I: ECUACIONES EN DIFERENCIAS

Definición: Una ecuación en diferencias es una expresión de la forma

$$p_r f(n+r) + p_{r-1} f(n+r-1) + \dots + p_1 f(n+1) + p_0 f(n) = q(n) \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad (*)$$

con $p_0, \dots, p_r \in \mathbb{R}$ y $q: \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$. Se trata de encontrar una función $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ que verifique dicha ecuación, a la cual llamaremos solución. Se dice que la ec. es de orden r si $p_0 p_r \neq 0$. Si $q \equiv 0$ se dice homogénea.

Teorema (Existencia y Unicidad de Soluciones): Dados $\alpha_0, \dots, \alpha_{r-1} \in \mathbb{C}$, existe una única solución f de (*) que verifique $f(0) = \alpha_0, \dots, f(r-1) = \alpha_{r-1}$.

• $H_{\mathbb{C}} = \{$sol. de la ec. homogénea$\}$ es un $\mathbb{C}$-EV ; y $H_{\mathbb{R}} = \{$sol de la ec. hom que toman val reales sobre $\mathbb{Z}\}$ es un $\mathbb{R}$-EV.

Proposición: Sean $f_0, \dots, f_{r-1} \in H_K$ ($K = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$) soluciones de la ec. hom.

$$f_0, \dots, f_{r-1} \text{ son L.I.} \iff \begin{vmatrix} f_0(0) & \cdots & f_{r-1}(0) \\ \vdots & & \vdots \\ f_0(r-1) & \cdots & f_{r-1}(r-1) \end{vmatrix} \neq 0.$$

[Te]orema: $\dim_K H_K = r$.

[Se tie]ne que si f es sol de la ec. completa (*) y h de la ec. hom, $f+h$ es de la compl.; y que si f_1, f_2 lo son de la completa, ent. $f_1 - f_2$ lo es de la homogénea. Esto dice que, si $\bar{f}$ es una sol particular de la completa(*), ent.

$$\{\text{Soluciones de la ec. completa } (*)\} = \bar{f} + H_{\mathbb{C}}$$

[es un] espacio afín de dim r.

Definición: Se llama diferencia finita de orden 1 de una función $Z : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ a

$$\Delta Z(x) := Z(x+1) - Z(x) \quad ,$$

y diferencia finita de orden k de Z a

$$\Delta^k Z(x) := \Delta\left(\Delta^{k-1} Z(x)\right) = \Delta^{k-1}\left(\Delta Z(x)\right).$$

Convendremos que $\Delta^0 Z = Z$.

Proposición: $\Delta^k Z(x) = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (-1)^{k-j} Z(x+j) \quad , \; k \in \mathbb{N}_0$. inducc + juntar $Z(x+j)$

Proposición: $Z(x+k) = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \Delta^j Z(x) \quad , \; k \in \mathbb{N}_0$. $\int\int$ + pol + bin. Newton.

Corolario: Si $Z(x)$ es un polinomio de grado $\leq s \implies \Delta^k Z(x) \equiv 0 \quad \forall k \geq s+1$.

¿Cómo obtener de forma explícita la sol. de una ec. en dif? Se tratará primero de hallar la base:

$f(n) := \lambda^n, \lambda \in \mathbb{C}^*$ es sol $\iff p_r \lambda^r + \dots + p_1 \lambda + p_0 = 0 \iff \lambda$ es raíz de la ecuación característica

¿Forman base?

- CASO I: Raíces simples $\lambda_0, \dots, \lambda_{r-1}$ (distintas entre sí): El conjunto $\{\lambda_0^n, \dots, \lambda_{r-1}^n\}$ de funciones es base pq el det es de Vandermonde, $\neq 0$ con λ_i distintos.

- CASO II: Raíces múltiples. de multiplicidad $s > 1$, se buscan sol de la forma $f(n) = \lambda^n Q(n)$, con Q a determinar.

Si λ es una raíz de la ec. char. de multiplicidad $s > 1$, se prueba que $\lambda^n, n\lambda^n, n^2\lambda^n, \dots, n^{s-1}\lambda^n$ son sol. de la ec. hom. Haciendo cuentas con ayuda de las dif finitas se prueba que

Por tanto, si $\lambda_1, \dots, \lambda_t$ son las raíces distintas del pol char, de multiplicidades $s_1, \dots, s_t$ resp, ent.

