I: PROGRAMACIÓN LINEAL

<u>Definición</u> (PPL): Dada una aplicación lineal $z:(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n \longrightarrow c_1x_1+\dots+c_nx_n\in\mathbb{R}$, donde c_i son ctes dadas, y el subconjunto $\mathcal{X}\subseteq\mathbb{R}^n$ definido con $a_{i1}x_1+\dots+a_{in}x_n \circledast b_i$, $i=1,\dots,m$; $\circledast\equiv\geq,\leq,=$; un <u>Problema de Programación Lineal</u> consiste en Min ó Max z en $\mathcal{X}$. A $\mathcal{X}$ se le denomina conjunto de <u>soluciones factibles</u>.

<u>Definición</u> (Forma Estándar): Diremos que un PPL está escrito en forma estándar si $\circledast\equiv =$, y las variables $(x_1,\dots,x_n)$ son ≥ 0; ie, si es de la forma

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{Min/Max} & z(x)=cx \\ \text{sc} & \left.\begin{array}{l} Ax=b \\ x\geq 0 \end{array}\right\}\mathcal{X} \end{array}}$$

$$c=(c_1,\dots,c_n) \qquad b=\begin{pmatrix} b_1\\ \vdots \\ b_m\end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix} \qquad x=\begin{pmatrix} x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$$

* <u>Transformar un PPL a forma estándar</u>: Dada una restricción del tipo $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \underset{(\geq)}{\leq} b_i$, se trata de añadir una variable (llamada de <u>holgura</u>) s_i, $s_i\geq 0$, al lado izquierdo (dcho) de la desigualdad, para obtener lo que falta, y así la igualdad: $\sum_j a_{ij}x_j \underset{(-)}{+} s_i = b_i$. Como para solución $\bar{x}\in\mathcal{X}$ del problema de desigualdades se le asocia otra $(\bar{x},\bar{s})$ del otro problema (los s_i valen lo que le falta para completar la igualdad), $\exists$ una biyección.

Si alguna variable x_j no está restringida de signo, se sustituye por x_j^+, x_j^-, ambos ≥ 0, y donde $x_j=x_j^+-x_j^-$.

* Si el problema es de <u>máximo</u>, se hace el problema para $\underline{\underline{-cx}}$.

*Geométricamente, $\mathcal{X}$ forma un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ llamado poliedro (acotado), donde la sol. óptima del PPL puede ser única o infinita; pero siempre hay. Si es un politopo ($\neq \emptyset$, pero puede ser no acotado), puede tener 1 sol, ∞, o no tener.

Definición (Soluciones Factibles Básicas): Se dice que $x \in \mathcal{X}$ es básica si los vectores columna $\{A_j : x_j > 0\}$ forman un sistema L.I. $\left(\mathcal{X} \equiv \begin{matrix} Ax = b \\ x \geq 0 \end{matrix}\right)$.

Teorema (Fundamental de la Prog. Lin): Consideremos un PPL y $\mathcal{X}$ el conj. sol. fact.

1) Si $\mathcal{X} \neq 0 \Rightarrow \exists$ alguna solución básica
2) Si el problema es óptimo $\Rightarrow \exists$ una solución básica que es óptima.

Definición: Decimos que un PPL está escrito en forma canónica si en A existe una matriz identidad. Si $\bar{x} = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_m, 0, \dots, 0)$ es básica, $A_1, \dots, A_m$ l.i. y consideramos $B = (A_1, \dots, A_m)$, $B^{-1}A$ tiene una matr. identidad.

*Los sistemas $Ax = b$ y $B^{-1}Ax = A'x = B^{-1}b = b'$ son equivalentes. Como rg $A = m$, si no hay ecuaciones redundantes, podemos encontrar su sol. básica. Si $A' = (Id, A'_{m+1}, \dots A'_n)$, es claro que $\bar{x} = (b_1, \dots, b_m, 0, \dots, 0)$.

