

I: ECUACIONES NO LINEALES

• Se trata de resolver $f(x) = 0$.

• MÉTODO DE LA BISECCIÓN (BOLZANO): Sea $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua, con

$f(a = x_0) \cdot f(b = y_0) < 0 \xrightarrow{\text{Th Bolz}} \exists$ una raíz de f en $[a, b]$. Se evalúa $\frac{x_0 + y_0}{2}$: si $f(\frac{x_0 + y_0}{2}) = 0$, fin, si no

$$-f(x_0) \cdot f\left(\frac{x_0 + y_0}{2}\right) < 0 \Rightarrow \alpha \in \left(x_0, \frac{x_0 + y_0}{2}\right) \Rightarrow \begin{cases} x_1 := x_0 \\ y_1 := \frac{x_0 + y_0}{2} \end{cases}$$

$$> 0 \Rightarrow \alpha \in \left(\frac{x_0 + y_0}{2}, y_0\right) \Rightarrow \begin{cases} x_1 := \frac{x_0 + y_0}{2} \\ y_1 := y_0 \end{cases}$$

Y se repite el proceso. Entón se obtienen dos sucesos (x_n) e (y_n) , (x_n) monótona creciente y acotada por $y_0 = b$; y (y_n) monótona decreciente y acotada por $x_0 = a \Rightarrow \exists \lim x_n = x$; $\exists \lim y_n = y$.

Proposición (Convergencia de la Bisección): $x = y = \alpha$, i.e., ambas sucesos convergen al mismo pto, que resulta ser la raíz.

Proposición (Cota de error de Bisección): Fijado un intervalo de precisión ε , el número de iteraciones necesarias para que el error sea $< \varepsilon$ es $n \geq \log_2 \frac{b-a}{\varepsilon}$.

• MÉTODO DE LA REGLA-FALSI: Sea $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ contine, con $f(a=x_0) \cdot f(b=y_0) < 0$

Def. $\Rightarrow \exists \alpha \in (a, b)$ raíz. Sea x_1 el pto de corte de la recta que une $(x_0, f(x_0))$ con $(y_0, f(y_0))$ con el eje de abscisas, esto es, $x_1 := \frac{x_0 f(y_0) - y_0 f(x_0)}{f(y_0) - f(x_0)}$. Entes si $f(x_1) = 0$, fin, sino

$\cdot f(x_0) \cdot f(x_1) < 0 \Rightarrow \alpha \in (x_0, x_1) \Rightarrow y_1 := x_0$

$\cdot > 0 \Rightarrow \alpha \in (x_1, y_0) \Rightarrow x_1 := y_0$

y se obtienen dos sucesos (x_n) e (y_n) (notar que ya no son crecientes/decrecientes, los y_n van dando "saltos").

Proposición (Convergencia de la Regla-Falsi): La sucesión (x_n) converge a la raíz de f en $[a, b]$.

• MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON

Teorema (de Banach del punto fijo): Sea (X, d) un $\mathbb{E}^M$, y $T: X \rightarrow X$ ^{completo} contractiva, ie, lipedizante de $cte < 1$. Entes $\exists$ pto fijo de T en X .

• Sea $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $\alpha \in (a, b)$ raíz. Consideren una func g equidale, ie, α raíz de $f \Leftrightarrow \alpha$ pto fijo de g . Esto define el método.

Proposición (Convergencia Global): Sea $g: [a, b] \rightarrow [a, b]$ derivable en (a, b) con $|g'(x)| < 1 \quad \forall x \in [a, b] \Rightarrow g$ es contractiva y por tanto $\exists$ pto fijo.

Proposición (Convergencia Local): Sea $g: [a, b] \rightarrow [a, b]$, α un pto fijo, $g \in C^1(a, b)$ y $|g'(\alpha)| < 1$. Entes $\exists$ un entorno de α : Si x_0 está en ese entorno la sucesión $(g^n(x_0)) \rightarrow \alpha$.

o sea $f: [c,d] \rightarrow \mathbb{R}$, $\alpha \in (c,d)$ y $x_0 \in (c,d)$, con f derivable y $f'(x) \neq 0 \forall x \in [c,d]$.

Tomamos la recta a f en x_0 , y x_1 es el pto de corte con el eje X : $x_1 := x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$.

Si $f(x_1) = 0$, fin; si no, se repite el proceso, y se obtiene la sucesión de Newton-Raphson:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}; \text{ es decir, tambi } g(x) := x - \frac{f(x)}{f'(x)}, (x_n) = (g^n(x_0)).$$

Notar que $g(x) = x \Leftrightarrow f(x) = 0$.

Proposición (Convergencia local de N-R): Sea $f: [c,d] \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in C^2(c,d)$, con $f'(x) \neq 0 \forall x$.

Entonces la sucesión de NR converge a α en un entorno de α .

o.e. Que para si $f'(\alpha) \neq 0$ ~~se~~

Proposición (Convergencia local de NR con raíces múltiples): Si $f \in C^p(c,d)$, y α es una raíz de multiplicidad p , i.e., $f(\alpha) = f'(\alpha) = \dots = f^{(p-1)}(\alpha) = 0$, $f^{(p)}(\alpha) \neq 0$, entonces la sucesión de NR converge en un entorno de α .