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_1^n, n\lambda_1^n, \dots, n^{s_1-1}\lambda_1^n, \\ \vdots \\ \lambda_t^n, n\lambda_t^n, \dots, n^{s_t-1}\lambda_t^n \end{array} \right\}$$

son soluciones; y se prueba que son L.I.; y como son $s_1 + \dots + s_t = r$, forman una base de H_0.

Nota: Si las c.i. son reales, el Th ∃!. garantiza que la sol está en $H_{\mathbb{R}}$, de modo que podemos encontrar una sol en términos de funciones $\mathbb{R}$-valoradas. Si todas las raíces son reales, nada que decir. Si alguna λ es complejo, $\bar{\lambda}$ tb es raíz, y basta sustituir λ^n y $\bar{\lambda}^n$ por $(\lambda^n+\bar{\lambda}^n)/2 = |\lambda|^n \cos n\theta$ y $(\lambda^n-\bar{\lambda}^n)/2 = |\lambda|^n \operatorname{sen} n\theta$, $\theta = \arg \lambda$. Estas son tb L.I.

• ¿Cómo obtener una sol particular de la ec. completa?

Proposición: Sea $Q_t(x)$ un pol de gr $\leq t$, y sea $c_0, \dots, c_t$ la solución del sistema triangular

$$\sum_{j=0}^{k} \frac{k!}{(k-j)!} c_j = Q_t(k), \quad k = 0, \dots, t.$$

Se cumple:

1) $Q_t(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x(x-1) + \cdots + c_t x(x-1)\cdots(x-t+1)$

2) Para cualquier polinomio $p(x) = p_r x^r + \cdots + p_1 x + p_0$ de gr $\leq r$, se cumple

$$\sum_{k=0}^{r} Q_t(k) p_k x^k = \sum_{j=0}^{t} c_j x^j p^{(j)}(x)$$

Corolario: Sea $p(x) = p_r x^r + \cdots + p_1 x + p_0$ un pol de gr $\leq r$, y λ una raíz de multiplicidad s. Para todo polinomio $Q(x)$ de gr $\leq s-1$ se cumple

$$\sum_{k=0}^{r} Q(k) p_k \lambda^k = 0,$$

y en particular, para $Q(k) = k^j$, $j = 0, \dots, s-1$, $\sum_{k=0}^{r} k^j p_k \lambda^k = 0$. Además, para $Q(k) = k^s$, se tiene

$$\sum_{k=0}^{r} k^s p_k \lambda^k = \lambda^s p^{(s)}(\lambda).$$

Vamos a resolver la ecuación completa cuando $g(n) = \lambda^n \cdot Q(n)$, con Q un pol. Echando cuentas, se comprueba que podemos encontrar una solución particular de la forma

$$\bar{f}(n) = \lambda^n n^s H(n),$$

donde s = multiplic. de λ como raíz del pol char ($s=0$ si no es raíz), y $H(n)$ un pol a det del mismo grado que Q. Los coef. de H se hallan sustituyendo (*) e igualando coeficientes.

II: SUMACIÓN DE FUNCIONES

• Consideremos los problemas

(I) Dada $g: \mathbb{N} \to \mathbb{C}$, ¿ $\sum_{i=0}^{n} g(i)$?

(II) Dada $g: \mathbb{N} \to \mathbb{C}$, ¿ $\exists F: \mathbb{N} \to \mathbb{C} : \Delta F(x) = g(x)$?

Proposición: Ambos problemas son equivalentes (en el sentido de que si conocemos la solución de uno conocemos la del otro)

• Más aún, si F es tal que $\Delta F(x) = g(x)$, entonces

$$\boxed{\sum_{i=p}^{q} g(i) = F(q+1) - F(p)}$$

• Ej: ¿$F: \Delta F(x) = a^x$? $a=1$: $F(x) = x$; $a \neq 1$: $F(x) = \frac{a^x}{a-1}$.

Proposición (Fórmula de Abel): Sean $u, v, U: \mathbb{N} \to \mathbb{C} : \Delta U(x) = u(x+1)$. Entonces se cumple

$$\sum_{x=n}^{m} u(x+1)\, v(x+1) = U(m+1)\, v(m+1) - U(n)\, v(n) - \sum_{x=n}^{m} U(x)\, \Delta v(x).$$

$\pm \sum U(x) v(x)$

• Supongamos que g es un pol. ¿Cómo resolver $\Delta F(x) = g(x)$? $\equiv \sum g$? Lo sabemos del tema I, pero vamos a obtener una fórmula general:

NÚMEROS Y POLINOMIOS DE BERNOULLI

Definición: Se llaman números de Bernoulli a una colección $\{B_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ que verifican:

$$B_0 := 1 \quad ; \quad B_n := \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k \overset{\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}}{=\!=\!=} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_{n-k}, \quad n \geq 2.$$

• Notar que no se definen uno a partir del otro: B_n aparece a ambos lados, cumplen una relación.

