I : CONEXIONES LINEALES

DEFINICIÓN ALTERNATIVA DE VD

• Sea X un conjunto cualquiera. Quiero dotarlo de estructura de VD.

<u>Definición</u>: Una <u>carta</u> sobre X es una biyección $\varphi : U \subseteq X \longrightarrow \overline{U} \subseteq \mathbb{R}^n$, donde U es un subconjunto y $\overline{U}$ un abierto del $\mathbb{R}^n$. Es denotado como (U, φ).

• Por la PUEP, $\varphi = (u_1, \dots u_n)$, que son las <u>funciones coordenadas</u>.

<u>Definición</u>: Un <u>atlas</u> sobre X es una colección $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ de cartas valoradas en $\mathbb{R}^n$ que cumple:

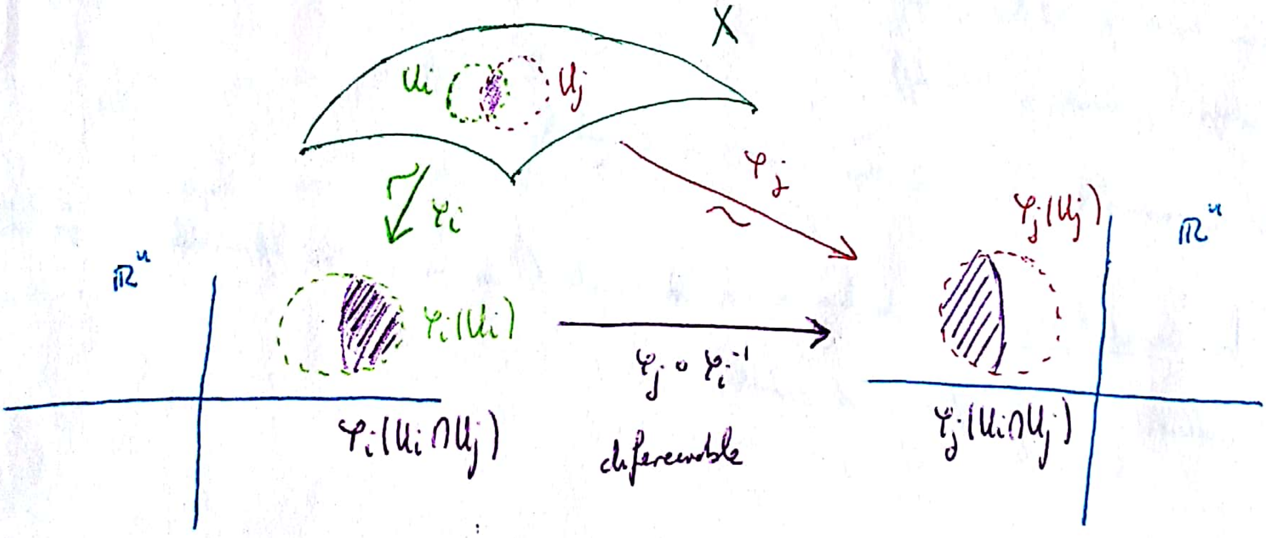
i) $\bigcup_{i \in I} U_i = X$

ii) $\varphi_i(U_i \cap U_j)$ es abierto del $\mathbb{R}^n$ $\forall i, j \in I$.

iii) Cuando $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, la aplicación $\varphi_j|_{U_i \cap U_j} \circ \varphi_i^{-1}|_{\varphi_i(U_i \cap U_j)} \overset{not}{=} \varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$,

$$\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \longrightarrow \varphi_j(U_i \cap U_j)$$

sea un difeomorfismo (de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$, en el sentido usual, de clase $\mathcal{C}^\infty$).



Estas funciones $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$ se llaman funciones de transición ó funciones de cambio de coordenadas.

• Sobre el conjunto de atlas de X podemos definir una rel de eq.:

$$\mathcal{A} \equiv \mathcal{A}' \overset{def}{\iff} \mathcal{A} \cup \mathcal{A}' \text{ es un atlas}$$

La unión de todos los atlas de una cierta clase de equivalencia es un atlas que está en dicha clase, y no está estrictamente contenido en ningún otro atlas de la clase: es un atlas maximal. Hay por tanto una correspondencia biunívoca

$$\left\{ \begin{matrix} \text{clases de equivalencia} \\ \text{de atlas} \end{matrix} \right\} \Longleftrightarrow \left\{ \text{atlas maximales} \right\}$$

Definición: Una estructura diferenciable sobre X es una clase de equivalencia de atlas, o de otra manera, un atlas maximal

• Dada una estructura diferenciable sobre X, con un atlas maximal $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i)\}$, cada uno de los U_i tiene canónicamente una topología: la única que hace que $\varphi_i : U \to \varphi_i(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ sea homeomorfismo. Ahora, dotados los U_i de topología, podemos definir una sobre X: la top final definida por las inclusiones $U_i \hookrightarrow X$. Concretamente, será: $G \subseteq X$ abierto $\iff$ $G \cap U_i$ abierto de U_i $\forall i$ $\iff$ $\varphi_i(G \cap U_i)$ abierto de $\mathbb{R}^n$ $\forall i$.

Definición: Llamaremos a esta topología sobre X topología inducida por el atlas o por la estructura diferenciable dada por un atlas $\mathcal{A}$.

Proposición: Sea X un conjunto con una estructura diferenciable dada por un atlas $\mathcal{A}$, entonces

1) Si para cada $p, q \in X$, bien están en dominios de cartas disjuntos bien están en el mismo dominio, entonces la topología inducida es Hausdorff.

2) Si $\mathcal{A}$ es numerable, entonces la top inducida es 2º contable.

Definición: Una variedad diferenciable de dim n es un conjunto X con una estructura diferenciable con cartas valoradas en $\mathbb{R}^n$ tal que la topología inducida sea Hausdorff y segundo contable.

FIBRADOS Y SECCIONES

Definición: Un fibrado vectorial (de dim k) está formado por dos variedades diferenciables E (el espacio total) y X (la base) junto con una aplicación epiyectiva $\pi : E \to X$ (la proyección) que cumple:

i) Cada fibra $E_p := \pi^{-1}(p)$ es un EV.

ii) Para cada pto $p \in X$ $\exists\, \mathcal{U}$ entorno de p y un difeomorfismo $\varphi : \pi^{-1}(\mathcal{U}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{U} \times \mathbb{R}^k$, llamado trivialización local de E tal que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(\mathcal{U}) \arrow[rr, "\varphi", "\sim"'] \arrow[dr, "\pi"'] & & \mathcal{U} \times \mathbb{R}^k \arrow[dl, "pr_1"] \\ & \mathcal{U} & \end{tikzcd}$$

iii) La restricción de φ a cada fibra, $\varphi : E_p \to \{p\} \times \mathbb{R}^n$, sea un isomorfismo de EV.

Ejemplos: 1) $TX := \coprod_{p \in X} T_pX$ fibrado tangente. La φ de la estructura de VD: $T\mathcal{U} \xrightarrow{\sim} \overline{\mathcal{U}} \times \mathbb{R}^n$.

2) $T^*X := \coprod_{p \in X} T_p^*X$ fibrado cotangente.

Definición: Una sección de un fibrado vectorial $\pi : E \to X$ es una aplicación diferenciable $s : X \to E$ tal que $\pi \circ s = Id_X$.

Notar que, considerando el fibrado tg TX y $\pi : TX \to X$, $\pi(D_p) = p$,

dar una sección (dif) de π $\equiv$ dar a cada pto $p \in X$ un $D_p \in T_pX$ $\equiv$ dar una familia de $\{D_p \in T_pX\}$ $\equiv$ dar un campo tg $D \in \mathfrak{D}(X)$.

Así que $\mathfrak{D}(X) = \{$campos tg de $X\} = Der(\mathcal{C}^\infty(X), \mathcal{C}^\infty(X)) = \{$secciones diferenciables de $\pi\}$.