Definición: Un método se dice de orden p si $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x_{n+1} - \alpha|}{|x_n - \alpha|^p} = \text{cte.}$

Proposición: Si $g \in C^p(c,d)$, α pto fijo: $g'(\alpha) = \dots = g^{(p-1)}(\alpha) = 0 \Rightarrow$ el método de g , $(g^n(x_0))$, es de orden p .

Proposición: Sea $g: [c,d] \rightarrow [c,d]$, $\alpha \in (c,d)$, pto fijo, y $(x_n) \subset (g^n(x_0))$.

g derivable, $|g'(x)| \leq k < 1 \forall x \in [c,d] \Rightarrow |x_n - \alpha| \leq \frac{k^n}{1-k} |x_1 - x_0|$ etc.

II. SISTEMAS DE ECUACIONES

• $M_n = \{ \text{matrices cuadradas de orden } n \}$ y M_n es un EV.

Definición: Una norma matricial en M_n es una aplicación $\|\cdot\|: M_n \rightarrow \mathbb{R}$ que cumple:

i) $\|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0$

ii) $\|\lambda A\| = |\lambda| \|A\|$

iii) $\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|$

iv) $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$

Si se cumple iv) se dice que es una norma vectorial.

• Son normas matriciales:

$$\|A\| := \sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|$$

$$\|A\| := n \cdot \max_{1 \leq i,j \leq n} |a_{ij}|$$

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|^2} \quad (\text{Frobenius})$$

$$\|A\|_{\infty} := \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$$

suma de todos
de fila

$$\|A\|_1 := \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$$

suma de
todas las columnas

$$\|A\|_2 = \sqrt{\rho(AA^t)}$$

$\rho = \text{radio spectral}$

Definición: Se dice que una norma matricial $\|\cdot\|_M$ es compatible con una norma vectorial

$\|\cdot\|_V$ (definida en $\mathbb{R}^n$) cuando $\|Ax\|_V \leq \|A\|_M \|x\|_V$, $\forall x \in \mathbb{R}^n, A \in M_n$.

Definición: Dada una norma vectorial $\|\cdot\|_V$, llamamos norma inducida por $\|\cdot\|_V$ a una aplicación sobre M_n definida por

$$\|A\|_M := \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_V}{\|x\|_V} = \max_{\|x\|=1} \|Ax\|_V$$

Proposición: Las normas inducidas son normas euclídeas. En particular, son compatibles con la norma vectorial que las induce.

Lemas: $\|\cdot\|_n$ norma inducida $\Rightarrow \|I\|_n = 1$.

• Con esto hemos dicho que dada una norma vectorial podemos construir una norma. Al revés también: dada $\|\cdot\|_n$ se define sobre $\mathbb{R}^n$ $\|x\|_v := \|x u^t\|_n$ para $0 \neq u \in \mathbb{R}^n$, y se ve que es una norma vectorial, porque $\|\cdot\|_n$ es compatible con $\|\cdot\|_v$.

Proposición: La norma matricial $\|\cdot\|_1$ inducida por $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$ es

$$\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$$

Proposición: La norma matricial $\|\cdot\|_\infty$ inducida por $\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$ es

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$$

Proposición: La norma matricial $\|\cdot\|_2$ inducida por $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$ es

$$\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^t A)}$$

• En lo anterior se ha utilizado:

Definición: Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Llamamos espectro de A a

$$\text{Spec } A = \{ \text{autovalores de } A \} = \{ \lambda \in \mathbb{C} : \exists x \in \mathbb{C}^n : Ax = \lambda x \} = \{ \lambda \in \mathbb{C} : |A - \lambda I| = 0 \}$$

y radio espectral a

$$\rho(A) := \max_{\lambda \in \text{Spec } A} |\lambda|$$

• $A \in \text{lin}$ diagonalizable ($\equiv \exists P \in \text{lin}$ invertible: $P^{-1}AP$ es diagonal) $\Rightarrow \exists$ base de autovectores

• A simétrica $\Rightarrow A$ diagonalizable

Proposición: Sea $A \in \text{lin}$. Son equivalentes

1) A definida (semi-definida) positiva ($:= x^t A x \geq 0 \forall x$)

2) $\Delta_k > 0$ (≥ 0) $\forall k=1, \dots, n$, donde $\Delta_k = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} \end{vmatrix}$

3) Todos los autovalores de A son > 0 (≥ 0).

Proposición: Sea $A \in \text{lin}$. Se verifica

1) $\rho(A) \leq \|A\| \quad \forall \|\cdot\|$ norma matricial

2) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \|\cdot\|_\varepsilon$ norma matricial inducida tal que $\|A\|_\varepsilon \leq \rho(A) + \varepsilon$.