• $B_0 = 1$, $B_1 = -\frac{1}{2}$, $B_2 = \frac{1}{6}$, $B_4 = -\frac{1}{30}$, $B_6 = \frac{1}{42}$, ...

Definición: Se llaman polinomios de Bernoulli a una colección $\{B_i(x)\}_{i\in\mathbb{N}_0} \subset \mathbb{R}[x]$ definida por

$$B_n(x) := \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k\, x^{n-k} \overset{\text{antes}}{=} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_{n-k}\, x^{k}$$

Proposición (Propiedades):

1) $B_n(0) = B_n \quad , n \in \mathbb{N}_0$

2) $B_n(1) = B_n \quad , n \geq 2$

3) $\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} B_k = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} B_{n-k} = 0 \quad , n\geq 2$

4) $B_n'(x) = n B_{n-1}(x)$

* 5) $\Delta B_n(x) = n x^{n-1} \quad , n \in \mathbb{N}_0$ bin Newton + "pol" + 3)

6) $B_n(x+1) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k(x) \quad , n \in \mathbb{N}_0.$ Taylor

Proposición (Más propiedades):

1) Si n par, $B_n\left(\frac{1}{2}+x\right) = B_n\left(\frac{1}{2}-x\right)$.

2) Si m impar, $B_m\left(\frac{1}{2}+x\right) = -B_m\left(\frac{1}{2}-x\right)$.

3) Si m impar >1 $B_m(0) = B_m\left(\frac{1}{2}\right) = B_m(1) = 0$.

** 4) Si m impar >1 $B_m = 0$

5) $\int_0^1 B_n(x)\,dx = 0 \quad , n \in \mathbb{N}$.

Proposición:

1) Si m impar >1, los polinomios $B_m(x)$ sólo tienen en $[0,1]$ a $0, \frac{1}{2}, 1$ como raíces.

2) Si n par >0, los polinom. $B_n(x)$ tienen en $[0,1]$ dos raíces: una en $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ y su simétrica resp. $\frac{1}{2}$ en $\left(\frac{1}{2},1\right)$.

Proposición:

1) $B_{2n} \cdot B_{2n+2} < 0$, $n \in \mathbb{N}_0$ (i.e., los signos se van alternando en los pares)

2) Si n par, $B_n(x) - B_n$ tiene signo cte en $[0,1]$.

Definición: Se llaman números de Euler a $\left\{ \frac{B_{2n}}{(2n)!} \right\}_{n \in \mathbb{N}_0}$.

Proposición: $\left(\frac{B_{2n}}{(2n)!} \right) \longrightarrow 0$ con $n \to \infty$.

• Dado g un pol, ¿ $F : \Delta F = g$? $\equiv$ ¿$\sum g$?. Si $F_j(x)$ son pol : $\Delta F_j(x) = x^j$, entonces dado $g = \sum a_i x^i$, F será $F(x) = \sum a_i F_i(x)$ (pq Δ es lineal). ¡Pero * dice que vale $F_j(x) = \frac{B_{j+1}}{j+1}$! Luego

$$F(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1} B_{k+1}(x).$$

¡Pero que complicado saber $B_k(x)$! Escribamoslo más simple.

Teorema: Sea $g : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ un polinomio de grado $\leq n$. La función

$$\boxed{F(x) = \int_0^x g(t)\, dt + \sum_{j=1}^{n+1} \frac{B_j}{j!} g^{(j-1)}(x)}$$

cumple que $\Delta F(x) = g(x)$.