Análogamente se tiene lo mismo con $\Omega(X)$, $\mathcal{T}^{(p,q)}(X)$, ... (secciones del correspondiente fibrado). En general estos espacios se denotan como $\mathcal{E}(X)$.

∘ (Navarrode):

Teorema: Sea X vD. Entonces hay un isomfo

$$\mathcal{T}_p^q(X) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^\infty(X)\text{-multilineal}}\left(\mathcal{D}^p(X), \mathcal{D}^q(X)\right).$$

Esto dice que un tensor R $(3,1)$, p.ej., se puede ver como $R(D_1, D_2, D_3, \omega) = \omega(\tilde{R}(D_1, D_2, D_3))$.

CONEXIONES LINEALES

Definición: Una conexión lineal, derivada covariante ó traslado paralelo en una vD X s una aplic.

$$\nabla : \mathcal{D}(X) \times \mathcal{D}(X) \longrightarrow \mathcal{D}(X)$$
$$(D, \bar{D}) \longmapsto D^\nabla \bar{D} \overset{\text{not}}{=} \nabla_D \bar{D}$$

que cumple:

i) $D^\nabla(\bar{D}_1 + \bar{D}_2) = D^\nabla \bar{D}_1 + D^\nabla \bar{D}_2$

ii) $D^\nabla(f\bar{D}) = Df \cdot \bar{D} + f \cdot D^\nabla \bar{D}$ (Regla de Leibniz)

iii) $(D_1 + D_2)^\nabla \bar{D} = D_1^\nabla \bar{D} + D_2^\nabla \bar{D}$

iv) $(fD)^\nabla \bar{D} = f \cdot D^\nabla \bar{D}$.

∘ En general, se puede definir una conexión sobre secciones diferenciables, ie, $\nabla : \mathcal{D}(X) \times \mathcal{E}(X) \longrightarrow \mathcal{E}(X)$, donde $\mathcal{E}(X) = \Omega^k(X)$ ó $\mathcal{T}_p^q(X), \dots$; que cumple i) – iv).

Lema: Si D ó $\bar{D} \in \mathcal{D}(X)$ se anulan en un abto U, también $D^\nabla \bar{D}$.

Corolario: $(D_1{}^\nabla D_2)_p$ solo depende de los valores de D_1 y D_2 en un entorno del punto.

Comprobación: si D_1 y $\bar{D}_1$; y D_2 y $\bar{D}_2$ coinciden en un cierto entorno de p, entonces $D_1{}^\nabla D_2 = \bar{D}_1{}^\nabla \bar{D}_2$ en ese entorno, en particular $(D_1{}^\nabla D_2)_p = (\bar{D}_1{}^\nabla \bar{D}_2)_p$.

__Corolario__: $(D_1{}^\nabla D_2)_p$ sólo depende del valor $D_{1,p}$ y del valor de D_2 en un entorno de p.

• (__Coordenadas de una conexión__). Estos corolarios afirman que ∇ induce una conexión lineal sobre cada abierto $\mathcal{U}$: $(D_{|\mathcal{U}})^\nabla(\bar{D}_{|\mathcal{U}}) = (D^\nabla \bar{D})_{|\mathcal{U}}$. Supongamos que $\{E_1,\dots,E_n\}$ es base del $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{U})$-módulo libre de rango n $\mathfrak{X}(\mathcal{U})$ (no necesariamente $\{\partial_1 \dots \partial_n\}$). Entonces será

$$E_i{}^\nabla E_j = \sum_{k=1}^{n} \Gamma_{ij}^k E_k$$

para n^3 funciones $\Gamma_{ij}^k \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{U})$, llamados __símbolos de Christoffel__. En particular la conexión está determinada por los símbolos, pues si $D = \sum_{i=1}^{n} f_i E_i$, $\bar{D} = \sum_{j=1}^{n} g_j E_j$,

$$\boxed{D^\nabla \bar{D} = \sum_{k=1}^{n} \left(D g_k + \sum_{ij} f_i g_j \Gamma_{ij}^k \right) E_k .} \qquad (*)$$

__Ejemplo__: La __conexión euclídea__ o __estándar__ del $\mathbb{R}^n$ (ó $\mathbb{A}_n$, ó un EV de dim n) es, con las not. de antes,

$$D^{\nabla_0} \bar{D} := \sum_{k=1}^{n} D g_k \, \partial_k \quad , \quad \text{i.e.,} \quad \underline{\underline{\Gamma_{ij}^k = 0}} \ \forall i j k .$$

__Proposición__: Sea X una VD con coordenadas globales (i.e., cubierta por una única carta). Existe una correspondencia

$$\{\text{conexiones lineales sobre } X\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{elecciones de } n^3 \text{ funciones} \\ \Gamma_{ij}^k \in \mathcal{C}^\infty(X) \ (\text{sím. de Christ.}) \end{array} \right\}$$

mediante la igualdad $(*)$ (con $E_i = \partial_i$).

__Teorema__: Toda variedad diferenciable admite conexiones lineales.

Teorema: Toda conexión lineal se extiende de modo único a una derivación de tensores (donde el producto es $\otimes$) que conserve el tipo y

1) $D^\nabla f = Df$

2) $D^\nabla (C_i^j T) = C_i^j (D^\nabla T)$:

$$\boxed{(D^\nabla \omega)(\bar{D}) = D(\omega(\bar{D})) - \omega(D^\nabla \bar{D})}$$

$$\boxed{(D^\nabla T)(D_1 \dots \omega_q) = D(T(D_1 \dots \omega_q)) - T(D^\nabla D_1, \dots, \omega_q) - \dots - T(D_1, \dots, D^\nabla \omega_q)}$$

Definición: Se llama diferencial covariante ó derivada covariante total de $T \in \mathcal{T}_p^q(X)$ al tensor $\nabla T \in \mathcal{T}_{p+1}^q(X)$ definido por

$$\nabla T(D, D_1 \dots \omega_q) := (D^\nabla T)(D_1 \dots \omega_q).$$

Diremos que T es paralelo cuando $\nabla T = 0$.

- $\nabla f = df$.

Definición: Se llama Hessiano de $f \in \mathcal{C}^\infty(X)$ a $\nabla^2 f := \nabla(\nabla f) \in \mathcal{T}_2^0(X)$.

- $\nabla^2 f(D_1, D_2) = D_1(D_2 f) - (D_1^\nabla D_2)(f)$.

- Si $D = \sum f_i \partial_i$, $\omega = \sum g_i dx_i$ en un abierto coordenado, la 1-forma $D^\nabla \omega$ es

$$D^\nabla \omega = \sum_{k=1}^n \left(D g_k - \sum_{ij} f_i g_j \Gamma_{ij}^k \right) dx_k.$$

Definición: Se llama torsión de una conexión lineal ∇ al tensor de tipo $(2,1)$

$$\begin{aligned} Tor_\nabla : \mathcal{D}(X) \times \mathcal{D}(X) &\longrightarrow \mathcal{D}(X) \\ (D, \bar{D}) &\longmapsto Tor_\nabla(D, \bar{D}) := D^\nabla \bar{D} - \bar{D}^\nabla D - [D, \bar{D}]. \end{aligned}$$

Se dice que ∇ es simétrica cuando $Tor_\nabla = 0$.

• Es inmediato que Tor_∇ es alternada en los dos índices covariantes.

__Lema__: Sea $(U; u_1, \dots u_n)$ un cierto abierto coordenado.

$$\nabla \text{ simétrica} \iff \Gamma_{ij}^{k} = \Gamma_{ji}^{k} \quad \forall\, i,j,k.$$

__Lema__: ∇ es simétrica $\iff$ el Hessiano de cualquier función dif es un tensor $(2,0)$ simétrico.

__Definición__: Se llama __curvatura__ de ∇ al tensor de tipo $(3,1)$

$$\begin{aligned} R : \mathcal{D}(X) \times \mathcal{D}(X) \times \mathcal{D}(X) &\longrightarrow \mathcal{D}(X) \\ (D_1, D_2, D_3) &\longmapsto R(D_1,D_2,D_3) := -D_1^\nabla D_2^\nabla D_3 + D_2^\nabla D_1^\nabla D_3 + [D_1,D_2]^\nabla D_3 \end{aligned}$$

• $R \equiv R_{2,1}^{1}$ es tensor hemisimétrico en los dos primeros índices.