Definición: Se dice que una sucesión de matrices $(A_n) = (A_1, A_2, A_3, \dots)$ es convergente a $A \in \text{lin}$ si $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists J \in \mathbb{N}: n > J \Rightarrow \|A_n - A\| < \varepsilon$. Se dice que $A = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n$.

Teorema: Sea $A \in \text{lin}$. Son equivalentes

1) $\lim_{n \rightarrow \infty} A^n = 0 \in \text{lin}$. ($A^n = A \dots A$)

2) $\lim_{n \rightarrow \infty} A^n x = 0 \in \mathbb{R}^n \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$

3) $\rho(A) < 1$

4) $\exists \|\cdot\|$ norma matricial inducida tal que $\|A\| < 1$.

Proposición: Sea $A \in \mathbb{R}^n$ y $\|\cdot\|$ una norma vectorial. Entonces

$$\rho(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|A^n\|}$$

Definición: Sea $A \in \mathbb{R}^n$ invertible, y $\|\cdot\|$ una norma vectorial. Se llama número de condición de A a $C(A) := \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$.

• $C(A)$ indica el grado de variación que en un sistema dependiente de A en pequeños cambios en los cond. iniciales tiene en el resultado final.

MÉTODOS DIRECTOS DE RESOLUCIÓN

• Tratan de resolver $Ax=b$ mediante transformaciones elementales, transformando A en una matriz diagonal, triangular,...

• MÉTODO DE GAUSS: Se trata de transformar A en una triangular superior:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & & a_{nn} & b_n \end{array} \right) \xrightarrow{F_i = F_i - \frac{a_{i1}}{a_{11}} F_1, \quad i=2, \dots, n} \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22}^1 & \dots & b_2^1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n2}^1 & \dots & b_n^1 \end{array} \right) \xrightarrow{n-1 \text{ pasos}} \dots$$

$$\xrightarrow{\quad} \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & & & & b_1 \\ & a_{22}^1 & & & b_2^1 \\ & & a_{33}^2 & & b_3^2 \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & a_{nn}^{n-1} \\ & & & & b_n^{n-1} \end{array} \right)$$

T C

$\alpha^k \equiv$ paso k -ésimo.

• Estas transformaciones son posibles mediante multiplicación por matrices de paso $L_k = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$ donde $\alpha_{ij} = -\frac{a_{ij}^{k-1}}{a_{jj}^{k-1}}$.

- Por lo tanto, $T = L_{n-1} L_{n-2} \dots L_2 L_1 A$. Hasta aquí todo correcto ya que $a_{kk}^{k-1} \neq 0 \forall k$,
 y podemos dividir. Si en algún paso es 0 debemos intercambiar alguna fila para poder seguir
 el siguiente paso. Matricialmente, consiste en multiplicar por un matriz de permutación.

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} k) & l) \end{matrix} \\ \begin{matrix} k) \\ l) \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 0 & 1 & \\ & 1 & 0 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

matriz que intercambia la fila k y l -ésima.

En general se tiene una factorización $T = P_{n-1} P_{n-2} \dots L_1 P_1 A$.

- Al realizar cada paso, para reducir costos de redondeos, se puede hacer Gauss con pivote,
 que consiste en elegir de forma conveniente el elemento por el que se divide.

→ Pivote parcial: Se elige en cada paso el máximo absoluto de la columna que toque: se intercambian
 las filas correspondientes con tal de que se divida por dicho dato.

→ Pivote total: Se elige en cada paso el máximo absoluto de la matriz. Se deben intercambiar filas
 y columnas.

METODO LU: Se trata de encontrar una factorización $A = LU$, L triangular inferior y U
 triangular superior, lo que es equivalente a resolver un sistema de n^2 ecuaciones con $n^2 + n$ incógnitas.
 $a_{ij} = \sum_{k=1}^{\min(i,j)} l_{ik} u_{kj}$, $i, j = 1, \dots, n$. Fijando las n incógnitas restantes surgen los demás
 métodos de resolución:

→ Doolittle: $l_{ii} = \dots = l_{nn} = 1$.

→ Choleski: $l_{ii} = u_{ii} \forall i$, con A simétrica
 y def. positiva.

→ Crout: $u_{ii} = \dots = u_{nn} = 1$

• ¡OJO! La factorización LU no siempre es posible.

Proposición: Sea $A \in \mathbb{M}_n$.

$$\Delta_k \neq 0 \quad \forall k=1, \dots, n \implies \exists L, U : A=LU.$$

Corolario: Si $l_{11} = \dots = l_{nn} = 1 \implies$ La factorización LU es única.

Teorema: Sea $A \in \mathbb{M}_n$ invertible.

$$A \text{ admite factorización LU} \iff \Delta_k \neq 0 \quad \forall k=1, \dots, n.$$

• FACTORIZACIÓN DE CHOLESKY: Se trata de encontrar $B \in \mathbb{M}_n$ triangular inferior real tal que $A = BB^t$.