Definición (Punto Extremo): Decimos que $\bar{x} \in \mathcal{X}$ es un punto extremo si no se puede escribir como C.L. convx de otras dos sol. fact. ie,

$$s, t \in \mathcal{X},\ \lambda \in (0,1).\ \text{si } \bar{x} = (1-\lambda)s + \lambda t \Rightarrow s = t (= \bar{x}).$$

Teorema: $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n$, $\mathcal{X} = \begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$. Sea $\bar{x} \in \mathcal{X}$

$$\boxed{\bar{x} \text{ SFB} \iff \bar{x} \text{ pto extremo}}$$

II: SIMPLEX

» Para cada PPL $\left.\begin{array}{l}\min z(x) = cx \\ \text{s.a } Ax = b \\ x \geq 0\end{array}\right\} \bar{x}$, vamos a construir la sig. tabla. (sg. en forma canónica)

$$
\begin{array}{c|ccccc|ccccc|c}
\bar{X} & x_1 & \cdots & x_l & \cdots & x_m & \multicolumn{5}{c|}{\overbrace{x_{m+1} \cdots x_k \cdots x_n}^{\text{variables no básicas}}} & \\
\hline
x_1 & 1 & & \cdots & & 0 & a_{1\,m+1} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\
\vdots & & \ddots & & & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\
x_l & & & 1 & & & & & & & & b_l \\
\vdots & & & & \ddots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\
x_m & 0 & & \cdots & & 1 & a_{m\,m+1} & \cdots & a_{mk} & \cdots & a_{mn} & b_m \\
\hline
 & \bar{c}_1 & & \cdots & & \bar{c}_m & \bar{c}_{m+1} & \cdots & \bar{c}_k & \cdots & \bar{c}_n & z(\bar{x}) \\
 & \parallel & & & & \parallel & & & & & & \\
 & 0 & & & & 0 & & & & & &
\end{array}
$$

(variables básicas: $x_1, \ldots, x_m$)

donde

$$\bar{c} = c - c_B A$$

$$\boxed{\bar{c}_k = c_k - c_B A_k}$$

$$c_B \equiv c|_{\text{variables básicas}}$$

Proposición (Criterio de Optimalidad): $\bar{c} \geq 0 \Rightarrow \bar{x}$ óptima (≤ 0 si es Max)

Corolario: Si $\bar{c}_i > 0 \;\; \forall i = m+1, \ldots, n \Rightarrow \bar{x}$ es la única sol. óptima.

Proposición: Sea $\bar{c}_k < 0$ y $\exists\, i \in \{1, \ldots, m\} : a_{ik} > 0$. Si $\frac{b_l}{a_{lk}} = \min\left\{\frac{b_i}{a_{ik}} : a_{ik} > 0\right\}$, el "cambio" de x_k por x_l nos lleva a otra forma canónica.

Proposición: si $\exists\; A_k \leq 0$ y $\bar{c}_k < 0 \Rightarrow \nexists \min z(x) \equiv (\min = -\infty)$.

Corolario: Si llevamos a cabo un cambio de x_k por x_l, se tiene:

$$a'_{lj} = \frac{a_{lj}}{a_{lk}} \quad ; \quad a'_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{ik}}{a_{lk}} \cdot a_{lj} \quad (i \neq l)$$

$$\bar{c}'_l = -\frac{\bar{c}_k}{a_{lk}} \quad ; \quad \bar{c}'_j = \bar{c}_j - \frac{a_{lj}}{a_{lk}} \cdot \bar{c}_k \quad (j \neq l)$$

$$b'_l = \frac{b_l}{a_{lk}} \quad ; \quad b'_i = b_i - \frac{b_l}{a_{lk}} \cdot a_{ik} \quad (i \neq l)$$

$$\underset{\text{nueva sol.}}{z(x')} = \overset{\text{vieja}}{z(\bar{x})} + \left(\frac{b_l}{a_{lk}} \cdot \bar{c}_k\right)^{<0} < z(\bar{x}). \quad (\text{si } b_l \neq 0).$$

* <u>Método de las dos fases</u> : $\begin{cases} \text{Fase 1: Obtener forma canónica} \\ \text{Fase 2: hacer cambios de variables básicas.} \end{cases}$

$$\boxed{\begin{array}{l} \min\ z(x) = cx \\ \text{s.a.}\quad \left.\begin{array}{l} Ax = b \\ x \geq 0 \end{array}\right\} \chi \\ \underline{b \geq 0} \end{array}} \ (P) \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{\begin{array}{l} \min\ w(x,t) := \sum_i t_i \\ \text{s.a.}\quad Ax + It = b \\ \qquad x \geq 0,\ t \geq 0 \end{array}} \ (P_T)$$

$t_i \equiv$ variables artificiales.