__Proposición__ (Identidad de Bianchi): Si ∇ es simétrica,

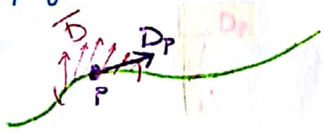
$$\boxed{R(D_1,D_2,D_3) + R(D_2,D_3,D_1) + R(D_3,D_1,D_2) = 0}$$

IDENTIDAD DE BIANCHI.

• $R = 0$ para la conexión usual del $\mathbb{R}^n$.

__CAMPOS DE VECTORES A LO LARGO DE CURVAS__

__Proposición__: Dada una conexión ∇, el vector $(D^\nabla \bar{D})_p$ solo depende de D_p y del valor del campo $\bar{D}$ a lo largo de una curva que pase por p con vector tangente D_p.



__Recall__: Sea $\sigma : I \longrightarrow X$ una curva parametrizada, y sea t la coordenada de I. El __vector tangente__ a σ en $t_0 \in I$ es $T_{t_0} := \sigma_*\left((\partial_t)_{t_0}\right)$. Se dice que σ es __curva integral__ de un campo $D \in \mathcal{D}(X)$ si $T_{t_0} = D_{\sigma(t_0)}$. En coordenadas, si $\sigma(t) = (g_1(t), \dots, g_n(t))$, $g_i = \sigma^* x_i$, entonces __$T_{t_0} = (g_1'(t_0), \dots, g_n'(t_0))$ en__ la base $\{(\partial_{x_i})_{\sigma(t_0)}\}$ de $T_{\sigma(t_0)}X$. Además, $\sigma = (g_1 \dots g_n)$ es curva integral de $D = \sum F_i \partial_i$ sii $g_1, \dots g_n$ son sol de

$$\left.\begin{aligned} g_1' &= F_1(g_1 \cdots g_n) \\ &\vdots \\ g_n' &= F_n(g_1 \cdots g_n) \end{aligned}\right\}.$$

Definición: Un campo tangente con soporte en una curva $\sigma: I \longrightarrow X$ (ó a lo largo de una curva) es una familia de vectores $\{D_t \in T_{\sigma(t)}X\}_{t\in I}$. Tal campo se dirá diferenciable (lo que siempre supondremos) cuando $Df(t) := D_t f$ sea dif $\forall f \in \mathcal{C}^\infty$(abto de X), de modo que define una derivación $D: \mathcal{C}^\infty(X) \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(I)$.
$f \longmapsto Df$

El $\mathcal{C}^\infty(I)$-módulo de campos a soporte en σ se denotará $\mathcal{D}_\sigma := \mathrm{Der}_{\mathbb{R}}(\mathcal{C}^\infty(X), \mathcal{C}^\infty(I))$.

- En un abto coordenado, todo campo a soporte será $D_t = \sum f_i(t)\,\partial_i$, $f_i \in \mathcal{C}^\infty(I)$.

Definición: Un campo con soporte en σ se dice extensible si existe un campo tangente global que coincide con él sobre la curva.

- La proposición afirma que si T es un campo tangente a σ, y $D \in \mathcal{D}(X)$, $T^\nabla D$ está bien def como campo a soporte a la curva.

Teorema: Sea (X,∇) una VD dotada de una conexión lineal. Fijada una curva $\sigma: I \longrightarrow X$, existe una única forma de extender $\partial_t^\nabla: \mathcal{D}(X) \longrightarrow \mathcal{D}_\sigma$ a una derivación covariante $\partial_t^\nabla: \mathcal{D}_\sigma \longrightarrow \mathcal{D}_\sigma$ de campos a soporte (aquí ∂_t denota el vector tangente a la curva $T = \partial_t \in \mathcal{D}_\sigma$), esto es,

1) $\partial_t^\nabla(D+\bar{D}) = \partial_t^\nabla D + \partial_t^\nabla \bar{D}$, $\quad D, \bar{D} \in \mathcal{D}_\sigma$

2) $\partial_t^\nabla(fD) = f'\cdot D + f\cdot\partial_t^\nabla D$, $\quad f \in \mathcal{C}^\infty(I)$, $D \in \mathcal{D}_\sigma$.

3) $\partial_t^\nabla D = \partial_t^\nabla \tilde{D} \left(\equiv T^\nabla \tilde{D}\right)$, $\quad D \in \mathcal{D}_\sigma$ y $\tilde{D} \in \mathcal{D}(X)$ extensión de D a X.

(*)

TRANSPORTE PARALELO

Definición: Sea (X,∇) y $\sigma: I \to X$ una curva. Se dice que $D \in \mathcal{D}_\sigma$ es paralelo a lo largo de σ si $\partial_t^\nabla D = 0$. Un campo $D \in \mathcal{D}(X)$ se dirá paralelo cuando sea paralelo para toda curva de X.

Lema: $D \in \mathcal{D}(X)$ paralelo $\Longleftrightarrow \nabla D \equiv 0$.

Lema: Sea $(\mathbb{R}^n, \nabla_0 =$ conex. euclídea$)$, y $\sigma: I \to \mathbb{R}^n$. Los campos de vectores paralelos a σ son aquellos cuyas componentes son funciones ctes.

(*): Sea $D_t = \sum g_i(t)\,\partial_i$ un campo a soporte a $\sigma(t) = (\sigma_1(t), \dots, \sigma_n(t))$. Entonces

$$\boxed{\partial_t^\nabla D = \sum_{k=1}^n \left(g_k' + \sum_{i,j} \sigma_i'\, g_j\, (\Gamma_{ij}^k \circ \sigma) \right) \partial_k}$$

Teorema (Transporte paralelo): Sea $\sigma : I \to X$ una curva, y $D_p \in T_p X$, $p = \sigma(t_0)$. Existe un único campo $D \in \mathcal{D}_\sigma$ paralelo a σ tal que $D_{t_0} = D_p$. Tal campo de vectores se llama trasladado paralelo de D_p a lo largo de σ.

Definición: Se llama traslado paralelo de t_0 a $t \in I$ al operador

$$P_{t_0,t} : T_{\sigma(t_0)} X \xrightarrow{\sim} T_{\sigma(t)} X$$
$$D_p \longrightarrow D_{\sigma(t_0)} \equiv \text{transporte paralelo a } \sigma(t),$$

que es un isomorfismo de EV (su inversa es P_{t,t_0}).

Remark: El transporte paralelo depende de la curva.

Proposición: Sea (X,∇). La derivada covariante a lo largo de una curva $\sigma : I \to X$ puede ser recuperada del transporte paralelo, vía

$$(\partial_t^\nabla D)_{t_0} = \lim_{t \to t_0} \frac{P_{t t_0}(D_t) - D_{t_0}}{t - t_0}.$$

Más aún, dados $D, \bar{D} \in \mathcal{D}(X)$, si $\sigma_p(t)$ es la curva integral de D que pasa por p en 0,

$$(D^\nabla \bar{D})_p = \lim_{t \to 0} \frac{P_{t 0}(\bar{D}_{\sigma_p(t)}) - \bar{D}_p}{t}.$$

II : GEODÉSICAS

Definición: Sea (X,∇) una VD dotada de una conexión lineal. Una curva $\sigma : I \to X$ se dice **geodésica** si cumple que $\partial_t{}^{\nabla}\partial_t = 0$ (i.e., $\partial_t{}^{\nabla} T = 0$, i.e., $T^{\nabla} T = 0$).

Definición. Diremos que una geodésica es **maximal** si no puede extenderse a una geodésica definida en un intervalo mayor; y diremos que es **completa** cuando $I = \mathbb{R}$.

• Las geodésicas de $(\mathbb{R}^n, \nabla_0)$ son las rectas.

