I: CLASIFICACIÓN DE ENDOMORFISMOS

* Definición: Dos endomorfismos $T, T' : E \to E$ se dicen equivalentes si $\exists$ $\sigma \in Aut(E)$: $T' = \sigma T \sigma^{-1}$, ie, $T'\sigma = \sigma T$, ie, si el sig. diagrama es conmutativo.

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "T"] \arrow[d, "\sigma"', "\wr"] & E \arrow[d, "\wr"', "\sigma"] \\ E \arrow[r, "T'"] & E \end{tikzcd}$$

Lema: $T \equiv T' \iff \exists$ bases de E tal que las matrices de T y T' en las respectivas bases coinciden

- Si E es un K-ev, fijado $T \in End_K E$, se define sobre E una estructura de $K[x]$-módulo con la operación $p(x)\cdot e := p(T)(e)$. Se suele denotar como E_T.

* Proposición: $T \equiv T' \iff E_T \simeq E_{T'}$.

- El 1er Th Descomp. dice que $E \simeq$ libre $\oplus$ torsión, y la parte libre $= K[x] \oplus \dots \oplus K[x]$ debe ser 0 pues tiene dim ∞.

Definición: Llamaremos ideal anulador de T a $\{p(x) : \overset{p(x)\cdot e}{\overset{\parallel}{p(T)}} \equiv 0\} =$ id. anulador de $K[x]$, luego llamaremos polinomio anulador del endomorfismo T al único polinomio mónico que genera el ideal anulador, y lo denotaremos como $\phi_1(x)$.

• Combinando los 3 Th de Descomposición de módulos finitamente generados, llegamos a

Teorema: Sea E_T un $K[x]$-módulo, $T \in \mathrm{End}\, E$. Existe una única sucesión de polinomios mónicos $\phi_1(x) / \dots / \phi_n(x)$, cada uno múltiplo del siguiente, tal que

$$E_T \simeq K[x]/(\phi_1(x)) \oplus \dots \oplus K[x]/(\phi_n(x)).$$

y llamaremos a los polinomios $\phi_1(x), \dots, \phi_n(x)$ factores invariantes de T

• Y si descomponemos $\phi_i(x) = p_1(x)^{m_{1i}} \cdots p_r(x)^{m_{ri}}$, $i=1,\dots,n$; con $m_{i1} \geq \dots \geq m_{in} \geq 0$, llamaremos a $\{p_i(x)^{m_{ij}}\}$ divisores elementales de T.

Así:

Teorema (de Clasificación, v1): $T \equiv T' \iff$ $E_T, E_{T'}$ Tienen la misma sucesión de factores invariantes.

Teorema (de Clasificación, v2): $T \equiv T' \iff$ $E_T, E_{T'}$ Tienen la misma colección de div. elementales.

Y

$$E = \bigoplus_j K[x]/(\phi_j(x)) = \bigoplus_{i,j} K[x]/(p_i(x)^{m_{ij}})$$

MATRICES DE JORDÁN SOBRE UN CUERPO ALG. CERRADO

Lema: $\{\bar{1}, \bar{x}, \dots, \overline{x^{n-1}}\}$ forma base del K-EV $K[x]/(x^n)$, luego dim n.

Corolario: $\{\bar{1}, \overline{x-\lambda}, \dots \overline{(x-\lambda)^{n-1}}\}$ forma base del K-EV $K[x]/((x-\lambda))^n$.

* Si T tuviera un único divisor elemental $(x-\lambda)^n$, $E_T = K[x]/((x_T-\lambda)^n)$, y $\{e_0 = \bar{1}, \dots e_{n-1} = \overline{(x-\lambda)^{n-1}}\}$ será base, y como $T(e_j) = e_{j+1} + \lambda e_j$, se tendrá que $T \equiv \begin{pmatrix} \lambda & & \\ 1 & \ddots & \\ & 1 & \lambda \end{pmatrix}$. Así que en el caso de un K alg. cerrado, como los div. elementales deben ser pol. irred, deben ser de grado 1, ie, $(x-\lambda)$, luego como $E = \bigoplus_{i,j} K[x]/(p_i(x)^{m_{ij}})$,