Teorema (Fórmula de Sumación de Euler): Sea $g : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ un polinomio de gr $\leq n$. Entonces

$$\boxed{\sum_{x=m}^{p-1} g(x) = \int_m^p g(t)\, dt + \sum_{j=1}^{n} \frac{B_j}{j!} \left(g^{(j-1)}(p) - g^{(j-1)}(m) \right)}$$

• ¿Qué pasa si g es una función cualquiera? Si es suf dif, se puede aproximar por Taylor:

<u>Teorema</u> (Fórmula de Euler-McLaurin): Sea $g \in \mathcal{C}^{n+1}[m,p]$. Entonces

$$\boxed{\sum_{x=m}^{p-1} g(x) = \int_m^p g(t)\,dt + \sum_{i=1}^{n} \frac{B_i}{i!}\left(g^{(i-1)}(p) - g^{(i-1)}(m)\right) - \frac{1}{(n+1)!}\int_0^1 \left[(B_{n+1}(t) - B_{n+1}) \sum_{x=m}^{p-1} g^{(n+1)}(x+1-t)\right] dt}$$

• Si g es de clase un nº par, se simplifica algo la cosa:

<u>Corolario</u>: Sea $g \in \mathcal{C}^{k}[m,p]$, con k par.

$$\boxed{\sum_{x=m}^{p-1} g(x) = \int_m^p g(t)\,dt + \sum_{i=1}^{k-1} \frac{B_i}{i!}\left(g^{(i-1)}(p) - g^{(i-1)}(m)\right) + \frac{B_k}{k!}(p-m)\, g^{(k)}(\eta)} \quad , \eta \in [m,p]$$

<u>Proposición</u>: $|B_{2n}| \leq \dfrac{(2n)!}{12(2\pi)^{2n-2}}$.

III : RESOLUCIÓN NUMÉRICA DE ED'S

• Se trata de resolver el PVI $\left.\begin{array}{l} y' = f(x,y) \\ y(a) = \eta \end{array}\right\}$, con $f : [a,b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $y : [a,b] \to \mathbb{R}$, numericamente.

• En general pediremos que f cumpla las <u>hipótesis mínimas</u>: cont en $[a,b] \times \mathbb{R}$ y lipsch. resp. la 2ª var.

• Un <u>método</u> de resolución es un algoritmo que a través de cuentas da una sol aproximada de y en algunos pts.
Se dice que un método es de <u>un paso</u> si para calcular y_i solo utilizamos la información que proporciona el paso anterior (dividimos ~~el~~ intervalo $[a,b]$ en $x_i = a + hi$, $h = \frac{b-a}{N}$, $N \in \mathbb{N}$, $i = 0 \ldots n$; en cada x_i obtendremos una aproximación y_i de $y(x_i)$). Se dirá que el método es de <u>K pasos</u> (<u>multipaso</u>) si se necesitan los K anteriores.

III.1.- MÉTODOS DE UN PASO

• Consideremos una partición $\{x_i\}$ de $[a,b]$, como antes. Dado (x_i, y_i), ¿cómo obtener $(\cancel{x_{i+1}}, y_{i+1})$? Queda determinado por la recta que los une, más aún, por la pte de dicha recta, que la llamaremos $\phi_f(x_i, y_i; h)$. Así,

$$\boxed{y_{i+1} = y_i + h\, \phi_f(x_i, y_i; h)}$$

Los diferentes métodos consisten en elegir ese ϕ_f.

<u>Definición</u>: Llamaremos <u>error global</u> en x_i a $\varepsilon_i := y(x_i) - y_i$; y <u>error local de truncamiento</u> a $\tau_{i+1}(h) := \frac{y(x_{i+1}) - y(x_i)}{h} - \phi_f(x_i, y(x_i); h)$.

Si el método fuese exacto, $\tau_i(h) = 0$.

• τ_{i+1} mide hasta qué punto los valores exactos cumplen la ec. de los valores aproximados.

<u>Definición</u>: Sea ϕ un método de un paso que podemos aplicar a las funciones f de un cierto conjunto $\mathcal{M}$ de funciones.
Se dice que el método es de <u>orden p</u> sobre $\mathcal{M}$ si

$$\forall f \in \mathcal{M} \ \exists c \geq 0, h_0 > 0 \ : \tau(h) \leq c h^p \quad \forall\, 0 < h \leq h_0, \text{ donde}$$

$$\tau(h) := \max_{0 \leq i \leq N} |\tau_i(h)| .$$

Teorema: Supongamos que $\phi_f : [a,b] \times \mathbb{R} \times [0, h_0] \longrightarrow \mathbb{R}$ es lipsch. resp. la 2ª var. Sea $y(x)$ la única sol del pvi $\left.\begin{array}{l} y' = f(x,y) \\ y(a) = \eta \end{array}\right\}$. Entonces para cada $i = 0, \dots, N$ se cumple la siguiente acotación:

$$|\varepsilon_i| = |y(x_i) - y_i| \leq \begin{cases} \dfrac{\tau(h)}{K}\left(e^{K(x_i - a)} - 1\right) & , K > 0 \\ \tau(h)\,(x_i - a) & , K = 0 \end{cases}$$

