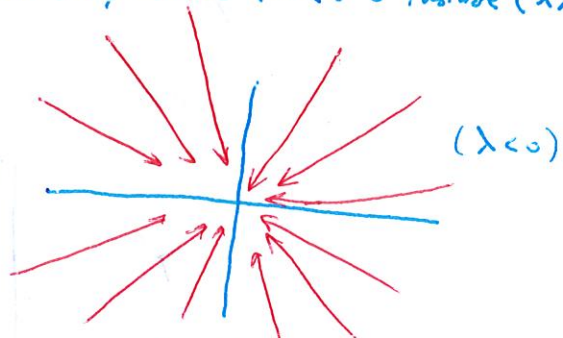
$\downarrow$
o si $t \rightarrow \infty$

Caso III : Raíces (reales e) iguales : $\lambda_1 = \lambda_2 (= \lambda)$

Caso III.1 : A diagonalizable : Nudo radial o estrella; estable ($\lambda < 0$) o inestable ($\lambda > 0$)

Si A diag. $\exists v_1, v_2$ L.I. autovectores de λ , luego en una base la matriz $(^A_x) = \lambda Id$, luego también en toda base : $P \lambda Id P^{-1} = \lambda Id$. El sistema es

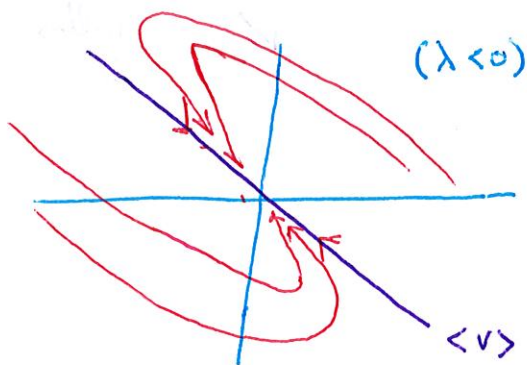
$$\begin{cases} \dot{x} = \lambda x \\ \dot{y} = \lambda y \end{cases} \quad \text{Es el caso desacoplado}$$



La solución es

- Si $\lambda = 0$, entonces $A = 0$ y todo punto es un punto fijo. $x(t) = c_1 e_1 e^{\lambda t} + c_2 e_2 e^{\lambda t} = \underbrace{\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}}_{\text{vector } c} e^{\lambda t}$

Caso III.2 : A no diagonalizable, $\lambda \neq 0$: Nudo degenerado; estable ($\lambda < 0$) o inestable ($\lambda > 0$)

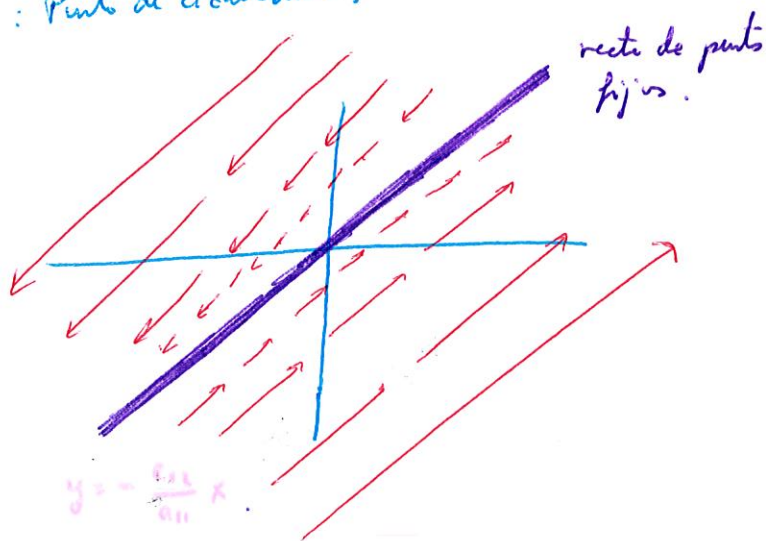


La solución es

$$x(t) = c_1 v e^{\lambda t} + c_2 (w + vt) e^{\lambda t},$$

donde v es un autovector de A asociado a λ , (w otro vector).

Caso III.3 : A no diagonalizable, $\lambda = 0$: Punto de silla o silla.