* (P_T) siempre es óptimo, ya que es factible ($(x = (0, \dots, 0, b_1, \dots, b_m))$) y no puede ser no acotado por la def de w. ($t_i \geq 0$).

<u>Proposición</u> : (P) factible $\iff$ $w_{opt} = 0$. ($t_i = 0\ \forall i$)

* Además, al obtener una $(\bar{x}, \bar{t})$ óptima para w, si suponemos que las variables básicas están en x, quitar la parte de las t nos da una forma canónica para x, con lo que empieza la <u>Fase II</u>, resolver (P) como ya sabemos.

* Si hay alguna variable básica t_i, dos casos: (y $t_i = 0$ porque $w_{opt} = 0$)
  - En la fila de la t_i, todos los coef. de la x son 0 $\Rightarrow$ toda esa fila se elimina y obtenemos una matriz de rg $m-1$; porque significa que esa ec. es redundante.
  - En el fila hay algún coef. de la $x \neq 0$, supongamos el $a_{ik} \neq 0$, hacemos el cambio de x_k por t_i, que nos da la base deseada; ya que $b_i = 0$ (¡siempre! porque $w_{opt} = 0$).

* Si en A ya existe el vector $p \in \{1, \dots, m\}$: $A_p = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} p$, entonces no hace falta introducir la variable t_p.

* <u>Método de las Penalizaciones</u> (Big-M Method):

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Min } z(x) = cx \\ \text{s.a. } Ax = b \\ \quad x \geq 0 \\ b \geq 0 \end{array}} \quad \longrightarrow \quad \boxed{\begin{array}{l} \text{Min } w(x,t) = cx + M\sum_i t_i \\ \text{s.a. } Ax + It = b \\ \quad x, t \geq 0 \end{array}}$$

(P) $\qquad\qquad$ t_i = var. art. $\qquad$ (P_M)

$M \equiv$ nº más grande que cualquiera que pueda surgir al aplicar el algoritmo del Simplex. ($\exists$ pq hay $\binom{n}{m}\cdot n\cdot m$ números como mucho.)

*(P_M) siempre es factible ($\bar{x} = (0, \dots, 0, b_1, \dots, b_m)$ es solución). Además,

<u>Proposición</u>:

- (P_M) → FACTIBLE
  - → ÓPTIMO [$(\bar{x}, \bar{t})$ ópt]
    - → $t \neq 0 \Rightarrow$ (P) infactible
    - → $t = 0 \Rightarrow$ (P) óptimo y $\bar{x}$ es el óptimo.
  - → NO ACOTADO $\Rightarrow$ {(P) factible $\Rightarrow$ (P) no acotado}.
- (P_M) → ~~INFACTIBLE~~

*<u>Método Revisado del Simplex</u>: El cambio de x_k por x_l se puede hacer multiplicando el sistema $Ax = b$ por la matriz

$$P = \begin{pmatrix} 1 & & -\frac{a_{1k}}{a_{lk}} & & \\ & \ddots & \vdots & & 0 \\ & & \frac{1}{a_{lk}} & & \\ & 0 & \vdots & \ddots & \\ & & -\frac{a_{mk}}{a_{lk}} & & 1 \end{pmatrix}$$

$\qquad\qquad\qquad\uparrow$ columna l-ésima

se pueden encadenar las P...

$A^{(r)} = P^0 \cdot P^1 \cdot P^2 \dots P^{(r-1)} A$ ...

$b^{(r)}$ ... — —

y se cometen menos errores porque se hacen las cuentas con los datos originales.