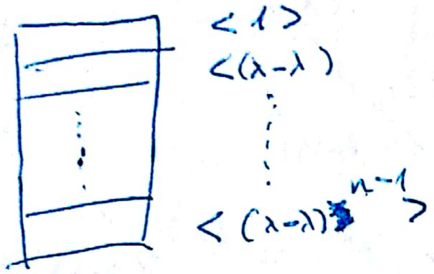
$$T \equiv \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ 1 & \ddots & \\ & 1 & \lambda_1 \end{pmatrix} & & \\ & \ddots & \\ & & \begin{pmatrix} \lambda_r & & \\ 1 & \ddots & \\ & 1 & \lambda_r \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

y le llamaremos matriz de Jordán de T, y cajas de Jordán a las matrices internas. Entonces,

nº torres $=$ nº cajas de Jordan $=$ nº de divisores elementales (una caja por cada div.)

altura de la torre $=$ longitud de una caja de Jordan $=$ exponente del divisor elemental que le corresponde

Además, cada $\underbrace{\text{submódulo } K[x]/((x-\lambda)^n)}_{\text{divisor elemental}}$ se repite con una torre



$\Rightarrow \ker(x-\lambda)^k = k$ primeros platos.

Y $\phi_i(x)$ = producto de las i-ésimas potencias mayores de cada raíz (de los divisores elementales)

$\Rightarrow c_o(x)$ = polinom. característico de $T = \prod_{i,j} p_i^{m_{ij}} = \prod$ div. elementales.

• Dada la matriz, para saber $\dim \ker(T-\lambda Id)^k$, habrá que calcular $[(T)-\lambda(Id)]^k$ para hallar la composición.

MATRICES DE JORDAN SOBRE $\mathbb{R}$

Lema: $\dim K[x]/(p(x)) = \text{gr } p(x)$.

Lema: Como si E es un $\mathbb{C}$-EV, es de modo natural un $\mathbb{R}$-EV, ya que $\mathbb{C}=\mathbb{R}\oplus\mathbb{R}i$,

si $\dim_{\mathbb{C}} E = n \Rightarrow \dim_{\mathbb{R}} E = 2n$.

Proposición: $$\mathbb{R}[x]/(p(x)^n) \simeq \mathbb{C}[x]/((x-\alpha)^n)$$

como $\mathbb{R}[x]$-módulos, siendo $p(x) = x^2+Ax+B = (x-\underset{a+bi}{\alpha})(x-\underset{a-bi}{\bar{\alpha}})$ polinomio irreducible de grado 2.

• Por esta lógica, si $E_T = \bigoplus \mathbb{R}[x]/(p_i^{m_i}(x))$, sea $p(x)$ uno de los sumandos,

– $p(x) = (x-\lambda)$: las cajas de Jordan son $\begin{pmatrix} \lambda & & \\ 1 & \ddots & \\ & 1 & \lambda \end{pmatrix}$

– $p(x) = (x-\alpha)(x-\bar{\alpha})$, $\alpha = a+bi$, $\bar{\alpha} = a-bi$.

Entonces $\mathbb{R}[x]/(p(x)^m) \overset{\text{Prop.}}{=} \mathbb{C}[x]/((x-\alpha)^m)$

Y si $\{\bar{1}, \overline{x-\lambda}, \dots \overline{(x-\lambda)^{m-1}}\}$ es base como $\mathbb{C}$-EV,

$\{\bar{1}, \bar{i}, \underbrace{\overline{x-\lambda}}_{e_j}, \underbrace{\overline{i(x-\lambda)}}_{e'_j}, \dots\}$ es base como $\mathbb{R}$-EV;

y $T(e_j) = e_{j+1} + a e_j + b e'_j$; $T(e'_j) = e'_{j+1} + a e'_j - b e_j$, i.e.,

Cada sumando será $\begin{pmatrix} \begin{matrix} a & -b \\ b & a \end{matrix} & & \\ \begin{matrix} 1 & \\ & 1 \end{matrix} & \ddots & \\ & \begin{matrix} 1 & \\ & 1 \end{matrix} & \begin{matrix} a & -b \\ b & a \end{matrix} \end{pmatrix}$

Y los torres

$\langle 1, x \rangle$
$\langle p(x), x \cdot p(x) \rangle$
$\vdots$
$\langle p(x)^{m-1}, x\, p(x)^{m-1} \rangle$

y cada celda tiene dim 2.