Teorema: Sea $A \in \mathbb{M}_n$ simétrica, invertible y real.

$$A \text{ admite factorización de Cholesky} \iff \Delta_k > 0 \quad \forall k=1, \dots, n.$$

Corolario: $b_{ii} > 0 \quad \forall i \implies$ La factorización es única.

• Factorización QR: Se trata de encontrar $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ortogonal y $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$ triangular superior tal que $A = QR$.

Definición: Dado $0 \neq u \in \mathbb{R}^n$, se llama matriz de Householder a una matriz

$$M \in \mathbb{R}^{n \times n} \text{ de la forma } M := I - 2 \frac{uu^t}{u^t u}.$$

Propiedades: Sea $M \in \mathcal{M}$ de Householder.

1) M es simétrica y ortogonal

2) $\forall 0 \neq v \in \mathbb{R}^n \exists 0 \neq u \in \mathbb{R}^n : Mv = v - u$.

• El método de Householder para la factorización QR consiste en usar una matriz de Householder.

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & \dots & A_n \end{pmatrix}; \text{ sea } A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}, \text{ se dice } u = \begin{pmatrix} a_{11} \pm \sqrt{a_{11}^2 + \dots + a_{n1}^2} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}, \text{ luego } M_1 A_1 = A_1 - u$$

$$= \begin{pmatrix} \pm \sqrt{\dots} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}. \text{ Entonces } M_1 A = \begin{pmatrix} \sqrt{\dots} & & \\ 0 & \ddots & \\ \vdots & & \ddots \\ 0 & & & \ddots \end{pmatrix}. \text{ Se trata de reducir estos pasos sucesivos}$$

al método de Gauss hasta obtener una matriz triáng. sup. $T = \underbrace{M_{n-1} \dots M_1}_M A = MA. \rightarrow$

$$\xrightarrow{\text{Inversa}} A = M^{-1} T = M_1^{-1} \dots M_{n-1}^{-1} T \stackrel{M_i \text{ ortog.}}{=} \underbrace{M_1 \dots M_{n-1}}_{\substack{Q \\ \text{ortogonal}}} \underbrace{T}_{R} = QR.$$

Corolario: $r_{ii} > 0 \forall i \Rightarrow$ La factorización QR es única.

• Como resolver $Ax=b$ con estas factorizaciones:

- Gauss: $Ax=b \rightsquigarrow \dots \rightsquigarrow Tx=c$, T triangular.

- LU: $Ax=b \Rightarrow L\underline{U}x=b \Rightarrow \begin{cases} Ly=b \\ Ux=y \end{cases} \rightarrow$ me vez tengo y

- Cholesky: $Ax=b \Rightarrow \underbrace{BB^t}_B x=b \Rightarrow \begin{cases} Bz=b \\ B^t x=z \end{cases} \rightarrow$ me vez tengo z

- QR: $Ax=b \Rightarrow QRx=b \Rightarrow Rx=Q^{-1}b=Q^t b \stackrel{\text{not}}{=} c \Rightarrow Rx=c$, R triang.

MÉTODOS ITERATIVOS DE RESOLUCIÓN

• Dado $Ax=b$, se trata de crear una sucesión $(x_m) = (G^m(x^0))$ que converja a la solución, para cierto operador G . El límite será un pto fijo de G . Si $F(x) = Ax-b$, se trata de buscar el equivalente a pto fijo de $G \Leftrightarrow x$ raíz de F .

• Si $A=M-N$, M invertible, entonces $G(x) := M^{-1}(Nx+b)$ converge bajo ciertos h'tos.

Proposición: Sea $A=M-N$ como ante, y consideremos la suc. $(x_m) = (M^{-1}(Nx^m+b))$

(x_m) es convergente $\Leftrightarrow \rho(M^{-1}N) < 1$
a un pto fijo

Lema: $\rho(M^{-1}N) < 1 \Rightarrow G(x) = M^{-1}(Nx+b) \ni$ contractiva

• Para verificar la prueba de la prop. (la " $\Leftarrow$ ") hace f'te tener en cuenta que si $\rho(M^{-1}N) < 1 \xrightarrow{\text{Lema}} G$ cumple $\xrightarrow{\text{Th Banach}} \exists$ pto fijo.

- Considérons pour les mêmes raisons le même décomposition de A :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ & 0 & \\ a_{ij} & & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ & 0 & a_{ij} \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$$

$$A = D + L + U$$

- MÉTHODE DE JACOBI : $M := D$, $N := -(L+U)$

- $M=D$ est inversible pour pouvoir considérer SPS en A le diagonal libre de 0's. Si ligne ou colonne intermédiaire de négative file/colonne.

- Le vec. $x^{n+1} = D^{-1} [-(L+U)x^n + b] \Leftrightarrow x_i^{n+1} = -\frac{1}{a_{ii}} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^n + b_i$

- MÉTHODE DE GAUSS-SEIDEL : $M := D+L$, $N := -U$

- M inversible, car ats SPS.