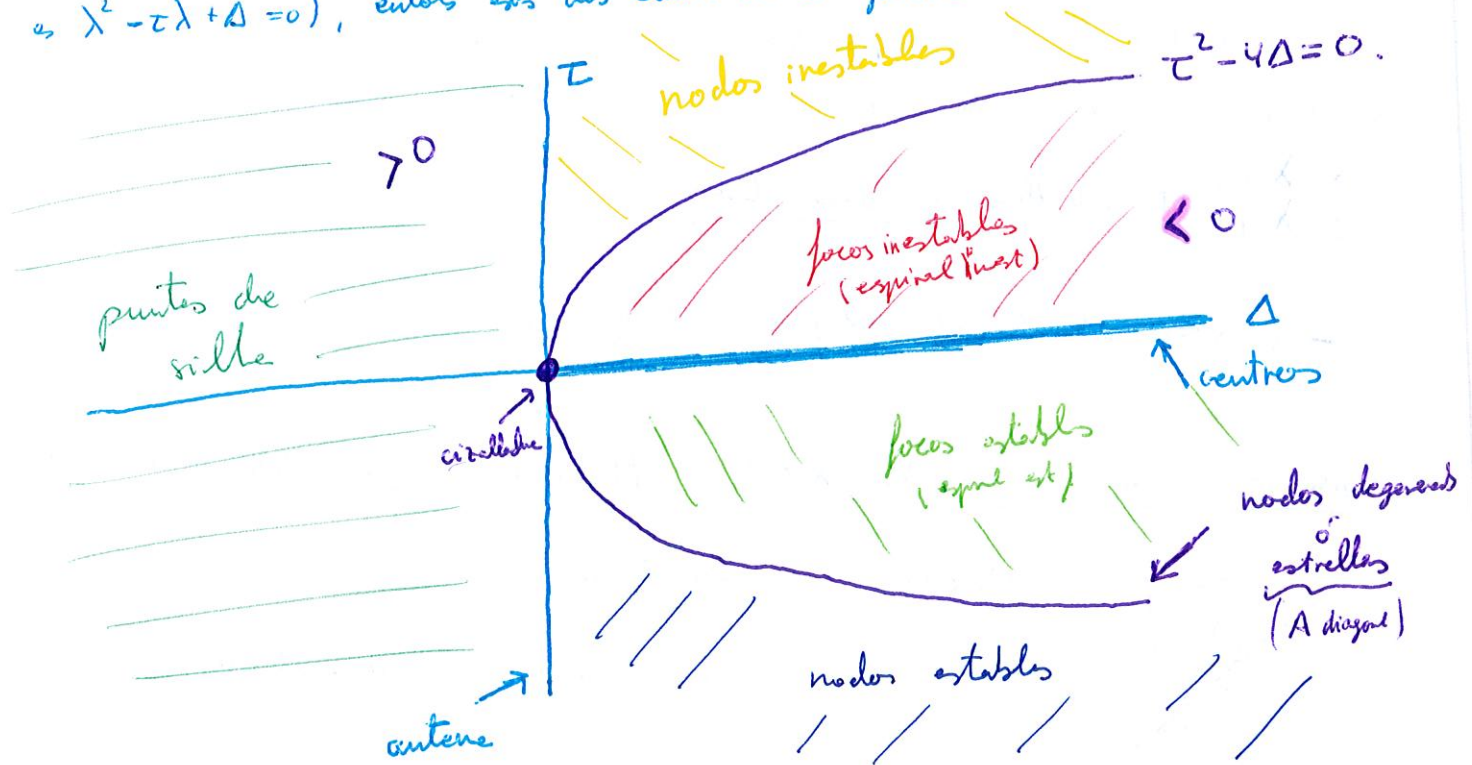
todos los casos se refieren al punto $(0,0)$.

Además aún, puesto que los raíces de la ec. característica quedan determinados por los invariantes

$$\tau = \text{tr}(A)$$

$$\Delta = \det(A)$$

(pues es $\lambda^2 - \tau\lambda + \Delta = 0$), entonces esas dos cantidades clasifican automáticamente la ec. dif:



SISTEMAS NO LINEALES

• Se trata de plantear el problema en sistema lineal o lo no lineal:
$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,y) \\ \dot{y} = g(x,y) \end{cases} (*)$$

Definición: Puntos del sistema (*). Una milclina es una curva en el plano de fase donde $\dot{y} = 0$ o $\dot{x} = 0$.
(¡no son trayectorias, solo!): donde ambas milclinas se cortan, será un pto fijo.

• Podemos linealizar (*) en torno a un pto fijo x^* para ver que estabilidad tiene:

Lema: Sea (x^*, y^*) un pto fijo de (*). Si $u = x - x^*$, $v = y - y^*$, entonces el sistema linealizado en torno (x^*, y^*) es

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_x(x^*, y^*) & f_y(x^*, y^*) \\ g_x(x^*, y^*) & g_y(x^*, y^*) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

• ¿Cuándo es correcto extrapolar el comportamiento de un pto fijo del sistema linealizado al no lineal? Con un gráfico se ve que concuerdan, de eso se sigue.

Definición: Llamamos casos marginales a los centros y los puntos con $\lambda = 0$ (ts. débiles), i.e., a los pto que son fronteras de zonas de estabilidad débil, que separan zonas estables de inestables. El resto se llaman casos robustos.