Corolario: En las hip. anteriores, si el método definido por ϕ_f es de orden p, los errores globales son infinitésimos de orden p. En particular, si es $\tau(h) \leq c h^p$, $0 \leq h \leq h_0$,

$$\max_i |\varepsilon_i| = \max_i |y(x_i) - y_i| \leq \begin{cases} \dfrac{c}{K}\left(e^{K(b-a)} - 1\right) h^p & , K > 0 \\ c(b-a)\, h^p & K = 0 \end{cases}.$$

Definición: Consideremos el pvi $\left.\begin{array}{l} y' = f(x,y) \\ y(a) = \eta \end{array}\right\}$, ϕ_f un método, y sea $\hat{x} \in [a,b]$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $h_n := \dfrac{\hat{x} - a}{n}$, y la correspondiente partición $x_i^{(n)} := a + i h_n$, $i = 0, \dots, n$, de $[a, \hat{x}]$; de modo que el método da, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$y_0^{(n)} := \eta \quad , \quad y_{i+1}^{(n)} := y_i^{(n)} + h_n \, \phi_f(x_i^{(n)}, y_i^{(n)}; h_n).$$

Nótese que $\forall n$, $x_n^{(n)} = \hat{x}$, de forma que $y_n^{(n)}$ es una aproximación de $y(\hat{x})$. Entonces, se dice que el método definido por ϕ_f es convergente en $\hat{x}$ si $\forall \eta \in \mathbb{R}$, $\lim_{n\to\infty} y_n^{(n)} = y(\hat{x})$.

Se dice que es convergente si lo es $\forall \hat{x} \in [a,b]$; y que lo es en un conjunto de funciones M si lo es para toda $f \in M$.

En román paladino: es convergente si al ir haciendo las particiones más finas la aproximación obtenida se parece cada vez más a la verdadera.

Definición: Se dice que un método ϕ_f es consistente si $\phi_f(x, y; 0) = f(x,y)$.

*Teorema: Sea $\phi_f : [a,b] \times \mathbb{R} \times [0,h_0] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua y lipsch. resp. la 2ª var. Entonces para el método que define se cumple que

$$\text{Convergente} \Longleftrightarrow \text{Consistente}.$$

Ejemplos:

1) Método de Euler: $\phi_f(x,y;h) := f(x,y)$.

- El método es consistente trivialmente.
- Sea $F_K[a,b] := \{ f : [a,b] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : f$ tiene parciales hasta orden K cont. y acotadas $\}$.

Proposición: En $F_1[a,b]$, el método de Euler es consistente, convergente y de orden 1.

2) Método de Taylor de orden K: $\phi_f(x,y;h) := T_f^{K)}(x,y;h) = f^{0)}(x,y) + \frac{h}{2} f^{1)}(x,y) + \dots + \frac{h^{K-1}}{K!} f^{K-1)}(x,y)$,

donde, si $\frac{d^r f}{dx^r}(x,y(x)) \equiv f(x,y(x))^{(r)} = ($follones de $f, f_x, f_y, f_{xy}, \dots)(x,y(x))$, entonces

$f^{r)}(x,y) := ($follones ...$)(x,y)$.

- Taylor de orden 1 $=$ Euler.

Proposición: En $F_K[a,b]$, el método de Euler de orden K es consistente, convergente y (en ef.) de orden K

3) Métodos de Runge-Kutta de $(m+1)$ etapas: $\phi_f(x,y;h) := \sum_{\mu=0}^{m} \alpha_\mu f(\xi_\mu, \eta_\mu)$,

donde para cada i, $\xi_\mu = x_i + \theta_\mu h$, $\mu = 0, \dots, m$, $0 \le \theta_1 \le \theta_2 \le \dots \le \theta_m \le 1$. (para cada i, $\xi_\mu \in [x_i, x_{i+1}]$)

y para cada i, $\eta_0 = y_i$; $\eta_\mu = y_i + h \sum_{k=0}^{\mu-1} \alpha_{\mu k} f(\xi_k, \eta_k)$

- Los coeficientes $\alpha_\mu, \alpha_{\mu k}$ son pesos de fórmulas de cuadratura.
- Para cada i, $\eta_\mu \approx y(\xi_\mu)$
- Se dice que es una familia de métodos, pues depende de: la partición $\{\theta_i\}$, los pesos de las fórmulas de cuadratura $\{\alpha_\mu\}$ y $\{\alpha_{\mu k}\}$, ...