Teorema (Existencia y Unicidad de Geodésicas). Dados $p \in X$, y $D_p \in T_p X$, existe un intervalo I con $0 \in I$ y una geodésica $\sigma : I \to X$ que pase por p en 0 con vector tangente D_p. Además, dos geodésicas de este tipo coinciden en el intervalo común de definición.

• Se sigue del teorema que dado $p \in X$ y $D_p \in T_p X$, existe una única **geodésica maximal** definida en un cierto intervalo I ($I = \cup I_j$ de todas las geodésicas ...). Se suele llamar geodésica de punto inicial p y velocidad inicial D_p, y se denota como σ_{D_p}.

$$\boxed{\sigma_k'' + \sum_{i,j} \sigma_i' \sigma_j' (\Gamma_{ij}^k \circ \sigma) = 0, \quad k = 1 \dots n}$$ Condición de geodésica

Proposición: Sea $\sigma : I \to X$ una curva. Toda parametrización que haga a σ geodésica está determinada salvo transformaciones afines (i.e., $t \rightsquigarrow \alpha t + \beta$). I.e., existe una única parametrización (salvo transf. afines) con la que una curva es geodésica.

Lema (de Homogeneidad). Sea (X,∇) VD con una conexión lineal y sea $v \in T_p X$.

$$\sigma_{\lambda v}(t) = \sigma_v(\lambda t) \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

(cuando algún término esté definido).

Teorema. Sea (X,∇) VD. Existe $G \in \mathfrak{D}(TX)$ con la siguiente propiedad:

Una curva $\beta : I \to TX$ es una curva integral de G $\iff$ β es el levantamiento de una geodésica $\sigma : I \to X$ tal que $\beta(t) = (\sigma(t), T_t)$, $(T = \sigma_*(\partial_t))$

Es decir, $\sigma(t) = (\pi \circ \beta)(t)$, donde $\pi : TX \to X$, $D_p \mapsto p$.

Definición: Al campo $G \in \mathfrak{X}(TX)$ anterior se le denomina campo de vectores geodésico.

Proposición: Sean $\nabla, \bar{\nabla}$ dos conexiones lineales. Su diferencia $A(D_1, D_2) := D_1^{\nabla} D_2 - D_1^{\bar{\nabla}} D_2$ es un tensor $(2,1)$, que cumple:

1) $\nabla, \bar{\nabla}$ tienen las mismas geodésicas $\Longleftrightarrow$ A es hemisimétrico.

2) $\nabla, \bar{\nabla}$ tienen el mismo tensor torsión $\Longleftrightarrow$ A es simétrico.

3) $\nabla = \bar{\nabla}$ $\Longleftrightarrow$ tienen las mismas geodésicas y el mismo tensor torsión.

APLICACIÓN EXPONENCIAL

Definición: Se llama dominio de la aplicación exponencial a

$$\mathcal{E} := \{ v \in TX : \sigma_v \text{ está definida en un entorno que contiene a } [0,1] \},$$

la aplicación exponencial es

$$\begin{aligned} \exp : \ & \mathcal{E} \longrightarrow X \\ & v \longmapsto \exp(v) := \sigma_v(1), \end{aligned}$$

y la aplicación exponencial restringida a un punto $p \in X$ es

$$\begin{aligned} \exp_p : \ & \mathcal{E}_p \longrightarrow X \\ & v \longmapsto \exp_p(v) := \sigma_v(1), \end{aligned} \qquad \mathcal{E}_p := \mathcal{E} \cap T_pX.$$

Proposición (Propiedades):

1) $\mathcal{E} \subset TX$ es un abierto que contiene a 0, y para cada $p \in X$, $\mathcal{E}_p$ es estrellado resp. a 0.

2) Para cada $v \in TX$, la geodésica σ_v está dada por

$$\sigma_v(t) = \exp_p(tv)$$

(cuando algún lado está definido). Es decir, $\exp_p$ transforma rectas que pasan por el origen en geodésicas.

3) exp es diferenciable.

COORDENADAS NORMALES

Lema (del Entorno normal): Dado $p \in X$, existe $V \subset T_pX$ entorno de 0 en T_pX y un entorno U de $p \in X$ tal que $\exp_p : V \xrightarrow{\sim} U$ es difeomorfismo.

Definición: Un entorno U de $p \in X$ se llama entorno normal si es difeomorfo como en el lema anterior a un entorno abierto de 0 $V \subset T_pX$. Por def, todo pto de un entorno normal está unido a p mediante una geodésica.

- Dada una base $\{E_1, \dots E_n\}$ de T_pX, tenemos el isomorfismo evidente $E : (\alpha_1 \dots \alpha_n) \in \mathbb{R}^n \xrightarrow{\sim} \sum \alpha_i E_i \in T_pX$.

Definición: Se llaman coordenadas normales centradas en p a las coordenadas que sobre un entorno normal U de p define la carta $\varphi := E^{-1} \circ \exp_p^{-1}$

$$\begin{tikzcd} \overline{U} \subset \mathbb{R}^n \arrow[r, "E", "\sim"'] & T_pX \supset V \arrow[r, "\exp_p", "\sim"'] & U \subset X \arrow[ll, bend left, "\varphi"] \end{tikzcd}$$

Proposición (Propiedades): Sea (X, ∇) y $(U; x_1, \dots x_n)$ un abierto coordenado normal centrado en p.

1) Dado $v \in T_pX$, la geodésica σ_v se representa en coordenadas normales como el segmento radial

$$\sigma_v(t) = (tv_1, \dots, tv_n) \qquad , \; v = \sum v_i (\partial_i)_p .$$

(a condición de que σ_v esté en U).

2) En tales coordenadas $p = (0, \dots, 0)$

3) En tales coordenadas, los símbolos de Christoffel cumplen que

$$\Gamma_{ij}^k(p) + \Gamma_{ji}^k(p) = 0 \quad , \qquad i,j,k = 1 \dots n.$$

Definición: Por 1), las geodésicas contenidas en el entorno normal que comienzan en p se denominan geodésicas radiales.

CONEXIONES ESPECIALES

__Definición__: Una conexión ∇ se dice __localmente euclídea__ si todo punto posee un entorno coordenado U con símbolos de Christoffel nulos, $\partial_i{}^\nabla\partial_j = 0$ en U.

__Definición__: Una conexión ∇ se dice __plana__, llana o un paralelismo local si todo punto posee un entorno dotado de una base $\{D_1 \dots D_n\}$ de $\mathcal{D}(U)$ de campos paralelos, $D^\nabla D_i = 0 \quad \forall D \in \mathcal{D}(U)$.

__Proposición__: El transporte paralelo no depende localmente de la curva $\iff$ ∇ es plana.

__Proposición__: Sea (X, ∇) una variedad afín.

$$\nabla \text{ localmente euclídea} \iff \begin{cases} \nabla \text{ plana} \\ \nabla \text{ simétrica} \end{cases}.$$

__Teorema__: ∇ plana $\iff$ $R = 0$.

__Corolario__: Son equivalentes:

1) ∇ loc. euclídea
2) ∇ simétrica y plana
3) $Tor_\nabla = 0$, $R = 0$.

III : VARIEDADES RIEMANNIANAS

Definición: Sea X una VD. Una métrica riemanniana sobre X es un campo tensorial de tipo $(2,0)$

$g: \mathfrak{D}(X) \times \mathfrak{D}(X) \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(X)$, $g = \{ g_p \in \mathcal{T}_2^0(T_pX) \}$ tal que para cada punto p

g_p es un producto escalar (métrica simétrica def positiva).

Llamaremos variedad riemanniana al par (X, g).

- En un abierto coordenado $(U; u_1 \dots u_n)$, $g = \sum_{ij} g_{ij}\, du_i \otimes du_j$, con $g_{ij} \in \mathcal{C}^\infty(X)$. En concreto, $g_{ij} = g(\partial_{u_i}, \partial_{u_j})$.

- Una base de $\mathfrak{D}(U)$ también se llama referencia local.