Definición: Consideremos un sistema no lineal, y sea M la matriz del sistema linealizado, esto es

$$\begin{cases} \dot{x} = a_{11}x + a_{12}y + f(x,y) \\ \dot{y} = a_{21}x + a_{22}y + g(x,y) \end{cases}, \quad M = (a_{ij}).$$

Se dice que el punto $(0,0)$ es un punto fijo trivial del sistema (no lineal) si

i) $\det M \neq 0$

ii) f, g, f_x, f_y, g_x, g_y sean continuas en un entorno de $(0,0)$.

iii)
$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0, \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{g(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0.$$

Teorema (A, de tipo de punto): Si $(0,0)$ es un punto fijo nulo del sistema no lineal, y γ es un punto fijo no trivializado (ie, pto silla, o nodo estable/inestable, o espiral) $\xrightarrow{\text{del lineal}}$ el pto fijo del sistema no lineal es del mismo tipo que el del sistema linealizado.

Teorema (B, de tipo de estabilidad): Si $(0,0)$ es un punto fijo nulo del sistema no lineal, y γ es un punto fijo no trivializado del lineal $\Rightarrow$ el pto fijo del sistema no lineal tiene la misma estabilidad que la del lineal.

Proposición: Sea $\begin{cases} \dot{x} = f(x,y) \\ \dot{y} = g(x,y) \end{cases}$. $\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{\partial g}{\partial y} \Rightarrow \exists F(x,y) : C = \{F=0\}$, y

debe cumplirse $\frac{\partial F}{\partial y} = f$, $\frac{\partial F}{\partial x} = -g$ (se resuelve integrando).

Definición: Un sistema $\dot{x} = f(x)$ se dice conservativo si existe una función $E(x)$ que sea cte en las trayectorias, ie, tal que $\frac{d}{dt} E(x(t)) = 0 \quad \forall x(t) \text{ trayectoria}$

Ejemplo: $\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\frac{1}{m} \frac{dV}{dx} \end{cases} \quad E(x) = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + V(x) = \text{cte.} \quad (\text{es un sistema desacoplado})$

Proposición:

1) Los sistemas conservativos no pueden tener puntos fijos atractivos.

2) En los sistemas conservativos los centros son debilitados. Con precisión: sea $\dot{x} = f(x)$, $f \in C^1$, un sistema conservativo. Si x^* es un punto fijo aislado (ie, no hay más pts fijos en un entorno) y es un mínimo local de la cantidad conservada $E(x) \Rightarrow$ toda trayectoria suf. próxima a x^* se acerca.

Definición: Sea $\frac{dx}{dt} = f(x)$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{El sistema se dice reversible si es invariante bien por el cambio } t \rightarrow -t \\ \text{y } y \rightarrow -y \end{array} \right\}$, bien

por el cambio $\begin{cases} t \rightarrow -t \\ x \rightarrow -x \end{cases}$. Esto dice que el CVD es simétrico w.r.t. eje x (resp. eje y), pues

$$(x, y) \longrightarrow (f(x,y), g(x,y))$$

$$(x, -y) \longrightarrow (-f(x,y), g(x,y))$$

" "
 $f(x,y) \quad g(x,y)$

Definición: Un ciclo límite es una trayectoria cerrada aislada (esto es, que las trayectorias próximas no son cerradas, es espirales bien hacia el ciclo límite bien alejadas de él). En el $t=0$ son estables, y en el $t=2\pi$ son inestables (si ambos medios estables).
 • Son propios de los sistemas no lineales. Igualmente en los límites (por $x(t)$ real $\Rightarrow \lambda x(t)$ real).

Definición: Sea $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$ una solución, y sea $E(x)$ un función escalar ^{definida en una región} que actúa sobre $\vec{r}(t)$. Se llama velocidad de cambio de $E(x(t))$ a lo largo de la trayectoria a

$$\frac{d}{dt} E(x(t)) \stackrel{\text{not}}{=} \dot{E}(t) = \frac{\partial E}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial E}{\partial y} \dot{y} = \frac{\partial E}{\partial x} f + \frac{\partial E}{\partial y} g.$$

Definición: Un sistema gradiente es un sistema $\dot{x} = -\nabla V$, donde V es una función escalar de clase C^1 , llamada

potencial. Es decir, $\begin{cases} \dot{x} = -\frac{\partial V}{\partial x_1} \\ \dot{y} = -\frac{\partial V}{\partial x_2} \end{cases}$.

Proposición: En sistemas gradientes no hay órbitas cerradas.

Definición: Sea $E: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, con $E(0,0) = 0$ y sea R una región que contiene a $(0,0)$. Se dice que E es

a) definida positiva si $E(x,y) > 0 \quad \forall (x,y) \neq (0,0)$ en R

b) definida negativa $<$

c) semidefinida positiva $\geq$

d) semidefinida negativa $\leq$

Definición: Sea $E \in C^1(R)$, $(0,0) \in R$ región. Se dice que $E(x,y)$ es una función de Ljapunov de

el sistema $\begin{cases} \dot{x} = f(x,y) \\ \dot{y} = g(x,y) \end{cases}$ si

i) $E(x,y)$ es definida positiva

ii) Su velocidad de cambio $\dot{E}(x,y) = \frac{\partial E}{\partial x} f + \frac{\partial E}{\partial y} g$ es semidefinida negativa.

iii) Si $\dot{E}$ es definida negativa, se dice que E es una función fuerte de Ljapunov.