- En general, como mínimo asumimos que las fórm. de cuadr. son de orden 0 (= exactas para los pol de gr ≤ 0): $1 = \sum \alpha_\mu$; $\theta_\mu = \sum_{\kappa=0}^{\mu-1} \alpha_{\mu\kappa}$.

- Runge-Kutta de 1 etapa $\overset{(m=0)}{=}$ Euler.

- Runge-Kutta de 4 etapas ($m=3$) : clásico :

$$\begin{cases} y_0 = \eta, \quad y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \\ k_1 = f(x_i, y_i) \\ k_2 = f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}k_1) \\ k_3 = f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}k_2) \\ k_4 = f(x_i + h, y_i + h k_3) \end{cases}$$

Proposición: Si f satisface las hipótesis mínimas, el método de Runge-Kutta es consistente y convergente. Además, si la fórmula de cuadratura de los $\{\alpha_\mu\}$ es de orden 1, y la de los $\alpha_{\mu\kappa}$ de orden 0, entonces en $F_2[a,b]$ el método de 2 etapas es de orden 2

- Hay métodos de s etapas y orden s para $s=1,2,3,4$. Para orden 5 y 6 hacen falta 6 y 7 etapas, resp.

III.2. - MÉTODOS MULTIPASO

- Los métodos multipaso consisten en dar una aproximación y_{n+k} de $y(x_{n+k})$ usando para ello k aproximaciones anteriores (no sólo la anterior, como en los de 1 paso) $y_n, \dots, y_{n+k-1}$. La forma general será

$$\boxed{\sum_{j=0}^{k} \alpha_j y_{n+j} = h \sum_{j=0}^{k} \beta_j f_{n+j}} \quad , \; f_{n+j} \overset{not}{=} f(x_{n+j}, y_{n+j})$$

$\alpha_k \neq 0$ ($\alpha_k = 1$, p.ej)

Los k primeros valores habrá que calcularlos con un método de un paso, para luego echar a andar este método.

Definición: Si $\beta_k = 0$, se puede despejar y_{n+k}; y se dice que el método es explícito. Si $\beta_k \neq 0$, es implícito.

- Si tenemos un método implícito, y_{n+k} se podría calcular mediante el método del pto fijo (con h peq). ¡Pero así no lo haremos!

Definición: dado un método multipaso $\sum \alpha_j y_{n+j} = h \sum \beta_j f_{n+j}$, se llama <u>error de truncamiento</u> en el pto x resp. h a

$$\tau(x,h) := \frac{\sum_{j=0}^{k} \alpha_j \, y(x+jh)}{h} - \sum_{j=0}^{k} \beta_j \, f(x+jh, y(x+jh)) .$$

· Al igual que antes, mide el error que cometemos suponiendo que en los pasos anteriores no hemos cometido error.

Definición: Sea $f \in F_p[a,b]$, con lo que podemos poner

$$h\,\tau(x,h) \overset{\text{cuentas}}{=\!=} y(x)\cdot \underbrace{\left(\sum_{j=0}^{k} \alpha_j\right)}_{c_0} + \sum_{i=1}^{p} y^{(i)}(x)\, h^i \underbrace{\left[\frac{1}{i!} \sum_{j=0}^{k} \alpha_j j^i - \frac{1}{(i-1)!} \sum_{j=0}^{k} \beta_j j^{i-1} \right]}_{c_i \,,\ i=1,\dots,p.} + O(h^{p+1})$$

Se dice que el método $\sum \alpha_j y_{n+j} = h\sum \beta_j f_{n+j}$ es de orden <u>al menos r</u> si $c_0 = c_1 = \dots = c_r = 0$;

y de <u>orden exactamente r</u> si además $c_{r+1} \neq 0$.

Proposición:

1) Dados k valores $x_0, \dots, x_{k-1}$ distintos, y $2k$ val. $y_0, \dots, y_{k-1}$; $y_0', \dots, y_{k-1}'$, existe un único pol $p(x)$ de gr $\leq 2k-1$: $p(x_i) = y_i$, $p'(x_i) = y_i'$.
(i.e., dados k ptos y k ptes, hay un único pol que pasa por esos pts con sus ptes).

2) Dados $k+1$ valores $x_0, \dots, x_k$ distintos y $2k+1$ val. $y_0, \dots, y_k$; $y_0', \dots, y_{k-1}'$, existe un único pol. $p(x)$ de gr $\leq 2k$: $p(x_i) = y_i$, $p'(x_i) = y_i'$.