Defin: Una estructura compleja en un $\mathbb{R}$-EV es un endomorfismo $J: E \to E$: $J^2 = -\mathrm{Id}$.

• Un $\mathbb{R}$-EV E dotado de una structura compleja adquiere estructura de $\mathbb{C}$-EV con el producto por escalares: $(a+bi)\, e := ae + b \cdot J(e)$.

• Ej: $(E_2, \langle g \rangle)$ EVE orientado. El giro de 90° es una estructura compleja.

• $T: e_j \in \Lambda_n \longrightarrow \sum a_{ij} e_i \in \Lambda_n$; $(a_{ij}) \equiv$ matriz de $T: E \longrightarrow E$.

• $\pi : e_j \cdot \in \Lambda_n \longrightarrow e_j \cdot \in E$,

<u>Proposición</u>: La sucesión $\Lambda_n \xrightarrow{x \cdot Id - T} \Lambda_n \xrightarrow{\pi} E$ es exacta, luego es una presentación de E.

*<u>Teorema</u>: Sea $T: E \to E$ y $T \equiv (a_{ij})$. Si

$c_i(x) := mcd$ (menores de orden $n-i$ de $(x Id - T)$)

$c_n(x) := 1$

entonces $\boxed{c_i(x) = \phi_{i+1}(x) \cdot \ldots \cdot \phi_{n}}$

y entonces $\boxed{\phi_i(x) = \dfrac{c_{i-1}(x)}{c_i(x)}}$

• Esto dice que $c_0(x) = \det(x \cdot Id - T) \equiv$ pol. caract. de T

<u>Teorema</u> (Hamilton - Cayley) : ¡El polinomio característico de un endomorfismo es múltiplo del polinomio anulador; ie, $c_0(x)$ anula al endomorfismo, ie, $c_0(T) \equiv 0$.

Scanned by CamScanner

II: CUÁDRICAS AFINES Y EUCLÍDEAS

$(A_n, V, +)$ EA

Definición: Un polinomio de grado ≤ 2 es una aplicación $q: A_n \longrightarrow k$ que en coordenadas afines se escribe como $q(x_1,..,x_n) = \sum_{i,j}^{n} a_{ij} x_i x_j + \sum_k b_k x_k + C$.

Lema: Sea $q: A_n \to k$ un pol de grado ≤ 2. $q(x_1,.. x_n) = 0 \ \forall x_1,..,x_n \Longrightarrow q \equiv 0$.

Corolario: $q = \bar{q}$ (son la misma aplicación) $\Rightarrow q, \bar{q}$ tienen los mismos coeficientes.

- Denotamos por $\mathcal{P}(A_n) = \{$ polinomios $q: A_n \to k$ de grado $\leq 2 \}$.

***Definición**: Una cuádrica del EA A_n es un SEV $\langle q \rangle \subset \mathcal{P}(A_n)$ unidimensional.

Llamamos lugar de la cuádrica $C = \langle q \rangle$ al conjunto de pts donde se anula q.

- Si q es un pol de grado ≤ 2, $q(x_1,..x_n) = \sum a_{ij} x_i x_j + 2\sum_j a_{0j} x_j + a_{00}$, y podemos considerar la forma cuadrática $\hat{q}(x_1,..x_n) = \sum a_{ij} x_i x_j + 2\sum a_{0j} x_0 x_j + a_{00} x_0^2$, a la cual llamamos homogeneización de q; y a $\vec{q} := \hat{q}|_{x_0=0}$, parte principal de q.

$$\hat{q} \equiv \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & \cdots & a_{0n} \\ a_{10} & a_{11} & & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n0} & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$\vec{q}$

*Definición: Llamaremos rango r e índice i de una cuádrica $C=\langle q\rangle$ al rango r e índice i de $\hat{q}$; y rango al infinito r' e índice al infinito i' al rango e índice de $\vec{q}$.