- Le vec. $x^{n+1} = (D+L)^{-1} [-U x^n + b] \Leftrightarrow x_i^{n+1} = -\frac{1}{a_{ii}} \left[\sum_{j < i} a_{ij} x_j^{n+1} + \sum_{j > i} a_{ij} x_j^n \right] + b_i$

- MÉTHODES SOR : $M := \frac{1}{w} D + L$, $N := \frac{1-w}{w} D - U$ ($w > 0$)

- M inversible SPS

- Noter que Gauss-Seidel est SOR avec $w=1$.

Definición: Una matriz A se dice diagonal dominante si $|a_{ii}| \geq \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}|$ ($\equiv$ suma de todos los a_{ij} excepto el de la diagonal) $\forall i, j$ estrictamente diagonal dominante si $>$.

Lema: A estrictamente diagonal dominante $\Rightarrow A$ invertible.

Proposición: A o A^t estrictamente diag. dominante $\Rightarrow$ El método de Jacobi es convergente.

Proposición: A o A^t estrictamente diag. dominante $\Rightarrow$ SOR, $0 < \omega \leq 1$, es convergente.

Corolario: A o A^t estr. diag. dominante $\Rightarrow$ Gauss-Seidel es convergente.

• Un método SOR se dice subrelajado si $0 < \omega < 1$, y sobrerelajado si $1 < \omega < 2$. ¿Y para $\omega = 2$?

Proposición: SOR para $\omega \geq 2$ no es convergente.

III : AUTOVALORES

Teorema (Gerschgorin): Sea $A = (a_{ij})$. Entonces $\text{Spec } A \subset \bigcup_{i=1}^n B[a_{ii}, \sum_{j \neq i}^n |a_{ij}|]$.

• MÉTODO DE KLYCLOV: Se trata de obtener el pol. caract. de una matriz A , digamos $p(x) = \sum a_i x^i$. Por Hamilton-Cayley, $p(A) = 0$, luego $\forall y \in \mathbb{C}^n$, $\sum a_i A^i y = 0$. Entonces $a_{n-1} A^{n-1} y + \dots + a_0 y = (-1)^{n+1} A^n y$ es un st. de n ec. con n incógnitas: $a_0, \dots, a_{n-1}$ (pues $a_n = 1$). Si elegimos $y \in \mathbb{C}^n : \{y, Ay, \dots, A^{n-1}y\}$ sea L.I. (¡obvio, lo sigue de prueba!) entonces tenemos una única sol. y el pol. caract. determinado.

• MÉTODO DE HEISENBERG:

Definición: Una matriz se dice de Heisenberg si es triangular superior con una subdiagonal: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & & a_{1j} \\ a_{21} & & a_{2j} \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{pmatrix}$.

• Sea A de Heisenberg, y $\alpha \in \mathbb{C}$. Entonces α es un autovalor $\Leftrightarrow \det(A - \alpha Id) = 0$ $\Leftrightarrow$ $\exists$ sol. no nula (infinta) de $(A - \alpha Id)x = 0$. Suponiendo $x_n = 1$, se van determinando desde la última ec. a la primera, los valores de las x_i , en función de α . Si $g(\alpha)$ es la 1ª ec., entonces $g(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha$ es un autovalor, i.e., $g(x)$ es (un múltiplo de) el pol. característico.

• MÉTODO DE LA POTENCIA: Se trata de calcular $\rho(A)$, Supn A diagonalizable, sea $x^0 \in \mathbb{R}^n$, y $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} = \text{Spec } A$. Sea $(x^k) := (A^k x^0)$, ie, $x^{k+1} = A x^k$.

- Si $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \dots$, $|\lambda_1| = \rho(A)$. Se define $\beta_k := \frac{v^t x^{k+1}}{v^t x^k}$,

con $v^t x^k \neq 0$, donde v es un vector arbitrario (se suele elegir $v = x^k$, y

a la β_k le llamo sucesión de los cocientes de Rayleigh). Entonces $\lim_{k \rightarrow \infty} \beta_k = \lambda_1$.

- Si $|\lambda_1| = |\lambda_2|$, se elige una subsecu. $(Y_k) \subset (\beta_k)$ formada por los términos pares

(o impares), ie, $Y_k = \frac{v^t x^{2k+2}}{v^t x^{2k}}$. Entonces $\lim_{k \rightarrow \infty} Y_k = \lambda_1^2$.

• MÉTODO DE LA POTENCIA INVERSA. Se trata de calcular el autovalor más próximo a un cierto $\alpha \in \mathbb{C}$ elegida. ($\alpha = 0$, es el de módulo mínimo). Dado α , si lo es adecuado, $\det(A - \alpha I) \neq 0$ y $\exists (A - \alpha I)^{-1} := B$. Se elige $y^0 \in \mathbb{R}^n$ arbitrario y se construye la sucesión $(y^k) = (B^k y^0)$ (ie $y^{k+1} = B y^k$) como en el método de la potencia, y de la sucesión (β_k) o (Y_k) , y a glicia, obteniéndose μ_1 o μ_1^2 (μ_1 = autovalor de mod mínimo de B). Puesto que $\lambda \in \text{Spec } A \Leftrightarrow \frac{1}{\lambda - \alpha} \in \text{Spec } B$, cada $\mu_i \in \text{Spec } B$

$\Rightarrow \mu_i = \frac{1}{\lambda_i - \alpha}$. Entonces $\frac{1}{|\mu_1|} = |\lambda_1 - \alpha| < |\lambda_2 - \alpha| < \dots$, Ligo $\lambda_1 = \frac{1}{\mu_1} + \alpha$.