3) Dados $k+1$ val <u>ordenados</u> $x_0 < x_1 < \dots < x_k$; y $2k+1$ val. $y_0, \dots, y_{k-1}$; $y_0', \dots, y_k'$, existe un único pol $p(x)$ de gr $\leq 2k$: $p(x_i) = y_i$, $p'(x_i) = y_i'$.

Corolario:

1) En 1) de antes, si $x_i = i$, $i = 0, \dots, k-1$; tal único pol de gr $\leq 2k-1$ es

$$p(x) = \sum_{j=0}^{k-1} y_j \, L_{j0}(x) + \sum_{j=0}^{k-1} y_j' \, L_{j1}(x) ,$$

donde $L_{j0}(x), L_{j1}(x)$ son los únicos polinomios de gr $\leq 2k-1$ que cumplen

$$\left.\begin{array}{l} L_{j0}(i) = \delta_{ij} \\ L'_{j0}(i) = 0 \end{array}\right\} , \quad \left.\begin{array}{l} L_{j1}(i) = 0 \\ L'_{j1}(i) = \delta_{ij} \end{array}\right\} \quad i,j = 0,\dots,k-1$$

2) En 3) de antes, si $x_i = i$, $i = 0,\dots,k$; tal único pol de gr $\leq 2k$ es

$$p(x) = \sum_{j=0}^{k-1} y_j \overline{L_{j0}}(x) + \sum_{j=0}^{k} y'_j \overline{L_{j1}}(x) .$$

donde $\overline{L_{j0}}(x), \overline{L_{j1}}(x)$ son los únicos pol de gr $\leq 2k$ que cumplen,

$$\left.\begin{array}{l} \overline{L_{j0}}(i) = \delta_{ij} \\ \overline{L_{j0}}'(i) = 0 \\ (\cancel{i \text{ según } 3)}) \\ j = 0,\dots,k-1 \end{array}\right\} , \quad \left.\begin{array}{l} \overline{L_{j1}}(i) = 0 \\ \overline{L_{j1}}'(i) = \delta_{ij} \\ (\cancel{i \text{ según } 2)}) \\ j = 0,\dots,k . \end{array}\right\}$$

<u>Teorema</u>: Sea $\sum \alpha_j y_{n+j} = h \sum \beta_j f_{n+j}$.

1) El método es de orden al menos p $\iff$ $\sum_{j=0}^{k} \alpha_j M(j) - \sum_{j=0}^{k} \beta_j M'(j) = 0$ $\forall$ pol $M(x)$ de gr $\leq p$

2) El método es de orden exactamente p $\iff$ " y además $\exists$ un pol de gr $p+1$ que no verifica la igualdad.

<u>Corolario</u>:

1) Todo método explícito de k pasos es de orden $\leq 2k-1$.

2) Todo método implícito de k pasos es de orden $\leq 2k$.

• ¿Y cuántos métodos de orden máximo podemos tener?

Teorema: Existe un único método de k pasos explícito (implícito) de orden máximo: $2k-1$ ($2k$). En particular, el explícito es $\alpha_j = -L_{j+1}(k)$, $\beta_j = L_{j+1}(k)$.
$\alpha_k = 1$

Definición: Se dice que un método de k pasos $\sum \alpha_j y_{n+j} = h \sum \beta_j f_{n+j}$ es consistente si es al menos de primer orden, i.e., $C_0 = C_1 = 0$.

Definición: Consideremos el pvi $\left. \begin{array}{l} y'(x) = f(x,y) \\ y(a) = \eta \end{array} \right\}$, sea $\sum \alpha_j y_{n+j} = h \sum \beta_j f_{n+j}$ un método de k pasos, y $\hat{x} \in [a,b]$. Para cada $N \in \mathbb{N}$ sea $h_N := \dfrac{\hat{x} - a}{N}$, y $x_s^{(N)} = a + h_N \cdot s$, $s = 0, \dots, N$; de modo que $x_0^{(N)} = a$ y $x_N^{(N)} = \hat{x}$. Entonces el método que tenemos en cada N es $\sum \alpha_j y_{n+j}^{(N)} = h \sum \beta_j f(x_{n+j}^{(N)}, y_{n+j}^{(N)})$.
En particular, para $n + k = N$, $y_N^{(N)} \approx y(x_N^{(N)}) = y(\hat{x})$.