Teorema (Método de Liapunov): Sea el sistema $\begin{cases} \dot{x} = f \\ \dot{y} = g \end{cases}$

- 1) Si existe una función débil de Liapunov $E(x,y)$ para el sistema en un región que contiene a $(0,0) \Rightarrow$ el pto fijo $(0,0)$ es estable
- 2) Si existe una función fuerte de Liapunov $E(x,y)$ para el sistema en un región que abra a $(0,0) \Rightarrow$ el pto fijo $(0,0)$ es asintóticamente estable.

Leve: Sea $E(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$

- 1) E def. positiva $\Leftrightarrow a > 0, 4ac - b^2 > 0$
- 2) E def. negativa $\Leftrightarrow a < 0, 4ac - b^2 > 0$

Teorema (Criterio de Dulac): Sea $\dot{x} = f(x)$ un sistema, $f \in C^1(R)$, R simplemente conexo en $\mathbb{R}^2$.

Si existe $g \in C^1(R)$ tal que $\text{sgn } \nabla \cdot (gf)$ no cambia en $R \Rightarrow \nexists$ órbitas cerradas completamente dentro de R .

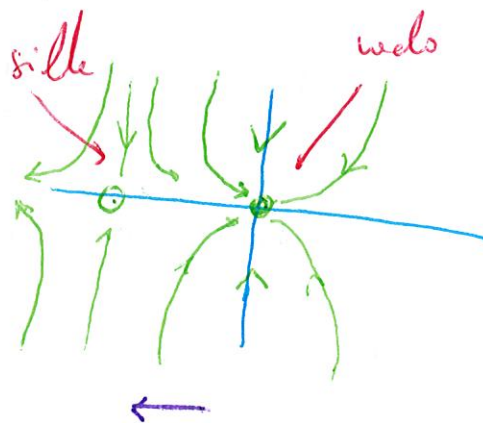
Teorema (Poincaré - Bendixson): Supongamos que

- 1) R es un conjunto del plano cerrado
 - 2) $f \in C^1$ en un A.M. que contiene a R
 - 3) R no contiene ptes fijas
 - 4) $\exists$ una trayectoria C confinada en R
- $\Rightarrow R$ contiene una trayectoria cerrada. (ya sea C , y si no C gira en torno a ella cerrada).

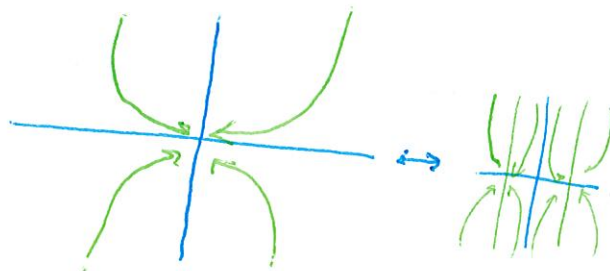
• El Th afirma q no puede haber caos en $\mathbb{R}^2$ r.m.

Cor. En $\mathbb{R}^2$, ~~no puede haber caos~~

1) Bifurcación silla-codo : Creación - destrucción de dos pts fijos de estabilidad opuesta

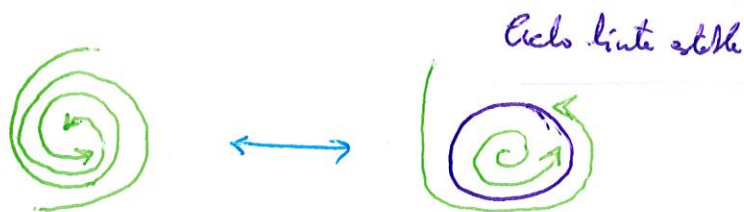


2) Bifurcación de horca supercrítica



3) Bifurcación de Hopf supercrítica :

Si tenemos un pt fijo estable, variando un parámetro conseguimos cambiar el signo de los autovalores.



"limbros" : espiral estable $\rightarrow$ pt fijo estable $\leftrightarrow$ pt fijo inestable $\rightarrow$ espiral inestable con ciclo límite.

4) Bifurcación de Hopf subcrítica :

Un ciclo límite inestable colapsa a radio 0 y renace haciendo que el origen



PFI $\leftrightarrow$ CLI

ciclo límite inestable $\rightarrow$ pt fijo estable $\rightarrow$ espiral inestable.