• Denotaremos $Q(\mathbb{E}_{n+1}) = \{$formas cuadráticas $\mathbb{E}_{n+1} \longrightarrow K\}$

Lema: Todo polinomio $q: \mathbb{A}_n \longrightarrow K$ de grado ≤ 2 se extiende de modo único a una forma cuadrática $\hat{q}: \mathbb{E}_{n+1} \longrightarrow K$. Y entonces

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{P}(\mathbb{A}_n) & = & Q(\mathbb{E}_{n+1}) & = & \mathcal{M}(\mathbb{E}_{n+1}) \\ q := \hat{q}|_{x_0=1} & \longleftrightarrow & \hat{q} & \longleftrightarrow & S \end{array}$$

• Esto dice que
$$r, i \text{ de } C = r, i \text{ de } \hat{q} = r, i \text{ de } S$$
$$r', i' \text{ de } C = r', i' \text{ de } \vec{q} = r', i' \text{ de } S|_V.$$

Definición: Una cuádrica $C=\langle q\rangle = \langle S\rangle$ se dice no singular si S es no singular i.e., si $\operatorname{rg} S = n+1 \equiv \max$.

NOCIÓN DE EQUIVALENCIA DE CUÁDRICAS

<u>Definición</u>: Dos subconjuntos $X, X' \subset \mathbb{A}_n$ se dicen <u>afínmente equivalentes</u> si $\exists\, \varphi$ afinidad tal que $\varphi(X) = X'$.

<u>Definición</u>: Dada una afinidad $\varphi: \mathbb{A}_n \to \mathbb{A}_n$; y una función $f: \mathbb{A}_n \to K$, llamaremos <u>transformada de f respecto φ a</u> $\quad \varphi_*(f) := f \circ \varphi^{-1}$

<u>Definición</u>: Dos polinomios $q, \bar{q}: \mathbb{A}_n \to \mathbb{K}$ de grado ≤ 2 se dicen <u>afínmente equivalentes</u> si $\exists$ φ afinidad tal que $\varphi_*(q) = \bar{q}$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{A}_n \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "q"'] & \mathbb{A}_n \arrow[d, dotted, "\bar{q} = q \circ \varphi^{-1}"] \\ & K \end{tikzcd}$$

<u>Definición</u>: Dada una afinidad φ y una cuádrica $C = \langle q \rangle$, se llama <u>transformada de C respecto φ a</u> $\quad \varphi_*(C) = \varphi_*(\langle q \rangle) := \langle \varphi_*(q) \rangle \overset{\text{NOT}}{=} \varphi(C)$.

*<u>Definición</u>: Dos cuádricas $C, \bar{C}$ se dicen afínmente equivalentes si $\exists\, \varphi: \mathbb{A}_n \to \mathbb{A}_n$ afinidad tal que $\quad \bar{C} = \varphi(C) \left(= \varphi_*(C)\right)$

<u>Prop</u>: Dos cuádricas (polinomios) son afínmente equivalentes $\Longleftrightarrow$ hay par de bases en las que sus ecuaciones se escriben igual.

Teorema (Ecuaciones reducidas de las cuádricas sobre un cuerpo K): Toda cuádrica de un K-EA $\mathbb{A}^n$ posee una ecuación reducida de uno de los siguientes tipos:

I) $\lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_p x_p^2 = 0 \quad ; \lambda_i \neq 0, \; p = 1, \dots, n$

II) $\lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_p x_p^2 = 1 \quad ; \lambda_i \neq 0, \; p = 0, \dots, n.$

III) $\lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_p x_p^2 = x_n \quad ; \lambda_i \neq 0, \; p = 0, \dots, n-1.$

Corolario: Sea C una cuádrica de rango r y rango al infinito r'

$$C \text{ es de tipo I} \iff r - r' = 0$$

$$C \text{ es de tipo II} \iff r - r' = 1$$

$$C \text{ es de tipo III} \iff r - r' = 2.$$

* **Teorema** (Ecuaciones reducidas de las cuádricas sobre $\mathbb{R}$): Toda cuádrica de un $\mathbb{R}$-EA se puede escribir de uno de estos tipos (sea (p,q) la signatura de $\vec{q}$)

I) $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} x_i^2 - \sum_{j=p+1}^{p+q} x_j^2 = 0 \quad ; 0 < p+q \leq n, \; p \geq q.$

II) $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} x_i^2 - \sum_{j=p+1}^{p+q} x_j^2 = 1 \quad ; 0 \leq p+q \leq n$

III) $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} x_i^2 - \sum_{j=p+1}^{p+q} x_j^2 = x_n \quad ; 0 \leq p+q < n, \; p \geq q.$