Por otra parte, necesitamos un método de 1 paso para echar a andar el método; que darán las aproximaciones $y_0^{(N)}, \dots, y_{k-1}^{(N)}$; computado en $x_0^{(N)}, \dots, x_{k-1}^{(N)}$. Notamos que $x_0^{(N)}, \dots, x_{k-1}^{(N)} \longrightarrow a$ cuando $N \to \infty$.

Con todo esto, se dice que el método de k pasos es convergente si $\lim_{N \to \infty} y_N^{(N)} = y(\hat{x})$ y para cada $l = 0, \dots, k-1$, $\lim_{N \to \infty} y_l^{(N)} = \eta$, $\forall \hat{x} \in [a,b]$, $\forall \eta \in \mathbb{R}$, $\forall f$ hip. mínimas.

Teorema: Sea $\sum = \sum$ un método de k pasos.

$$\text{Convergente} \Longrightarrow \text{Consistente}$$
$$\underset{\text{en general}}{\not\Longleftarrow}$$

¿Cuándo $\Leftarrow$ también se cumple?

Definición: Se dice que un método de k pasos cumple la condición de la raíz (o condición de estabilidad) si las raíces λ del polinomio $\rho(x) = \alpha_k x^k + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0$ verifican:

i) $|\lambda| \leq 1$ $\forall \lambda$ raíz

ii) $|\lambda| < 1$ $\forall \lambda$ raíz múltiple.

Proposición: Todo método multipaso convergente cumple la condición de la raíz.

Teorema: Sea $\Sigma .. = h\Sigma$ un método multipaso.

$$\text{Convergente} \iff \text{Consistente} + \text{Condición de la raíz.}$$

Teorema: Todo método lineal de $k \geq 2$ pasos convergente es de orden $\begin{cases} \leq k+1, & k \text{ impar} \\ \leq k+2, & k \text{ par.} \end{cases}$

Definición: Sea $\Sigma .. = \Sigma$ convergente y consideremos los polinomios $\rho(x) = \alpha_k x^k + \dots + \alpha_0$; $\sigma(x) = \beta_k x^k + \dots + \beta_0$.

Como es convergente, es consistente y $c_0 = \alpha_0 + \dots + \alpha_k = 0$; i.e., 1 es raíz, y como cumple la c. raíz, debe ser de multipl. 1.

Consideremos el polinomio $Q(x) = \rho(x) - \bar{h}\,\sigma(x)$, y sean sus raíces $\bar{r}_1, \dots, \bar{r}_k$ (dependen de $\bar{h}$). Se puede garantizar que $\exists$ una raíz (sup. spg que es $\bar{r}_1$) tal que $\bar{r}_1 \to 1$ si $\bar{h} \to \infty$.

Entonces, se dice que el método es relativamente estable para cierto $\bar{h}$ si para ese $\bar{h}$ $|\bar{r}_1| > |\bar{r}_j| \quad \forall j = 2, \dots, k$.

Ejemplos:

1) Métodos de Adams:

$$\begin{cases} y_{n+k} = y_{n+k-1} + h \sum_{j=0}^{k-1} \beta_j f(x_{n+j}, y_{n+j}) & \text{(Adams - Bashforth) (EXPL.)} \\ y_{n+k} = y_{n+k-1} + h \sum_{j=0}^{k} \bar{\beta}_j f(x_{n+j}, y_{n+j}) & \text{(Adams - Moulton) (IMPL.)} \end{cases}$$

con $\beta_j := \int_{k-1}^{k} \prod_{\substack{s=0 \\ s\neq j}}^{k-1} \frac{t-s}{j-s}\, dt$; $\bar{\beta}_j := \int_{k-1}^{k} \prod_{\substack{s=0 \\ s\neq j}}^{k} \frac{t-s}{j-s}\, dt$.

- Adams-Bash. con $k = 1$ $\equiv$ Euler.

Proposición:

1) Los métodos de Adams - Bashforth de k pasos son justamente de orden k
2) " " " - Moulton " " " " " " $k+1$

Proposición: Los métodos de Adams son convergentes.

Proposición: Los métodos de Adams tienen un intervalo de estabilidad relativa con 0 en su interior.

2) Métodos predictor-corrector: Consiste en aplicar simultáneamente dos métodos multipaso: uno explícito de k pasos y otro implícito de $k-1$: con el explícito se halla un valor "a priori" de $\tilde{y}_{n+k}$; y con el implícito se usa ese valor "a priori" para evaluar la función: $y_{n+j} = \dots + f(x_{n+j}, \tilde{y}_{n+j})$.