III : SISTEMAS CAÓTICOS

Definición: Sea $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Una órbita de x_0 bajo $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es un sucesión

$$(x_0, x_1 = F(x_0), x_2 = F(x_1), \dots, x_n = F(x_{n-1}), \dots)$$

$\parallel$
 $F^2(x_0)$
 $\parallel$
 $F^n(x_0)$

Pto x_0 es conocido como origen o semilla.

Ejemplos (Tipo de órbitas):

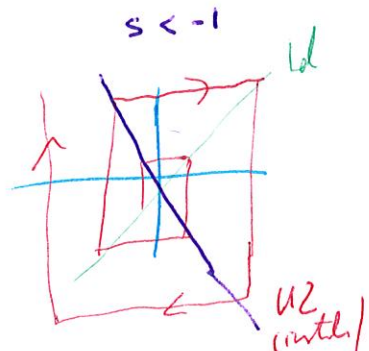
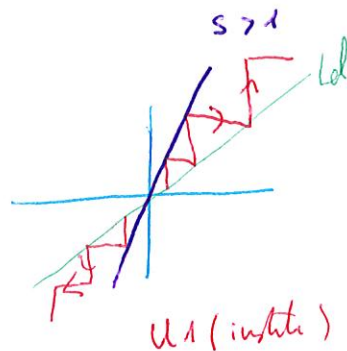
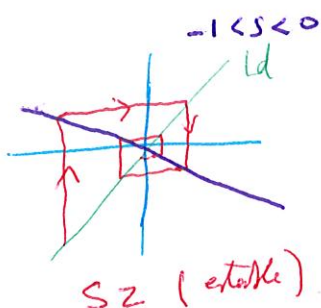
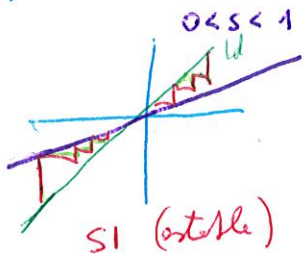
1. Pto fijo: $(x_0, x_0, x_0, \dots)$
2. Periódica: $(x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n = x_0, x_1, \dots)$ (se dice que tiene un ciclo de período n).
3. Finita fijas (eventualmente ctes): $(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n, x_n, x_n, \dots)$
4. Finita periódica: $(x_0, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+s-1}, x_{n+s} = x_n, x_{n+1}, \dots)$
5. Convergente.
6. Caótica: ninguna de las anteriores. Hace de p. de la zona.

Sensibilidad: Grado de dependencia de la órbita (iter) ante pequeños cambios en los c.i. Será un rasgo si pt. cercanos en los c.i. dan lugar a resultados distintos con $n \rightarrow \infty$. Otra manera: medida de cómo se difunden con los sucesivos iterados los errores numéricos, con $n \rightarrow \infty$. Otra manera: las desviaciones crecen en cada iteración, por término medio.

Propiedad: Considera la sucesión $x_{n+1} = f(x_n)$. Entonces, si x^* es un pto fijo de f ,

- 1) $|f'(x^*)| < 1 \Rightarrow x^*$ es estable o atractor
- 2) $|f'(x^*)| > 1 \Rightarrow x^*$ es inestable o repulsor

Tipos de estabilidad: $S = \text{pte}$



1. Sensitivity

2. Mode

3. *Infinites ptes periodicos.*

← laws

Defini: Lemas iterador logístico a $x_{n+1} = f_a(x_n) = ax_n(1-x_n)$, $0 < a < 4$.

• Sensibilidad según Lovette: el error llega a ser del orden de la señal. Si los errores son grandes, pero los valores son mucho más grandes, no es sensibilidad.

• Sei x_0 , y rechte x_n , y parge $u_0 := x_0 + \varepsilon$, ε parge y rechte u_n . Querschnitt $E_n = |u_n - x_n|$.

Définition: Représentations n vs. l'entier, car f un itac castivo. Les ^{log} errors d'après, c'est de faire l'entier.

Llamamos exponente de Liguinov a la pte de tal recta.

• Si $\ln E_n \simeq a + \lambda n \Rightarrow E_n \simeq e^a \cdot e^{\lambda n} = e^a \cdot \overset{e^\lambda}{C}^n$, de modo que $E_n \sim C^n$. Se dice que C es el factor de crecimiento ^(medio) del error. Si $C=2$, entonces $\hookrightarrow$ el error se duplica en cada iteración.

$\lambda > 0$: les orbites se séparent. Se dirige par la sensibilité à la c.i.

$\lambda > 0$: los orbitas son
 $\lambda < 0$: " " " " " " Se den $p = \frac{c_0}{\omega}$ by resitable c.h.c.i.

Definición: Sea x_0 el punto inicial de un órbita.

$$\lambda(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln |f'(x_{k-1})|$$

$$C_0 \in_n \simeq \bar{E}_0 C^n \rightarrow \chi(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left(\frac{\bar{E}_n}{\bar{E}_0} \right).$$

El exp. de Lurje se puede interpretar si usamos el valor medio de la expansión a lo largo de la sfera que empieza en x_0 . Los valores $\ln |f'|$ representan (el logaritmo de) la velocidad de la señal en cada iteración.