*Corolario: Sea C una cuádrica de rango r, índice i, rango del inf r' e índ. del inf i'.

$$C \text{ es de tipo I} \iff \begin{cases} r = p+q & i = q \\ r' = p+q & i' = q \end{cases}$$

$$C \text{ es de tipo II} \iff \begin{cases} r = p+q+1 & \overset{p>q}{i = q+1} \;\Big|\; \overset{p\leq q}{i = p} \\ r' = p+q & i' = q \;\Big|\; i' = p \end{cases}$$

$$C \text{ es de tipo III} \iff \begin{cases} r = p+q+2 & i = q+1 \\ r' = p+q & i' = q \end{cases}$$

*Teorema (de Clasificación de Cuádricas Afines): Sean $C, \overline{C}$ dos cuádricas.

$$C \equiv \overline{C} \iff C, \overline{C} \text{ tienen los mismos invariantes } r, r', i, i'.$$

ELEMENTOS AFINES EN LAS CUÁDRICAS

- Sea C una cuádrica sobre K.

Definición: Un punto p_0 es centro de simetría de C si

1) $p_0 \notin C$

2) La simetría respecto p_0 deja invariante la cuádrica.

Proposición: C tiene centro de simetría $\Longleftrightarrow$ C es de tipo II.

Lema: p_0 es centro de simetría de C (de tipo II) $\Longleftrightarrow$ $\langle p_0 \rangle^{\perp} = V(en\ |\mathbb{E}_{n+1})$

Lema: $\dim \{$centros de $C\} = n+1-r$.

Proposición: Sea $C = \langle q \rangle = \langle S \rangle = \langle (a_{ij}) \rangle$.

$$\boxed{\begin{pmatrix} & & \\ & a_{ij} & \\ & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_0 \neq 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}$$

ECUACIÓN DEL CENTRO DE UNA CUÁDRICA.

Definición: Dos puntos $p_1, p_2 \in \mathbb{A}_n$ se dicen <u>conjugados respecto a C</u> $= \langle S \rangle$ si $S(p_1, p_2) = 0$.

Diremos que un punto $p \in \mathbb{A}_n$ es <u>singular respecto C</u> si es conjugado respecto todo punto, ie, $S(p, \bar{p}) = 0$ $\forall \bar{p} \in \mathbb{A}_n$; y que es <u>autosingular</u> o <u>auto-conjugado</u> si $S(p,p) = 0 = q(p) \Longleftrightarrow p \in$ lugar de C.

Proposición: Sea $p \in \mathbb{A}_n$ no singular del lugar de una cuádrica (auto-conjugado).

$\{$puntos conjugados con $p\}$ es un hiperplano de $\mathbb{A}_n$,

al cual llamaremos <u>hiperplano tangente a C en p</u>.

Proposición. Sea $C \overset{<q>}{=} <S> = <(a_{ij})>$, y $p = (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{A}_n$ no singular.

$$\boxed{(1, \lambda_1, \dots, \lambda_n) \begin{pmatrix} & & \\ & a_{ij} & \\ & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0}$$

ECUACIÓN DEL HIPERPLANO TANGENTE A C EN P.

o bien

$$\boxed{\frac{\partial q}{\partial x_1}(p) \cdot x_1 + \dots + \frac{\partial q}{\partial x_n}(p) \cdot x_n = C}$$

EC. DEL HIPERPLANO TG A C EN P ("DIFERENCIAL")

donde C se determina sustituyendo el punto p en la ec. del hiperplano.

Proposición: $C = <q> = <(a_{ij})>$ una cuádrica.

$$\boxed{\begin{pmatrix} & & \\ & a_{ij} & \\ & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}$$

ECUACIÓN DEL LUGAR SINGULAR DE UNA CUÁDRICA

o bien

$$\left\{ \begin{array}{l} q(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ \dfrac{\partial q}{\partial x_1}(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ \dfrac{\partial q}{\partial x_n}(x_1, \dots, x_n) = 0 \end{array} \right.$$

ECUACIONES DEL LUGAR SINGULAR ("DIFERENCIAL")

Proposición: C tiene algún(os) punto(s) singulares $\Longleftrightarrow$ C es tipo I.