• MÉTODO QR DE FRANKS : Sea $A \in M_n$. Consider $A_0 := A$, y hagamos un

factorizar QR de A_0 : $A_0 = Q_0 R_0$. Ento, definis $A_1 := R_0 Q_0$, y hagamos

un factorizar QR de A_1 : $A_1 = Q_1 R_1$, y $A_2 := R_1 Q_1$, Puesto que

$A_1 = R_0 Q_0 \Leftrightarrow Q_0 A_1 Q_0^{-1} = Q_0 R_0 = A_0 \Leftrightarrow A_0$ espectralmente semejante a A_1 , se tiene que todas las A_i son semejantes, i.e., tienen los mismos autovalores. Se prueba fácilmente

que si $B := \lim_{k \rightarrow \infty} A_k$, $\text{Spec}(A) = \text{Spec}(B)$, y que si $\text{Spec}(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$, y $|\lambda_1| > |\lambda_2| > \dots$, enton B es triangular, y si A es real y simétrica, B es diagonal.

~~Algoritmo de la potencia~~:

IV : ESPACIOS PREMILBERTIANOS

Definición: Sea E un K -EV, $K = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. Un producto escalar es una aplicación $\cdot : E \times E \rightarrow K$, $(e, v) \mapsto e \cdot v \stackrel{\text{NOT}}{=} \langle e, v \rangle \stackrel{\text{NOT}}{=} e|v$, que verifica:

i) Definitivo: $e \cdot e \geq 0$, y $e \cdot e = 0 \Leftrightarrow e = 0$.

ii) Hermitico (Simetrico): $e \cdot v = \overline{v \cdot e}$

iii) Sesquilineal: $(\lambda e + \mu v) \cdot w = \lambda (e \cdot v) + \mu (v \cdot w)$.

• i) tiene sentido por ii): $e \cdot e = \overline{e \cdot e}$; luego $e \cdot e \in \mathbb{R}$.

• $0 \cdot e = e \cdot 0 = 0$

• $w \cdot (\lambda e + \mu v) = \overline{\lambda} (w \cdot e) + \overline{\mu} (w \cdot v)$.

• Definimos como $\|e\| := \sqrt{e \cdot e}$.

Teorema: Sea E un EV con un producto escalar $\cdot$. Se cumple

1) Desigualdad de Cauchy - Schwartz:

$$|e \cdot v| \leq \|e\| \|v\|$$

2) Desigualdad de Minkowski o triangular

$$\|e + v\| \leq \|e\| + \|v\|$$

- La desigualdad triangular dice que la g.l.n. $\|\cdot\| : E \rightarrow \mathbb{K}$, $\|e\| := \sqrt{e \cdot e}$ es una norma sobre E .

Definición: Un espacio prehilbertiano es un espacio vectorial E dotado de una norma $\|\cdot\|$ que procede de un producto escalar. Diremos que el espacio es de Hilbert si además es completo, i.e., Cauchy $\Rightarrow$ convergente.

Teorema (von Neumann): Sea $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{K}$ -E.V. ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$).

E es prehilbertiano $\iff$ Se verifica la Identidad del Paralelogramo:

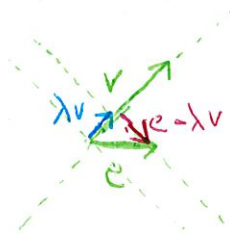
$$\|e+v\|^2 + \|e-v\|^2 = 2(\|e\|^2 + \|v\|^2)$$

Definición: Sea E un esp. preh. Se dice que e, v son ortogonales, $e \perp v$, si $e \cdot v = 0$.

Teorema (de Pitágoras): $e \perp v \Rightarrow \|e+v\|^2 = \|e\|^2 + \|v\|^2$.

Definición: Dados $e, v \neq 0 \in E$, el único $\lambda \in \mathbb{K}$: $e - \lambda v \perp v$ se le llama coeficiente de Fourier de e .

$$\bullet \lambda = \frac{e \cdot v}{\|v\|^2}$$



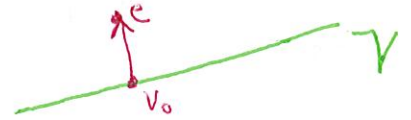
Definición: Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio normado (o nec. preh.). Se dice que $e, v \in E$ son ortogonales Birkhoff, $e \perp_B v$, si $\|e\| \leq \|e + \lambda v\| \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}$



Teorema: Sea $(E, \cdot)$ un esp. preh. y $e, v \in E$. Entonces

$$e \perp v \iff e \perp_B v$$

Teorema (de la proyección ortogonal): Sea $(E, \cdot)$ un esp. preh., $e \in E$, y $V \subseteq E$ completo de E . Entonces $\exists v_0 \in V : e - v_0 \perp V$.