Definición. Una base $\{D_1 \dots D_n\}$ de $\mathfrak{D}(U)$ se dice ortonormal si $g(D_i, D_j) = \delta_{ij}$.

- Dadas (X, g), (Y, h) VR, tenemos la variedad producto $X \times Y$ y la métrica $g \otimes h$, llamada métrica producto. Como $T_{(x,y)}(X \times Y) = T_xX \oplus T_yY$, $\mathfrak{D}(X \times Y) = \mathfrak{D}(X) \oplus \mathfrak{D}(Y)$ y todo campo es $D + E$, $D \in \mathfrak{D}(X)$, $E \in \mathfrak{D}(Y)$. Así,

$$(g \otimes h)(D + E, \bar{D} + \bar{E}) = g(D, \bar{D}) + h(E, \bar{E}).$$

y en coordenadas

$$g \otimes h = \left(\begin{array}{c|c} (g) & \\ \hline & (h) \end{array} \right).$$

Teorema: Toda variedad diferenciable admite una métrica riemanniana.

Teorema: Sea X una variedad compacta. Existe una métrica de Lorentz sobre $X \iff \chi(X) = 0$.

Corolario: Las únicas superficies compactas en las que se puede definir una métrica de Lorentz es el toro y la botella de Klein.

Definición: Sea (X, g) y (Y, h) vr. Una aplicación diferenciable $\varphi : X \to Y$ se dice conforme si existe $\lambda : X \to \mathbb{R}$ diferenciable tal que

$$e^{\lambda(p)} g_p(D_p, \overline{D}_p) = h_{\varphi(p)}(\varphi_* D_p, \varphi_* \overline{D}_p) \qquad \forall D, \overline{D} \in \mathfrak{D}(X),\ p \in X.$$

A dicho factor e^{λ} se le llama factor conforme de φ. Si φ es conforme y $\lambda = 0$, se llama isométrica, y si φ es un difeomorfismo isométrico se llama isometría.

- $\mathcal{I}(X) = \{ \text{isometrías } X \to X \}$ es un grupo, llamado grupo de las isometrías.

Definición: Una vr (X, g) se dice homogénea si $\mathcal{I}(X)$ es transitivo, i.e., dados $p, q \in X$, existe $\varphi \in \mathcal{I}(X)$ tal que $\varphi(p) = q$.

GRUPOS DE LIE

Definición: Un grupo de Lie es una variedad diferenciable G con estructura de grupo tal que las operaciones

$$\begin{array}{ccc} G \times G & \xrightarrow{\ \cdot\ } & G \\ (p, q) & \longmapsto & p \cdot q \end{array} \quad , \quad \begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\ -1\ } & G \\ p & \longmapsto & p^{-1} \end{array}$$

(o equivalentemente, $G \times G \to G$, $(p, q) \mapsto pq^{-1}$) sean diferenciables.

Ejemplos: 1) $(\mathbb{R}^n, +)$, $(\mathbb{C}^n, +)$, $(\mathbb{R} - 0, \cdot)$, $(\mathbb{C} - 0, \cdot)$, $S^1 \subset (\mathbb{C} - 0, \cdot)$ son grupos de Lie.

2) El producto directo de grupos de Lie también lo es, y por tanto $T_n = S^1 \times \dots \times S^1$.

3) El grupo lineal general $Gl(n, \mathbb{R}) = \{ A \in M_n(\mathbb{R}) : \det A \neq 0 \}$.

Proposición: Sea $(G, \cdot)$ un grupo de Lie y $K \subset G$ una subvariedad (inmersión ó subvariedad regular) que sea subgrupo. Entonces $(K, \cdot)$ es grupo de Lie, y si K es cerrado, es subvariedad regular.

Ejemplos: 1) $Sl(n,\mathbb{R}) = \{A \in Gl(n,\mathbb{R}) : \det A = 1\}$ grupo especial lineal.

2) $O(n,\mathbb{R}) = \{A \in Gl(n,\mathbb{R}) : AA^t = Id\}$ grupo ortogonal

3) $SO(n,\mathbb{R}) = \{A \in Gl(n,\mathbb{R}) : AA^t = Id,\ \det A = 1\}$ grupo especial ortogonal

4) $\mathcal{U}(n) = \{A \in Gl(n,\mathbb{C}) : A\bar{A}^t = Id\}$ grupo unitario

5) $S\mathcal{U}(n) = \{A \in Gl(n,\mathbb{C}) : A\bar{A}^t = Id,\ \det A = 1\}$ grupo especial unitario.

Teorema (Hopf): Las únicas esferas $S_n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ que son grupos de Lie son la S_0, S_1, y S_3.

En concreto, $S_0 \simeq O(1)$, $S_1 \simeq \mathcal{U}(1)$, $S_3 \simeq S\mathcal{U}(2)$.

Definición: Sea $(G,\cdot)$ un grupo de Lie. Para cada $p \in G$, llamaremos traslación a izquierda a la aplicación

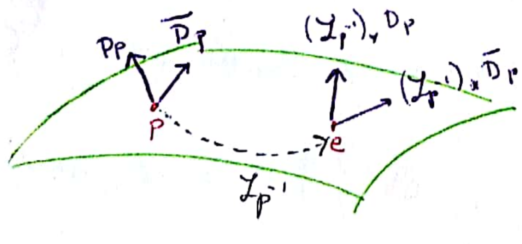
$$\begin{aligned} \mathcal{L}_p : G &\longrightarrow G \\ q &\longmapsto pq \end{aligned}$$

que obviamente es difeomorfismo.

Definición: Sea $(G,\cdot)$ un grupo de Lie. Una métrica riemanniana g sobre G se dice invariante a izquierda si para cada $p \in G$, $\mathcal{L}_p$ es una isometría.

Proposición: Sea $(G,\cdot)$ un grupo de Lie, y sea $\langle \cdot,\cdot \rangle$ un producto escalar en T_eG (e neutro de G). Existe una métrica riemanniana sobre G que es invariante a izquierda, dada en cada punto por

$$\begin{aligned} g_p : T_pG \times T_pG &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (D_p, \bar{D}_p) &\longmapsto g_p(D_p,\bar{D}_p) := \langle (\mathcal{L}_p^{-1})_* D_p, (\mathcal{L}_p^{-1})_* \bar{D}_p \rangle . \end{aligned}$$



Teorema: Todo grupo de Lie dotado de una métrica riemanniana invariante a izquierda es un espacio homogéneo.

CONEXIÓN DE LEVI-CIVITA

Definición: Una conexión lineal ∇ sobre (X, g) se dice compatible con g si se cumple que

$$D\left(g(D_1, D_2)\right) = g(D^\nabla D_1, D_2) + g(D_1, D^\nabla D_2) \qquad \forall D, D_1, D_2 \in \mathfrak{D}(X).$$

"regla de Leibniz"

Proposición: Sea (X, g) una variedad riemanniana y ∇ una conexión lineal sobre ella. Son equivalentes:

1) ∇ es compatible con g

2) $\nabla g = 0$

3) Para cada curva $\sigma : I \to X$ y $D, \overline{D} \in \mathfrak{D}_\sigma$ se cumple

$$\partial_t\left(g(D, \overline{D})\right) = g(\partial_t^\nabla D, \overline{D}) + g(D, \partial_t^\nabla \overline{D}).$$

4) Si $D, \overline{D} \in \mathfrak{D}_\sigma$ son paralelos a lo largo de σ, $g(D, \overline{D}) = cte$

5) El transporte paralelo $P_{t_0 t_1} : T_{\sigma(t_0)}X \longrightarrow T_{\sigma(t_1)}X$ es una isometría para cualquier curva.

Corolario: Sea (X, g) VR y ∇ una conexión compatible con g. Dada una curva $\sigma : I \to X$, la extensión de una base ortonormal de T_pX $(\sigma(0) = p)$ a lo largo de σ induce una base ortonormal $\{D_1 \dots D_n\}$ de campos a soporte en la curva.