CLASIFICACIÓN EUCLÍDEA DE CUÁDRICAS

Definición: Dos cuádricas $C, \overline{C}$ en $(A_n, V, \langle g \rangle)$ se dicen euclídeamente equivalentes si $\exists\ \sigma : A_n \longrightarrow A_n$ movimiento tal que $\sigma(C) = \overline{C}$.

- Como los mov. conservan distancias, quiere decir que, por ejemplo, para que dos circunferencias sean euclídeamente equivalentes tienen que tener el mismo radio, luego hay una clase de eq. por cada r. ¡Infinitas! No hay Th de Clasificación.

- Si $C = \langle q \rangle \overset{=\langle S \rangle}{}$ es una cuádrica sobre $(A_n, V, \langle g \rangle)$, entonces $S : \mathbb{E}_{n+1} \times \mathbb{E}_{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}$ es la forma cuadrática asociada a $\hat{q}$, y $S|_V : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ por ser una métrica sobre V. Como g es otra, el Th Espectral dice que si $\varphi : V \longrightarrow V$ es el endomorfismo auto-adjunto asociado a $\{g, S|_V\}$, hay una base ortonormal para g en la que φ y $S|_V$ diagonalizan con la misma matriz $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$.

Definición: Llamaremos direcciones principales de C a los autovectores de φ $\{v_1, \dots, v_n\}$.

*Teorema (Ecuaciones Reducidas de una cuádrica euclídea): Sea C ~~una~~ cuádrica. Entonces C es uno de los siguientes tipos:

I) $$\sum_{i=1}^{r'} \pm \frac{x_i^2}{a_i^2} = 0$$

II) $$\sum_{i=1}^{r'} \pm \frac{x_i^2}{a_i^2} = 1$$

III) $$\sum_{i=1}^{r'} \pm \frac{x_i^2}{a_i^2} = x_n$$

III : ESPACIO PROYECTIVO

Definición (Sintética de EP): Un EP es un conjunto $\mathbb{P}$ a cuyos elementos llamamos puntos junto a una familia de subconjuntos a los que llamamos rectas verificando:

i) Por dos puntos pasa una recta

ii) Toda recta contiene al menos dos puntos

iii) (VEBLEN). Si una recta corta a dos lados de un triángulo (no por un vértice) entonces corta tb al tercer lado.

• "iii) dice que dos rectas coplanarias siempre se cortan".

Definición (Sintética de VL): Una variedad lineal es un subconjunto $X \subseteq \mathbb{P}$ tal que si contiene a dos ptos, contiene a la recta que los une. Llamamos dimensión de una VL X a la máxima de las longitudes de sucesiones estr. crec. de la forma

$$\emptyset \neq \overset{\text{ptos}}{X_0} \subset \overset{\text{rectas}}{X_1} \subset \overset{\text{planos}}{\dots} \subset X_n = X.$$

-1

• $X + Y :=$ mínima VL que contiene a X e Y

Teorema: Sea $\mathbb{P}$ EP de dim ≥ 2, $H \subseteq \mathbb{P}$ hiperplano.

$$\mathbb{A}_H := \mathbb{P} \setminus H \quad \text{es un EA sintético}$$

Llamamos a H hiperplano del infinito.

Definición (Algebraica de EP): Sea E un K-EV. Llamamos proyectivización de E (o EP asociado a E) a

$$\mathbb{P}(E) := \{ \text{sev de } E \text{ de dim } 1 \}.$$

Definición: Consideramos la aplicación

$$\begin{aligned} E \setminus \{0\} &\xrightarrow{\pi} \mathbb{P}(E) \\ e &\longmapsto \pi(e) := \langle e \rangle . \end{aligned}$$

Diremos que una variedad lineal de $\mathbb{P}(E)$ es un subconjunto $X = \pi(V)$ para algún sev $V \subseteq E$. Por definición, $\dim X = \dim V - 1$.

- punto $= \pi(\langle e \rangle)$; plano $= \pi(\langle e_1, e_2 \rangle), \ldots$
- $V_1 = V_2 \Leftrightarrow \pi(V_1) = \pi(V_2)$; $V_1 \subseteq V_2 \Leftrightarrow \pi(V_1) \subseteq \pi(V_2)$.

Definición: Un retículo es un conjunto $\mathcal{R}$ junto a una relación de orden parcial "$\leq$" tal que para todo par de elementos $a, b \in \mathcal{R}$ $\exists$ supremo $(a \vee b)$ e ínfimo $(a \wedge b)$.