Definición: Sea $(E, \cdot)$ preh. y $V \subseteq E$ completo. Se llame aplicación proyección ortogonal a

$$P_V : E \longrightarrow V$$

$$e \longmapsto v_0$$

• Cálculo de la proy. ortog.: Sea V, e . Si $v_0 = P_V(e)$, y $\{u_1, \dots, u_n\}$ base de V , $v_0 = \sum \alpha_i u_i$. Sea $U = (u_i \cdot u_j)$, $\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$; y $\beta = \begin{pmatrix} e \cdot u_1 \\ \vdots \\ e \cdot u_n \end{pmatrix}$. Entonces basta resolver el sistema $U\alpha = \beta$.

APROXIMACIÓN EN $C(I)$

• Sea $C(I) = \{f: I \rightarrow \mathbb{R} \text{ continuas}\}$, que es un EV de dim ∞ . Además,

$\|f\|_\infty := \max_{x \in I} |f(x)|$ es una norma, llamada norma uniforme.

• La aplicación $(f, g)_2 := \int_a^b f(x) g(x) dx$ es un producto escalar, y la norma que induce se

llama norma cuadrática: $\|f\|_2 := \left(\int_a^b f^2(x) dx \right)^{1/2}$. $(C[a, b], \|\cdot\|_2)$ es un esp. prehilbertiano.

• Definimos $P_n := \{ \text{polinios de grado } \leq n \} \subseteq C(I)$, es un subespacio completo, luego dado $f \in C(I)$,
 $\exists p(x) \in P_n : f - p(x) \perp P_n$.

Proposición (Propiedades de pol. ortog.): Sea $\{ \varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots \}$ una sucesión de polinios ortogonales en $C(I)$, tal que $\langle \varphi_k, \varphi_k \rangle = 1 \ \forall k$.

1) $\{ \varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n \}$ es una base de $P_n \ \forall n$.

2) No hay un polinomio de grado n ortogonal a φ_n , pero todo pol de grado $< n$ es ortogonal a φ_n .

3) Si la sucesión es estacional, es única salvo signo.

4) Para cada $n \in \mathbb{N}$, el polinomio mínimo de norma mínima es φ_n .

5) Para cada $n \in \mathbb{N}$, φ_n tiene todos sus raíces simples y están en $\overset{\circ}{I}$.

Polinios de Legendre: Consideramos $(C[-1,1], \|\cdot\|_2)$. Los polios de grado $\leq n$ son una base ortogonal. $P_n(x) := \frac{1}{2^n n!} \cdot \left[(x^2 - 1)^n \right]^{(n)}$; o bien: $P_0(x) = 1, P_1(x) = x$,

$$P_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{n+1} x P_n(x) - \frac{n}{n+1} P_{n-1}(x).$$

• Sobre $C(I)$, dado $w(x)$ una función, un producto escalar $\langle g, f \rangle_w := \int_a^b g(x) f(x) w(x) dx$.
 Este $w(x)$ se le llama peso.

Polinios de Tchebycheff: Sobre $(C[-1,1], \|\cdot\|_w)$, con $w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, se definen

los polios de Tchebycheff $T_n(x) := \cos(n \cdot \arccos x)$; ó $T_0(x) = 1, T_1(x) = x$,

$T_{n+1}(x) = 2x T_n(x) - T_{n-1}(x)$. Los pol. $T_n(x)$ son los pol. de grado n mínimos que más se

aproximan al eje X , i.e., $\|T_n\|_\infty = \max_{x \in [-1,1]} |T_n(x)| \leq \max_{x \in [-1,1]} |P_n(x)| = \|P_n\|_\infty, g(P_n) = n$.

• En general S_Δ es una función polinómica definida a trozos.

• Puesto que $S_\Delta^i := S_\Delta|_{[x_i, x_{i+1}]} = a_0^i + a_1^i x + a_2^i x^2 + a_3^i x^3$, tiene 4 coef. y hay n trozos, se trata de resolver un sist. de ec. de $4n$ ec. con $4n$ incógn.

$$- S_\Delta^{(k)}(x_i) = S_\Delta^{(k)}(x_{i+1}), \quad i = 1, \dots, n-1; \quad k = 0, 1, 2 \equiv \text{derivada}.$$

$$- S_\Delta^i(x_i) = y_i.$$

$$- S_\Delta''(a) = 0 = S_\Delta''(b), \quad \text{da la unicidad del spline (que el sol. sea SCD)}.$$

• Método de los Momentos: Se llame momento del spline $S_\Delta(x)$, $\Delta = \{a = x_0 < \dots < x_n = b\}$,

al vector $(M_0, \dots, M_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, donde $M_i := S_\Delta''(x_i)$. Si S_Δ es natural, al vector $(M_0, \dots, M_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, donde $M_i := S_\Delta''(x_i)$. Si S_Δ es natural, $M_0 = M_n = 0$. Se trata de calcular el spline en función de los datos y luego hacer los

momentos. Para cada i , S_Δ^i es un pol. de gr 3, luego $(S_\Delta^i)''$ es una recta $\alpha x + b$. Los coef.

se hacen eligiendo que en los nodos S'' valgan M_i 's. A continuación se integra y se hace S_Δ^i , en función de los momentos y ctes de integración. Aplicando los condic. de interp. se hacen las ctes en función de los momentos, luego se tiene en total $S_\Delta(x)$ en función de los datos. Para hacer los momentos se exige la continuidad de S_Δ^i en los nodos.