Teorema (Fundamental de la Geometría Riemanniana): Toda variedad riemanniana posee una única conexión lineal simétrica y compatible con g, llamada conexión de Levi-Civita o conexión riemanniana.

Observaciones:

1. El resultado también es cierto para métricas pseudo-riemannianas.

2. La conexión está univocamente determinada por la fórmula de Koszul:

$$\boxed{\begin{aligned} g(D_1^\nabla D_2, D_3) = \tfrac{1}{2}\Big[& D_1\left(g(D_2, D_3)\right) + D_2\left(g(D_3, D_1)\right) - D_3\left(g(D_1, D_2)\right) \\ & - g(D_2, [D_1, D_3]) - g(D_3, [D_2, D_1]) + g(D_1, [D_3, D_2])\Big) \end{aligned}}$$

$$+ g(D_2, [D_3, D_1]) + g(D_3, [D_1, D_2]) - g(D_1, [D_2, D_3])$$

3. En un abierto coordenado $(U; u_1 \dots u_n)$, si $g = (g_{ij})$ y $g^{-1} = (g^{ij})$, $g_{ij}, g^{ij} \in \mathcal{C}^\infty(U)$, entonces los símbolos de Christoffel de ∇ vienen dados por

$$\boxed{\Gamma_{ij}^{k} = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{n} g^{kl} \left(\frac{\partial g_{jl}}{\partial u_i} + \frac{\partial g_{il}}{\partial u_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_l} \right)}$$

<u>Proposición</u> (Naturalidad de la Conexión Riemanniana): Sea $\varphi : (X, g) \longrightarrow (Y, \bar{g})$ una isometría.

1) φ lleva la conexión de Levi-Civita ∇ de g a la de $\bar{g}$, $\bar{\nabla}$, en el sentido de que:

$$\varphi_*(D_1 \nabla D_2) = \varphi_* D_1 \bar{\nabla} \varphi_* D_2 .$$

2) Dada una curva $\sigma : I \longrightarrow X$ y $D \in \mathfrak{D}_\sigma$,

$$\varphi_*(\partial_t^\nabla D) = \partial_t^{\bar{\nabla}} \varphi_* D .$$

<u>Definición</u>: Sea (X, g) vr y $Y \subseteq X$ una subvariedad, $i : Y \hookrightarrow X$, e identificamos $T_p Y = i_*(T_p Y) \subseteq T_p X$.
Llamaremos <u>espacio normal</u> de Y en p a

$$N_p Y := (T_p Y)^\perp = \{ v \in T_p X : g_p(v, T_p Y) = 0 \} \subseteq T_p X .$$

• Es claro que en cada punto tenemos la descomposición en suma ortogonal $T_p X = T_p Y \perp N_p Y$.

<u>Definición</u>: El <u>fibrado normal</u> de Y es $NY := \coprod_{p \in Y} N_p Y$.

<u>Definición</u>: Sea $Y \subset (\mathbb{R}^n, g_{eu})$ una subvariedad. Se llama <u>proyección tangencial</u> en $p \in Y$ a

$$\begin{aligned} \pi : T_p \mathbb{R}^n = T_p Y \perp N_p Y &\longrightarrow T_p Y \\ e + v &\longmapsto e \end{aligned},$$

con lo que globalmente obtenemos una aplicación $\pi : \mathfrak{D}(\mathbb{R}^n)_{|Y} \longrightarrow \mathfrak{D}(Y)$.

Definición: Sea $Y \subset (\mathbb{R}^n, g_{eu})$, y sea ∇_0 la conexión estándar del $\mathbb{R}^n$ (que es la Levi-Civita). Tal conexión induce una aplicación

$$\nabla^T : \mathfrak{D}(Y) \times \mathfrak{D}(Y) \longrightarrow \mathfrak{D}(Y)$$

$$(D, \bar{D}) \longmapsto D^{\nabla^T}\bar{D} := \pi\left(D^{\nabla_0}\bar{D}\right)$$

(donde en el último término se consideran las extensiones de D y $\bar{D}$ a campos tangentes sobre todo el $\mathbb{R}^n$), que es una conexión sobre Y, llamada conexión tangencial.

Lema: La conexión tangencial de $Y \subset (\mathbb{R}^n, g_{eu})$ es compatible con $g_{|Y}$ y es simétrica, luego es la conexión Levi-Civita de $(Y, g_{|Y})$.

BOLAS Y ESFERAS GEODÉSICAS

Definición: Sea (X, g) VR. Se llaman geodésicas riemannianas (o simplemente geodésicas) de X a las geodésicas de la conexión Levi-Civita.

Definición: Sea (X, g) VR y $\sigma : I \longrightarrow X$ una curva (parametrizada), y sea $T_t \in T_{\sigma(t)}X$ su vector tangente en distinto t. Diremos que la velocidad de σ en t es $|T_t|$, y si $|T_t| = cte$ $\forall t \in I$, se dice que σ es de velocidad cte. Si $|T_t| = 1$ $\forall t \in I$, diremos que es de velocidad unitaria (que está parametrizada por su longitud de arco)

Lema: Toda geodésica riemanniana es una curva de velocidad constante.

Proposición: Sea $\varphi : (X, g) \longrightarrow (Y, \bar{g})$ una isometría. Entonces φ lleva geodésicas en geodésicas.

Con precisión: si σ es una geodésica de X, con pto inicial p y vel. inicial $v \in T_pX$, entonces $\varphi \circ \sigma$ es una geodésica de Y, de pto inicial $\varphi(p)$ y vel. inicial $\varphi_*(v) \in T_{\varphi(p)}Y$.

Definición: En variedades riemannianas, llamaremos entorno normal y coordenadas normales a las determinadas por una base ortonormal $\{E_1, \dots, E_n\}$ de T_pX.

- En concreto, sobre un abierto $U \simeq V$ habrá tantas coordenadas normales posibles como bases ortonormales en T_pX (pues depende de la identificación $E : T_pX \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n$.

Proposición (Naturalidad de la aplicación exponencial): Sea $\varphi:(X,g)\to(Y,\bar{g})$ una isometría. Para cada $p\in X$ se tiene el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} T_pX & \xrightarrow{\varphi_*} & T_{\varphi(p)}Y \\ \exp_p\downarrow & & \downarrow \exp_{\varphi(p)} \\ X & \xrightarrow{\varphi} & Y \end{array} \qquad \underline{\varphi\circ\exp_p=\exp_{\varphi(p)}\circ\varphi_*}$$

Definición: Sea (X,g) VR, dado $p\in X$, escribiremos

$$B(0,\varepsilon):=\{v\in T_pX:\ \|v\|:=\sqrt{g_p(v,v)}<\varepsilon\}\subset T_pX$$

$$B[\quad]\qquad\qquad\qquad\qquad\leq$$

$$S(\quad)\qquad\qquad\qquad\qquad=$$

Entonces, si p está incluido en un entorno normal $U\xrightarrow{\ \sim\ }V$ en la cual los datos precedentes están en V,

a) Llamamos <u>bola geodésica</u> en X a $\exp_p(B(0,\varepsilon))$.

b) Llamamos <u>bola geodésica cerrada</u> en X a $\exp_p(B[0,\varepsilon])$

c) Llamamos <u>esfera geodésica</u> en X a $\exp_p(S(0,\varepsilon))$.

Definición: Sea $(U;u_1,\dots u_n)$ un abierto coordenado normal centrado en $p\in X$. Llamaremos <u>distancia radial</u> a

$$r:U-p\longrightarrow\mathbb{R}$$
$$q\longmapsto r(q):=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}u_i(q)^2}\ ,$$

y llamaremos <u>campo de vectores radial unitario</u> al campo $\partial_r:=\sum\frac{u_i}{r}\partial_{u_i}$.