Teorema: Sea $\mathcal{R}(E) = \{ \text{SEV de } E \}$, y $\mathcal{R}(\mathbb{P}(E)) = \{ \text{VL de } \mathbb{P}(E) \}$. Entonces $\mathcal{R}(E)$ y $\mathcal{R}(\mathbb{P}(E))$ son retículos con la relación "$\subseteq$" y se da el siguiente isomorfismo de retículos:

$$\begin{aligned} (\mathcal{R}(E), \subseteq) &= (\mathcal{R}(\mathbb{P}(E)), \subseteq) \\ V &\longmapsto \pi(V). \end{aligned}$$

- π conserva inclusiones, igualdades, sumas (supremos), dif. intersecciones (ínfimos), ...

Scanned by CamScanner

Proposición (Fórmula de la dimensión). Sean X, Y dos vl $\subseteq \mathbb{P}(E)$. Se cumple:

$$\boxed{\dim (X+Y) = \dim X + \dim Y - \dim (X \cap Y)}$$

Proposición (Propiedades)

1) $X \subseteq Y$, $\dim X = \dim Y \Rightarrow X = Y$.

2) Por dos pts pasa una única recta.

3) 3 plano

4) Dos rectas distintas se cortan en un pto

5) planos recta.

6) H hyperplano, $X \not\subseteq H$. $\Rightarrow \dim (X \cap H) = \dim X - 1$.

COORDENADAS

- Notar que $\pi(e) = \pi(e') \Longleftrightarrow e' = \lambda e$. (son proporcionales).

- **Definición**: Sea E un EV de dim $n+1$, y consideremos $\mathbb{P}(E)$ (de dim n). Llamamos referencia proyectiva a una colección de $n+2$ puntos $\{p_0, \dots, p_n, u\}$ en "posición general" (ie, que no haya hyperplanos que pasen por $n+1$ puntos). A $\{p_0, \dots, p_n\}$ se le llama símplice de la referencia; y u es el punto unidad.

- Símplice = hipertetraedro.

Teorema: Dada una referencia proyectiva $\{p_0, \dots, p_n, u\}$, existe una base de E $\{e_0, \dots, e_n\}$, única salvo un factor de proporcionalidad, tal que

$$\pi(e_i) = p_i \quad \forall i = 0, \dots, n \quad ; \quad \pi(e_0 + \dots + e_n) = u .$$

Llamamos a la base $\{e_0, \dots, e_n\}$ base normalizada asociada a la referencia.

- Sea $\{p_0, \dots, p_n, u\}$ una referencia proyectiva y $\{e_0, \dots, e_n\}$ su base normalizada (por el Th $\exists$). Sea $p \in \mathbb{P}(E)$. Como π es epiyectiva, $p = \pi(e) = \pi(x_0 e_0 + \dots + x_n e_n)$. Llamamos coordenadas homogéneas de p resp. a la ref. dada a $(x_0, \dots, x_n)$. Notar que las coord. de un pto son únicas salvo un factor de proporcionalidad. ($(x_0, \dots, x_n)$ y $(\lambda x_0, \dots, \lambda x_n)$ son el mismo pto).

PERSPECTIVIDADES

Definición: Sea $T: E \xrightarrow{\sim} F$ un isomorfismo lineal de e.v. Se llama proyectivización de T, o proyectividad, a

$$\widetilde{T}: \mathbb{P}(E) \longrightarrow \mathbb{P}(F)$$
$$p = \pi(e) \longmapsto \widetilde{T}(p) = \widetilde{T}(\pi(e)) := \pi(T(e)) .$$

Es decir, $\widetilde{T}$ cierra el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{T} & F \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ \mathbb{P}(E) & \xrightarrow{\widetilde{T}} & \mathbb{P}(F) \end{array}$$

Propos. (Propiedades de $\widetilde{T}$).

1) $\widetilde{T \circ T'} = \widetilde{T} \circ \widetilde{T'}$; $\widetilde{(T^{-1})} = (\widetilde{T})^{-1}$.

2) $\widetilde{T}$ transforma VL en VL

3) $\widetilde{T}$ trasforma ref. proyectivos en ref. proyectivos.