VI: INTEGRACIÓN

• Se trata de crear una fórmula $I_n(f)$ que aproxime a $I(f) := \int_a^b f$, $f \in \mathcal{C}[-1,1]$.

Definición: Una fórmula de cuadratura es una expresión del tipo

$$I_n(f) = \sum_{i=0}^n a_i f(x_i),$$

donde los $a_i \in \mathbb{R}$ se llaman pesos y los $x_i \in [-1,1]$ nodos. El error de la fórmula será $E_n(f) := I(f) - I_n(f)$. En todos los $\{x_0, \dots, x_n\} \subset [-1,1]$.

Definición: Se dice que una fórmula de cuadratura $I_n(f)$ tiene un grado de precisión $\geq k$ si es exacta para $p(x) \in \mathcal{P}_k$, i.e., $E_n(x^j) = 0 \quad \forall j=0, \dots, k$. Se dice que el grado de precisión es k si $E(x^{k+1}) \neq 0$.

FÓRMULAS INTERPOLADORAS: Se trata de aproximar f por su pol. de interpolación: $\int f \approx \int p_n$.

Usando la fórmula de Lagrange, dados $\{x_0, \dots, x_n\}$, $I_n(f) = \int_a^b p_n = \sum_{i=0}^n a_i f(x_i)$, donde $a_i = \int_a^b l_i(x) dx$.

FÓRMULAS DE NEWTON-COTES: Se usan pts equiespaciados. Para los casos simples se obtienen las mismas fórmulas de cuadratura que usando el pol. de interp.

- Trapezoido: $I_T(f) = \frac{f(a) + f(b)}{2} (b-a)$

- Simpson: $I_S(f) = \frac{h}{3} (f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2))$; $h = \frac{b-a}{2}$, $x_0 = a$, $x_1 = a+h$, $x_2 = b$.

• Las fórmulas compuestas consisten en aplicar el Trapecio o Simpson en cada uno de los intervalos $[x_i, x_{i+1}]$:

$$I_{T_n}(f) = \sum_{i=0}^{n-1} I_{T_i}(f) \quad ; \quad I_{S_n}(f) = \sum_i I_{S_i}(f).$$

• Se llama error de interpolación a $f - p_n$. Entonces $E_n(f) = \int_a^b f - p_n$.

Proposición: Sea $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, f suf. linc., $x_0, \dots, x_n \in [a, b]$ y $h = \frac{b-a}{n}$. Entonces

$$1) E_T(f) = - \frac{f''(\eta)}{12} (b-a)^3, \quad \eta \in (a, b).$$

$$2) E_S(f) = - \frac{1}{90} \frac{(b-a)^5}{2^5} f^{(4)}(\eta), \quad \eta \in (a, b)$$

$$3) E_{S_n}(f) = - \frac{h^4}{180} (b-a) f^{(4)}(\eta), \quad \eta \in (a, b)$$

• Para acotar el error, en general, se acota $f^{(4)}(\eta)$ por $\|f^{(4)}\|_\infty$, i.e., $\max_{x \in [a, b]} |f^{(4)}(x)|$.

Proposición: Sea $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, y $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, y sea $I_n(f) = \sum a_i f(x_i)$ una fórmula de cuadratura.

$I_n(f)$ tiene un grado de precisión $\geq n \iff I_n(f)$ es un polinomio de interpolación.

Proposición: Sea $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 < \dots < x_n$, $I_n(f) = \sum a_i f(x_i)$, $r > 0$

$I_n(f)$ tiene un grado de precisión $n+r \iff \int_a^b x^j (x-x_0) \dots (x-x_n) dx = 0 \quad \forall j=0, \dots, r-1$.

Teorema (Gauss) : Sea (Q_n) un suc. de polin. ortogonales en $([a,b], \|\cdot\|_2)$, y sea $I_n(f)$ una fórmula de cuadratura.

$$I_n(f) \text{ tiene un grado de precisión de } 2n+1 \iff \begin{cases} \text{los pts } x_0, \dots, x_n \text{ son los ceros de} \\ \text{Q}_{n+1} \text{ y los coef. } a_0, \dots, a_n \text{ son proceden} \\ \text{de interpolación} \end{cases}$$

Conclusión : El grado de precisión máximo que se puede obtener de una fórmula de cuadratura con $n+1$ nodos es $2n+1$.