- En un entorno normal todo punto se conecta con p mediante una geodésica. Ahora, en variedades riemannianas las geodésicas son geodésicas riemannianas, luego estas σ_v tienen velocidad cte, λ. Puesto que las parametrizaciones que llevan a σ_v geodésica están determinadas salvo una transformación afín, si cambiamos t por $\frac{1}{\lambda}t$, σ_v seguirá siendo geodésica (aunque ya no será v el vector tg en 0) y tiene velocidad unitaria. Por tanto, <u>en un entorno normal todo punto está</u>

unido a p por una geodésica de velocidad unitari–

Proposición: Sea (X,g) VR y $(\mathcal{U}; u_1, \dots u_n)$ un entorno coordenado normal de $p \in X$. Se cumple:

1) Dado $v \in T_pX$, la geodésica σ_v se representa en coordenadas normales como el segmento radial

$$\sigma_v(t) = (tv_1, \dots, tv_n) \qquad , \qquad v = \sum v_i (\partial_{u_i})_p .$$

2) En tales coordenadas $p = (0, \dots, 0)$.

3) La base $\{(\partial_{u_1})_p, \dots, (\partial_{u_n})_p\}$ de T_pX es ortonormal, luego en tal base la métrica es $g_p = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$.

4) Cualquier bola euclídea $\{q \in \mathcal{U} : r(q) < \varepsilon\} \subset \mathcal{U}$ es una bola geodésica en X.

5) Para cada $q \in \mathcal{U} - p$, $(\partial_r)_q$ es el vector tangente en q de la geodésica de velocidad unitaria que une p y q.

6) $\Gamma_{ij}^k(p) = 0 \quad \forall i,j,k$.

Definición: Un abierto $W \subset X$ se dice (totalmente) uniformemente normal si existe $\delta > 0$: W está contenido en la bola geodésica de radio δ de cada uno de sus puntos.

Lema (del entorno uniformemente normal): Para cada punto $p \in X$ y cada entorno $\mathcal{U}$ de p, existe un entorno uniformemente normal de p contenido en $\mathcal{U}$.

IV: GEODÉSICAS Y DISTANCIAS

• Fijemos una vR (X, g, ∇), ∇ la de Levi-Civita.

Definición: Dada una curva C en X orientada (esto es, fijado un sentido de recorrido), sea ω_C la forma de volumen de la variedad riemanniana $(C, g_{|C})$. Dado un segmento de curva $\Omega \subset C$ (variedad con borde), diremos que la longitud de Ω es

$$\text{long}\, \Omega := \int_\Omega \omega_C .$$

• Dada una parametrización $\sigma : I \xrightarrow{\sim} C$, $\sigma = \sigma(t)$, $\Omega = [a,b] \subset I$, la longitud de dicho segmento es

$$\boxed{\text{long}\, \sigma_{|[a,b]} = \int_a^b |T_t| \, dt}$$

• Para hablar de distancias entre puntos, vamos a modificar la noción de "curva" y vamos a ampliarla a una clase mayor:

Definición: Llamaremos curva regular a una aplicación diferenciable $\sigma : I \to X$ que sea inmersión local en todo punto, ie, tal que $T_t \neq 0$ $\forall t \in I$.

Llamaremos curva regular a trozos a toda aplicación continua $\sigma : [a,b] \to X$ que sea una curva regular a trozos, ie, tal que existe $a = a_0 < a_1 < \dots < a_n = b$ tal que $\sigma_{|[a_i, a_{i+1}]}$ sea regular. Diremos que éstas son curvas admisibles. Por convenio, $\sigma(t) \equiv p$ $\forall t$ es admisible.

La longitud de una curva admisible $\sigma : [a,b] \to X$ es $\text{long}\, \sigma := \sum \text{long}\, \sigma_{|[a_i, a_{i+1}]}$ (puesto que toda inmersión local en un pto es una subvariedad regular localmente, siempre podemos hacer la partición suficientemente fina de modo que $\sigma_{|[a_i, a_{i+1}]}$ sea una subvariedad regular y así la longitud tiene sentido.

Una reparametrización de una curva admisible $\sigma : [a,b] \to X$ es un homeomorfismo $\varphi : [c,d] \to [a,b]$ tal que $\varphi_{|[c_i, c_{i+1}]}$ sea difeomorfismo. La nueva curva será $\bar{\sigma} = \sigma \circ \varphi$.

Definición: Sea $\sigma : [a,b] \longrightarrow X$ una curva admisible. Se llama *función longitud de arco* a la función

$$s : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$t \longmapsto s(t) := \operatorname{long} \sigma_{|[a,t]} .$$

Proposición: Sea $\sigma : [a,b] \longrightarrow X$ una curva admisible que une p y q, con $\operatorname{long} \sigma = l$.
Existe una única reparametrización $\overline{\sigma} : [0,l] \longrightarrow X$ con $|\overline{T}| = 1$ $\quad (\overline{T} = \sigma_* \partial_t)$.
(que recorre la curva en el mismo sentido)

Corolario: Si $\sigma : [0,l] \rightarrow X$ es una curva admisible de velocidad unitaria, entonces $s(t) = t$.

Definición: En el caso anterior, diremos que σ es una curva *parametrizada por su longitud de arco*.

Definición: Sea $\sigma : [a,b] \longrightarrow X$ una curva admisible. Un *campo de vectores diferenciable a trozos con respecto en σ* es una colección $\{ D_t \in T_{\sigma(t)} X \; ; \; t \in [a,b] \}$ tal que existe una subdivisión de $[a,b]$ en la que D sea diferenciable en cada subintervalo.

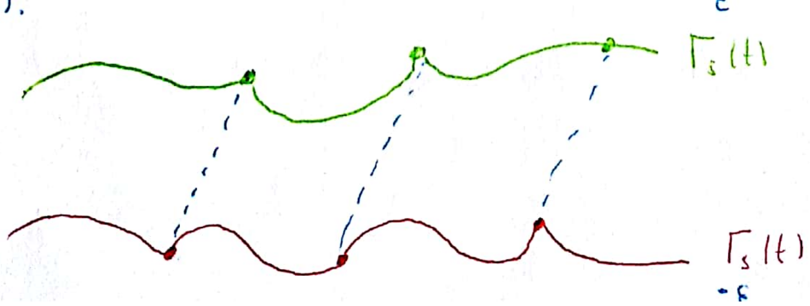
FUNCIÓN DISTANCIA RIEMANNIANA

Definición: Sea (X,g) una VR *conexa*. Se llama *función distancia riemanniana* a

$$d_g : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(p,q) \longmapsto d_g(p,q) := \inf \{ \operatorname{long} \sigma \; : \; \sigma \text{ curva admisible que une } p \text{ con } q \}$$

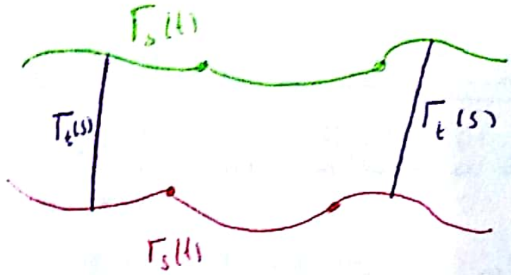
Teorema: Sea (X,g) VR conexa. (X, d_g) es un espacio métrico que induce sobre X la misma topología que la dada en la variedad.

Definición: Una *familia de curvas admisibles* es una aplicación continua $\Gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \times [a,b] \longrightarrow X$ diferenciable en cada rectángulo $(-\varepsilon, \varepsilon) \times [a_i, a_{i+1}]$ (para cierta subdivisión) y tal que $\Gamma_s(t) := \Gamma(s,t)$ sea una curva admisible $\forall s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.



Definición: Un <u>campo de vectores</u> a lo largo de Γ es una colección $\{ D_{(s,t)} \in T_{\Gamma(s,t)} X \ : (s,t) \in (-\varepsilon, \varepsilon) \times [0,1] \}$ que varía de modo continuo y es diferenciable en alguna subdivisión $(-\varepsilon,\varepsilon) \times [a_i, a_{i+1}]$ (quizás diferente a la de antes).