Merche: Los orbita se distribuyen, a aparecen por todo el espacio. Otra def: para cualquier par de intervalos iteraciones. Otra: Si cada orbita no

I y J , se pueden encontrar ptes en I que lleguen a J tres iteraciones. Otrs: El caso en el que el esp. de fase.

$$f_4(\sin^2 \varphi) = \sin^2 2\varphi.$$

Def: S tiene ergodicidad, i.e., la órbita de un punto "típico" (no periódico) de $[0,1)$ es ergódica

donde:

S caótica p.e. $\left\{ \begin{array}{l} 1. \text{ Sensibilidad} \\ 2. \text{ Mezcla} \\ 3. \text{ Pts periódicos densos} \end{array} \right.$

$$T^n = TS^{n-1}$$

$\downarrow$
 $\Rightarrow$ T caótica.

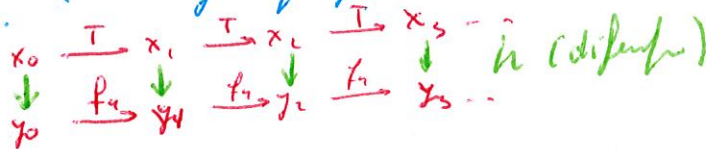
Prop 3:

Def: $w = S^n(w)$ (pto de periodo n) $\Rightarrow x_w := T(w)$ es un pto de periodo n para T .

Prop: Ptos periódicos de S densos $\Leftrightarrow$ los de T t.s.

Def: Los dinámicos bajo T y f_y son equivalentes en el sentido de que es posible pasar de la órbita de T $(x_0, T(x_0), T^2(x_0), \dots)$ a la de f , $(y_0, f(y_0), f^2(y_0), \dots)$ mediante un cambio de espacio, $y = h(x) = \sin^2\left(\frac{x\pi}{2}\right)$. (es un difeomorfismo)

Puntos periódicos de f_y :



w pto periódico de S (p.e. $w = 0, \overline{001}$) $\Rightarrow x_w = T(w) = \frac{2}{7}$ periódico para T = $\frac{1}{2}$

$$\Rightarrow y = \sin^2\left(\frac{\pi}{7}\right) \text{ t.s.}$$

(Lema de la Densidad): Una órbita generada por iteración de T a partir de x_0 , no puede ser densa en $[0,1)$ a menos que exista una órbita exacta $(x_0, x_1, x_2, \dots)$, por lo menos (aunque el sistema sea sensible). Pero el lema de la representación asegura que existe una órbita exacta $(z_0, z_1, z_2, \dots)$ de la cual y_0 es una muy buena aproximación. Luego $(y_0, y_1, \dots)$ no es útil

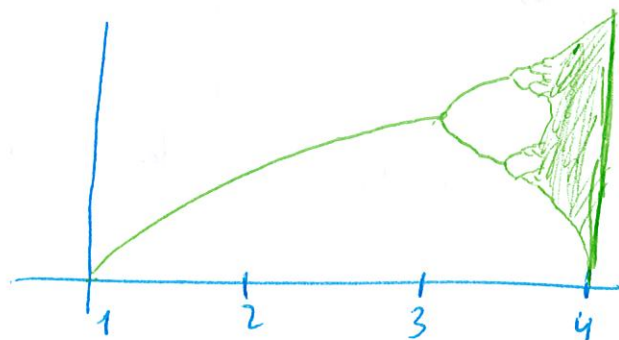
$\Rightarrow$ predicción a largo plazo de $(x_0, x_1, \dots)$.

$\Rightarrow$ Se ven las propiedades.

- Como poner ~~de~~ medido un parámetro del orden al caos

Diagrama de Feigenbaum o diagrama de estados finales: permite conocer el comportamiento de las órbitas del iterado logístico, con $a \in [0, 1]$. Es es, estados finales $\equiv$ órbitas sin transitorios

~~Es es~~ Se representan las pts finales de las órbitas, en eje a vs. x .
"pts de acumulación"



- El diagrama de Feigenbaum del iterado logístico es un estructura fractal!! No es auto-similitud estricta, claro, sino geométrica.

- Si $b_i \equiv$ número de la rama i -ésima ($b_0 = 1, b_1 = 3, b_2 = 3, 45, \dots$), y

$$S_i = b_i - b_{i-1}$$

La longitud de las ^{ramas} ~~ramas~~ parece decrecer de modo geométrico, $\frac{S_{k-1}}{S_k} \in (4.5, 5)$.

En otras palabras, $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{S_{k-1}}{S_k} = S \equiv$ cte de Feigenbaum ≈ 4.669

Aparece en otros dinámicos caóticos, en la naturaleza;

- Si las ramas aumentan cada vez menos, ¿cómo se el valor límite?