III : TEORÍA DE DUALIDAD

Definición: Dado un PPL (P) $\begin{cases} \text{Min } z(x) = cx \\ \text{s.a. } Ax \otimes b \\ x \otimes 0 \end{cases}$; definimos su dual como un problema

de (D) $\begin{cases} \text{Max } \phi(\pi) = \pi b \\ \text{s.a. } \pi A \otimes c \\ \pi \otimes 0 \end{cases}$, con las siguientes reglas:

* Tantas variables en (P) como restricciones en (D)
* Tantas restricciones en (P) como variables en (P)

} a cada variable de (P) se le asocia una restricción, y viceversa.

(P)/(D) $\boxed{\text{Min}}$		(P)/(D) $\boxed{\text{Max}}$
var ≥ 0	$\longleftrightarrow$	rest. ≤ 0
var ≤ 0	$\longleftrightarrow$	rest. ≥ 0
var no restr.	$\longleftrightarrow$	rest. $= 0$
rest. ≥ 0	$\longleftrightarrow$	var ≥ 0
rest. ≤ 0	$\longleftrightarrow$	var ≤ 0
rest. $= 0$	$\longleftrightarrow$	var. no restr.

Teorema (Débil de Dualidad): Dado (P) $\equiv \begin{cases} \text{Min } z(x) = cx \\ \text{s.a. } \left.\begin{matrix} Ax \geq b \\ x \geq 0 \end{matrix}\right\} \mathcal{X} \end{cases}$; consideremos

también su dual (D) $\equiv \begin{cases} \text{Max } \phi(\pi) = \pi b \\ \text{s.a. } \left.\begin{matrix} \pi A \leq c \\ \pi \geq 0 \end{matrix}\right\} \Omega \end{cases}$

$$\bar{x} \in \mathcal{X},\ \bar{\pi} \in \Omega \implies z(\bar{x}) \geq \phi(\bar{\pi})$$

Corolario: (P), (D) factibles $\Longrightarrow$ (P), (D) óptimos.

Teorema (Fuerte de Dualidad): Sea (P), (D) PPL duales uno del otro

(P) óptimo $\Longleftrightarrow$ (D) óptimo, y además

$$\underline{z_{opt}} = \min z(x) = \max \phi(\pi) = \underline{\phi_{opt}}$$

y $\underline{\pi_{opt} = c_B B^{-1}}$

Corolario I: Si uno es no acotado $\Longrightarrow$ el otro es infactible

Corolario II: Si uno es factible y otro infactible $\Longrightarrow$ el factible es no acotado.

Teorema (de Holgura): Consideremos

$$(P)\ \begin{array}{l} \min z(x) = cx \\ \text{s.a. } Ax \geq b \\ \quad\ x \geq 0 \end{array}, \qquad (D)\ \begin{array}{l} \max \phi(\pi) = \pi b \\ \text{s.a. } \pi A \leq c \\ \quad\ \pi \geq 0 \end{array}$$

$s_i = A_i x - b_i$ $\qquad$ $u_j = c_j - \pi A_j$

variables de holgura.

$$\bar{x}, \bar{\pi} \text{ óptimos} \Longleftrightarrow \begin{cases} \bar{x}_j \cdot \bar{u}_j = 0 & \forall j = 1, \dots, n \\ \bar{\pi}_i \cdot \bar{s}_i = 0 & \forall i = 1, \dots, m \end{cases}$$

(ie, o la componente de la sol. ó la componente de la var. de holgura es 0).

* La componente π_i (asociada a la restricción i-ésima de x) representa la cantidad que se modifica la z por cada unidad adicional de b_i que se añada.

* Al querer aumentar la variación de un b_i, puede haber un pto donde este se haga ≤ 0.
Para estos casos, hay que aplicar el Método del Simplex Dual.

Proposición (Método del Simplex Dual): En un cuadro con la fila indicadora ≥ 0 y en el que hay uno $b'_l < 0$ (el mínimo de todos), tomamos la variable

$$x_k : \frac{\bar{c}'_k}{a'_{lk}} = \max \left\{ \frac{\bar{c}'_j}{a'_{lj}} \quad a'_{lj} < 0 \right\}$$

El cambio de x_k por x_l nos lleva a otro cuadro con $\bar{c} \geq 0$.