- Notar que Γ define dos familias de curvas:
  - <u>Curvas principales</u>: $\Gamma_s(t) := \Gamma(s,t)$.
  - <u>Curvas transversales</u>: $\Gamma_t(s) := \Gamma(s,t)$



- Denotamos

$$\partial_t \Gamma(s,t) := T_t \quad \text{vector tangente en } t \text{ de la curva } \Gamma_s.$$

$$\partial_s \Gamma(s,t) := T_s \quad \text{vector tangente en } s \text{ de la curva } \Gamma_t.$$

<u>Lema</u> (de Simetría): Sea $\Gamma : (-\varepsilon,\varepsilon) \times [0,1] \longrightarrow X$ una familia de curvas admisibles en una variedad diferenciable donde ∇ es simétrica. Sobre cada rectángulo $(-\varepsilon,\varepsilon) \times [a_i, a_{i+1}]$ donde sea diferenciable, se cumple

$$\partial_s^{\nabla} \partial_t \Gamma = \partial_t^{\nabla} \partial_s \Gamma .$$

<u>Lema</u> (Gauss): Sea U una bola geodésica centrada en $p \in X$. El campo de vectores radial unitario ∂_r es ortogonal a las esferas geodésicas en U.

<u>Corolario</u>: Sea U una bola geodésica centrada en $p \in X$ y $(U; u_1, \dots, u_n)$ coordenadas normales sobre él, y sea r la función distancia radial. Entonces, en $U - p$ se cumple que

$$\operatorname{grad} r = \partial_r .$$

RELACIÓN ENTRE GEODÉSICAS Y CURVAS MINIMIZANTES

<u>Definición</u>: Una curva admisible se dice <u>minimizante</u> si es la de menor longitud entre todas las de mismos extremos inicial y final. Equivalentemente, si su longitud coincide con la distancia riemanniana entre sus puntos inicial y final.

<u>Proposición</u>: Sea $p \in X$ y q contenido en una bola geodésica centrada en p. Entonces (salvo parametrización) la geodésica radial de p a q es la única curva minimizante que une tales puntos.

<u>Corolario</u>: En cualquier bola geodésica U centrada en p, en $U-p$ $\quad r = d_g$, i.e.,

$$\text{distancia radial} = \text{distancia riemanniana}.$$

• El corolario permite una simplificación de la notación:

$$B(p,R) = \exp_p(B(0,R)) \quad , \quad B[p,R] = \exp_p(B[0,\varepsilon]),$$

$$S(p,R) = \exp_p(S(0,R)).$$

<u>Teorema</u>: Toda curva minimizante es geodésica cuando está parametrizada por la longitud de arco.

<u>Definición</u>: Una curva $\sigma: I \to X$ se dice <u>localmente minimizante</u> si todo punto $t_0 \in I$ tiene un entorno en el que σ sea minimizante.

<u>Teorema</u>: Toda geodésica riemanniana es localmente minimizante.

Localmente: geodésica $\Longleftrightarrow$ curva minimizante

Globalmente: geodésica $\Longleftarrow$ curva minimizante

$\not\Rightarrow$ globalmente no es minimizante, pero sí lo es localmente.

COMPLETITUD

Definición: Una variedad riemanniana se dice geodésicamente completa si toda geodésica maximal está definida en todo el $\mathbb{R}$.

Lema: Si existe $p \in X$ tal que $\exp_p$ está definida en todo el espacio tangente, entonces para cada $q \in X$ existe un segmento de geodésica minimizante de p a q.

Teorema (Hopf–Rinow): Una VR conexa es geodésicamente completa $\Longleftrightarrow$ es completa como espacio métrico.

Corolario I: Si existe $p \in X$ tal que $\exp_p$ está definida en todo T_pX, entonces X es completo.

Corolario II: X es completo $\Rightarrow$ cualquier par de puntos pueden ser unidos por un segmento de geodésica minimizante.

Corolario III: Si X es compacto, entonces las geodésicas se pueden definir en todo el $\mathbb{R}$.

O sea, Globalmente, si X es completo: geodésica $\Longleftrightarrow$ curva minimizante.

CAMPOS DE JACOBI

Definición: Una variación por geodésicas (ó familia 1-paramétrica de geodésicas) es una familia de curvas admisibles $\Gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \times [a,b] \to X$ tal que cada una de las curvas principales Γ_s es un segmento de geodésica.

El campo de variaciones de Γ es el campo $V_t := \partial_s \Gamma(0,t)$. Si Γ cumple que $\Gamma_0(t) = \sigma$ para cada σ, se dice que Γ es una variación de σ, y en tal caso $V \in \mathfrak{X}_\sigma$.

Teorema: Sea $\sigma : I \to X$ una geodésica. Si V es el campo de variaciones de una variación por geodésicas, variación de σ, entonces cumple

$$\partial_t^{\nabla} \partial_t^{\nabla} V + R(V, \partial_t, \partial_t) = 0 \qquad \text{(Ecuación de Jacobi)}$$

Definición: Llamaremos campo de Jacobi a todo campo con soporte en una geodésica que satisfaga la ecuación anterior.

TENSOR DE RIEHMAN-CHRISTOFFEL

Definición: Sea (X, g, ∇) una VR. Se llama tensor de Riemann-Christoffel es el tensor $(4,0)$

$$R_{2,2}(D_1, D_2, D_3, D_4) := R(D_1, D_2, D_4) \cdot D_3 .$$

Proposición (Propiedades):

1) $R_{2,2}$ es hemisimétrico en los dos primeros índices y en los dos últimos.

2) $R_{2,2}(\bullet\,\bullet, \times\,\times) = R_{2,2}(\times\,\times, \bullet\,\bullet)$.

3) La suma circular en 3 índices cualquiera es nula (por el 4º fijo es la id. de Bianchi).

Definición: Una métrica riemanniana g se dice localmente euclídea si todo punto tiene un entorno coordenado en el que $g_{ij} = \delta_{ij}$, ie, localmente (X, g) es isométrico al $(\mathbb{R}^n, g_{eu})$.

Teorema: Sea (X, g, ∇) una VR (∇ de Levi-Civita). Son equivalentes:

1) $R_{2,2} = 0$
2) $R = 0$
3) ∇ plana
4) ∇ localmente euclídea
5) g localmente euclídea.

Definición: Sea (X, g) VR, $p \in X$ y sea $\Pi \subset T_pX$ un plano de base $D_1, D_2 \in T_pX$. Se llama curvatura seccional de Π a

$$K_\Pi := \frac{R_{2,2}(D_1, D_2, D_1, D_2)}{g(D_1, D_1)\, g(D_2, D_2) - g(D_1, D_2)^2}$$

Proposición: K_Π no depende de los vectores que generan Π.

Teorema: Sea (X,g) VR, $p\in X$ y supongamos que conocemos K_π en todo plano de T_pX. Entonces el tensor de Riemann-Christoffel $R_{2,2}$, en el punto, está unívocamente determinado.

- Si $\dim X = 2$, dado $p\in X$ $\Pi = T_pX$ es el único plano, y tomando una base ortonormal $\{D_1, D_2\}$ se tiene que $K_\pi(D_1,D_2) = R_{22}(D_1, D_2, D_1, D_2)$, y entonces g es loc. euclídea $\Leftrightarrow K_\pi = 0$ en todo punto.

Corolario: (X,g) loc. euclídea $\Leftrightarrow K_\pi = 0$ $\forall\, \Pi \subset T_pX$, $\forall p$.

Teorema: Sea (X,g) completa, simplemente conexa, de dim n y de curvatura seccional cte k en todo pto. y en todo plano. Entonces X es isométrica a una de los siguientes espacios:

1. $(\mathbb{R}^n, g_{eu})$, si $k=0$

2. (S_n, i^*g_{eu}), si $k = \frac{1}{R^2} > 0$,

3. $(\mathbb{H}_n, h)$, si $k = -\frac{1}{R^2} < 0$, $\mathbb{H}_n = \{x\in\mathbb{R}^n : x_n > 0\}$, $h = \frac{R^2}{x_n^2}\sum dx_i \otimes dx_i$.