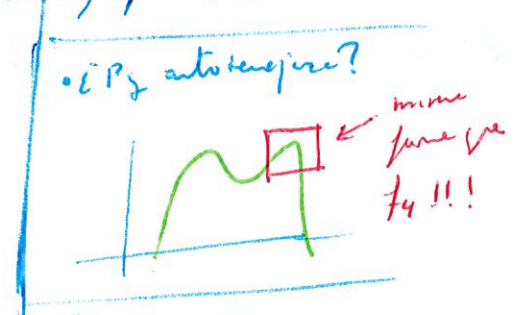
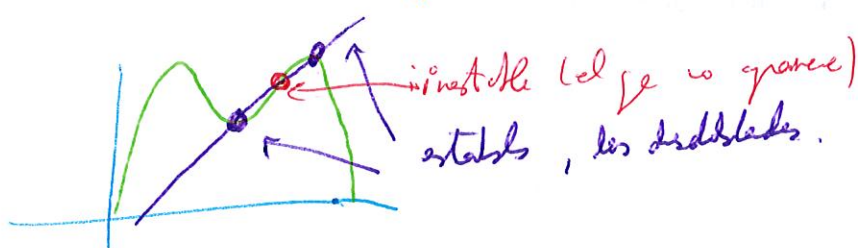
$$S_{\infty} = \log_{1+} 1^{\frac{S_1}{1+}} + \log_{2+} 2^{\frac{S_2}{2+}} + \dots = 2 + \frac{2}{S} + \frac{2}{S} \frac{1}{S} + \dots + 2 \sum_{n=0}^{\infty} S^{-n} = 2 \frac{1}{1-S^{-1}} =$$

$\uparrow$
equivale a 1!

$$= 3.5699 \equiv \text{pt. de Feigenbaum}$$

- También by autoseñoriza con los distors en vertical entre los copos.
- Teóricamente, deber. aparecer una recta de pts fijos tras 3, además de los dobles. Pero es inestable, y por eso no aparece. $f'_a(p_a) = 2 - a$, como $a > 3$ es inestable.

• Los reus en dobles p.e. $g_a(x) = f_a^2(x)$, $g'_a(x) = [f'_a(x)]^2$, pero para $a > 3$,



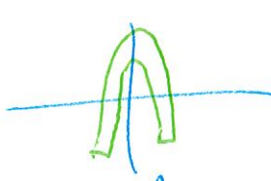
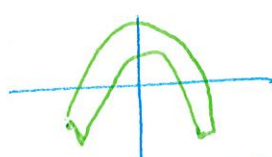
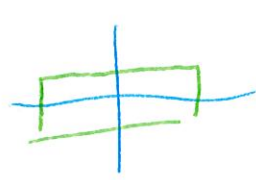
- Para $a > 5$, la ingen. aparece es caótica: hay ventos periódicos, ondas independientes, superpuestas,...
- Hay infinitos ventos periódicos. En cada ventana de periodo n hay n copias del diagrama de Feigenbaum caótico.
- Intermitencia: Aparecen periodos turbulentos impredecibles, de duración también impredecible.

SISTEMAS CAÓTICOS DISCRETOS 2D

- Transform. heraclita: Añazar y doblar una "hoja" (o una rama de pino) (T)
- Transform. del panadero: Añazar, cortar y plegar (S)



- Transform. de Henón: Estirar, doblar un poco, empujar de eje x, y reflexión (simetría) en la recta $y = x$



→ Tiene un atractor, que es fractal

$$\begin{cases} x_{n+1} = y_n + 1 - ax_n^2 \\ y_{n+1} = bx_n \end{cases}$$

→ Si $|b| < 1 \Rightarrow$ las trayectorias infinitas se encierran en un factor 131.

Definición

Def: Un atractor extraño A es un atractor con las sigs props

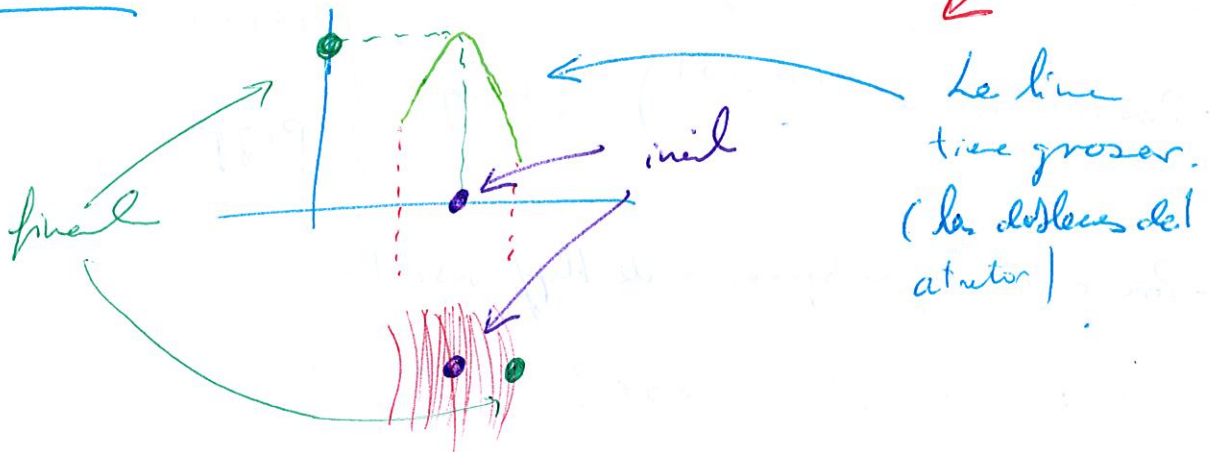
- i) Atracción: $\exists R$ región: $A \subseteq R$ y las órbitas que comienzan en R tienden a A
- ii) Sensibilidad: Las órbitas que comienzan en R tienen sensibilidad a c.i.
- iii) Fractalidad: A es fractal
- iv) Mezcla: Las órbitas recorren todo A .