El siguiente cuadro tiene una sol. dual $(\pi = c_B B^{-1})$ que mejora o iguala a la anterior.

Corolario: $\mathring{A}_l \geq 0,\ b < 0 \Rightarrow$ (P) es infactible.

IV: LA GEOMETRÍA DEL SIMPLEX

Definición (Lado Acotado): Sean $\bar{x}, \hat{x}$ dos puntos extremos ($\Leftrightarrow$ SFB) de $\mathcal{X}$. Diremos que el segmento $[\bar{x}, \hat{x}]$ es un lado acotado si

$$\lambda, \mu \in (0,1); \quad s,t \in \mathcal{X}$$

$$\lambda \bar{x} + (1-\lambda)\hat{x} = \mu s + (1-\mu) t \Rightarrow s,t \in [\bar{x}, \hat{x}].$$

Teorema (Caracterización de Lado acotado): Sea $J = \{ j = 1, \dots, n : \bar{x}_j > 0 \text{ ó } \hat{x}_j > 0 \}$, donde $\bar{x}, \hat{x}$ son dos puntos extremos.

$$[\bar{x}, \hat{x}] \text{ lado} \Leftrightarrow rg\,(A_j)_{j \in J} = \#J - 1$$

Proposición: En un paso del Simplex, si nos movemos, lo hacemos hacia un pto extremo adyacente.

Definición (Solución Homogénea): Se dice que $y \in \mathbb{R}^n$ es una solución homogénea para $\mathcal{X}$ si $Ay = 0$ y $y \geq 0$.

* $\bar{y} > 0$, $\bar{x} \in \mathcal{X} \Rightarrow \bar{x} + \lambda \bar{y} \in \mathcal{X}$ con $\lambda > 0$.
* $\bar{y}, \hat{y}$ SH, $\bar{y} \neq \hat{y} \Rightarrow \lambda \bar{y} + \mu \hat{y}$ SH con $\lambda, \mu > 0$.

Definición (Solución Homogénea Extrema): Se dice que $y \in \mathbb{R}^n$ es una solución homogénea extrema para $\mathcal{X}$ si $\underbrace{Ay = 0}_{\text{es SB del sistema de restricciones}}$, $y \geq 0$ y $\|y\|_1 = 1$.

Definición (Lado No Acotado) : Sea $\mathcal{X} \equiv \begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$, $\bar{x} \in \mathcal{X}$ un pto extremo y $\bar{y}$ SME para $\mathcal{X}$. Diremos que $\mathcal{L} := \{ \bar{x} + \lambda \bar{y} : \lambda \geq 0 \}$ es un lado si:

$$\lambda > 0, \ \alpha \in (0,1), \ s, t \in \mathcal{X}$$

$$\bar{x} + \lambda \bar{y} = \alpha s + (1-\alpha) t \Rightarrow s, t \in \mathcal{L}.$$

Teorema (Caract. de lado no acotado) : $\mathcal{X}$, $\bar{x}$ pto extr., $\bar{y}$ SME. Denotamos como $J = \{ j = 1, \dots, n : \bar{x}_j > 0 \text{ ó } \bar{y}_j > 0 \}$.

$$\mathcal{L} = \{ \bar{x} + \lambda \bar{y} : \lambda \geq 0 \} \text{ lado} \iff rg\,(A_j)_{j \in J} = \# J - 1$$

Teorema (de Resolución de Minkowsky) : Sean $\mathcal{X}$, $\{x^1, \dots, x^r\}$ las SBFB de $\mathcal{X}$ y $\{y^1, \dots, y^s\}$ las SME de $\mathcal{X}$.

$$\forall x \in \mathcal{X} \ \exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in [0,1], \ \sum_i \lambda_i = 1, \ \mu_1, \dots, \mu_s \geq 0 :$$

$$\boxed{x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x^i + \sum_{j=1}^{s} \mu_j y^j}$$

Corolario: $\forall y$ SME $cy \geq 0 \Rightarrow$ (P) es óptimo.