CASO CONTINUO

• Sistema de Rossler:
$$\begin{cases} \dot{x} = -y - z \\ \dot{y} = x + ay \\ \dot{z} = b + xz - cz \end{cases}$$

Hay atracción y debar. Tiene fase de pila!! (Al disacrilizado)

→ Mapa de Lorenz: Al dar un vector, ¿a dónde va a parar el pto?



• Ecuaciones de Lorentz : Modelan la dinámica caótica de Lorenz.

$$\begin{cases} \dot{x} = -\sigma x + \sigma y \\ \dot{y} = r x - y - x z \\ \dot{z} = b z + x y \end{cases}$$

- Modela el comportamiento de una capa de fluido calentada desde abajo

- Es simétrica resp. $x \rightarrow -x$, $y \rightarrow -y$.

- Controla el volumen finito (pequeña región del espacio de fases).

$\Rightarrow$ - no puede haber pts fijos repulsores
- no puede haber órbitas cerradas repulsores.

Pts fijos :

$r \leq 1$: Solo uno : $p_1 = (0, 0, 0)$

$r > 1$: Hay 3 : p_1, p_2, p_3

↑ ↑
"centros de giro"

Estabilidad : $r < 1$: No hay caos.

- Para $r = r_c (= \frac{\sigma(\sigma+5+3)}{\sigma-5-1})$, se define : $\left. \begin{array}{l} 1 \leq r < r_c : p_2 \text{ y } p_3 \text{ estables} \\ r > r_c : p_2 \text{ y } p_3 \text{ inestables} \end{array} \right\}$

- Para $r = r_c$, hay una bifurcación de Hopf subcrítica

- ¿Puede ver los trayectorias en $r > r_c$? Quieren dar vueltas entre p_2 y p_3

- Hay anejados.

Si $r > 1$, p_1 es inestable

• No hay una definición de "caos" globalmente aceptada, aunque

Def: El caos es un comportamiento periódico y de larga duración en un sistema determinista que muestra sensibilidad a las c.i.

Def: Un atractor es un conjunto ~~denso~~ cerrado A con las siguientes propiedades:

- i) A es un conjunto invariante: si $x(t)$ empieza en A , se quedará por siempre en A
- ii) A atrae: hay un abto $U : A \subseteq U : x(0) \in U \Rightarrow d(x(t), A) \rightarrow 0$ ^{cuando} $t \rightarrow \infty$
- iii) A es mínimo: no hay un subconjunto menor de A que cumpla i) y ii)

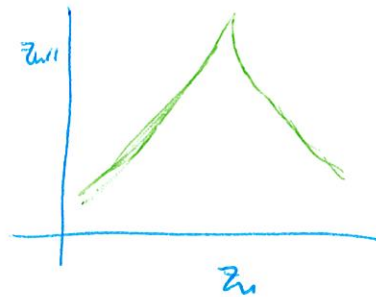
Def: Un atractor extraño es un atractor que muestra sensibilidad ante c.i.

• ¿Es la compase de Lorenz un atractor extraño?

- 1) La trayectoria parece que ~~esta~~ abandone la espiral una vez ha alcanzado una distancia crítica con su centro
- 2) El alcance con la que tal cantidad es excedida parece determinar el punto en el que la orbita entra en la espiral
- 3) Esto determina el número de vueltas que ~~esta~~ realiza ante de cambiar de espiral de nuevo.

Por todo porque una única característica ^{en una vuelta} debe predecir tal comportamiento en la otra vuelta.
Una char. razonable: el valor vectorial Z

¡Tiende de camino!



el ~~tructor~~ ~~extremo~~

• Con el resto de puntos fijos, cambiando r , vemos que surgen muchos otros distintos.

Pueden incluso convivir pts fijos y atractores extraños, de modo que dependa de los ~~o~~ c.i. el resultado final.