4) $\widetilde{T}$ conserva $+$ y $\cap$.

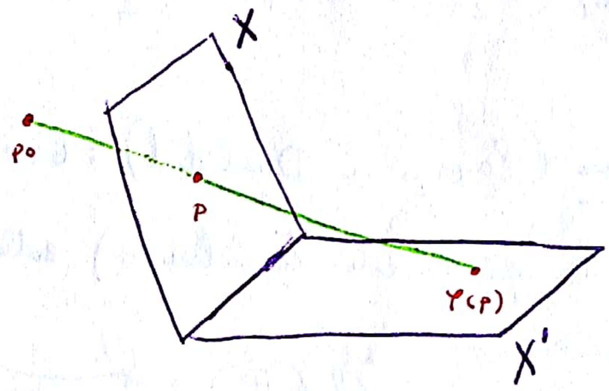
5) $\widetilde{T} = \widetilde{T'} \iff T' = \lambda T$.

Teorema: Sean $\mathbb{P}(E)$, $\mathbb{P}(E')$ e.p. de dim n; y consideremos $\{p_1, \dots, p_n, u\}$, $\{p_1', \dots, p_n', u'\}$ referencias proyectivas, resp. Entonces $\exists!\ \widetilde{T} : \mathbb{P}(E) \longrightarrow \mathbb{P}(E') : \widetilde{T}(p_i) = p_i', \widetilde{T}(u) = u'$.

Corolario: Una proyectividad está determinada por la imagen de $n+2$ pts en pos. general.

Definición: Sea $X, X' \subset \mathbb{P}(E)$, $p_0 \in \mathbb{P}(E)$ tal que

1) $p_0 \notin X, X'$
2) $p_0 + X = p_0 + X'$



llamamos perspectividad de centro p_0 a

$$\varphi : X \longrightarrow X'$$
$$p \longmapsto \varphi(p) := (p_0 + p) \cap X'$$

Y está bien def pues $(p_0 + p) \cap X'$ es un punto (Compruébese).

Teorema: Toda perspectividad es una proyectividad.

Teorema: Toda proyectividad es composición de un número finito de perspectividades.

Defin. Una colineación es una biyección $\varphi: \mathbb{P} \to \mathbb{P}'$ tal que si L es una recta $\Rightarrow \varphi(L)$ tb.

Teorema (Fundamental de la Geometría Proyectiva): En $\mathbb{R}$, proyectividad $\Longleftrightarrow$ colineación.

PRINCIPIO DE DUALIDAD

- Si E es un K-EV, $S \subseteq E$, $S^\circ = \{\omega \in E^* : \omega(S) = 0\}$, y se cumple

  - $\dim S^\circ = \dim E - \dim S$; $S_1 \subseteq S_2 \Longleftrightarrow S_1^\circ \supseteq S_2^\circ$; $(S^\circ)^\circ = S$.

Definición: Sea $\mathbb{P}(E)$ EP. Llamamos espacio proyectivo dual a $\mathbb{P}^* := \mathbb{P}(E^*)$, y dado $X = \pi(S) \subseteq \mathbb{P}$ VL, llamamos variedad lineal incidente a $X^\circ := \pi(S^\circ)$

- $X_1 \subseteq X_2 \Longleftrightarrow X_1^\circ \supseteq X_2^\circ$; $(X^\circ)^\circ = X$.

Teorema (Principio de Dualidad): Existe un anti-isomorfismo (i.e., una biyección entre retículos que invierte la inclusión) entre

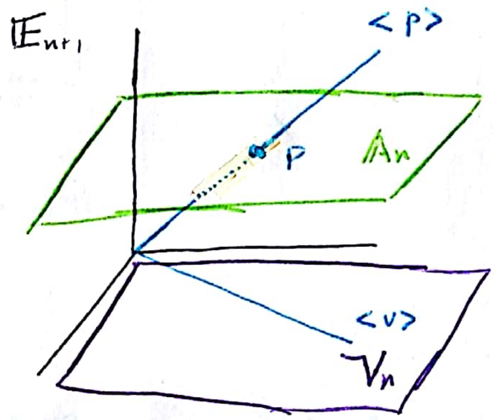
$$\mathcal{R}(\mathbb{P}) \Longleftrightarrow \mathcal{R}(\mathbb{P}^*)$$
$$X \longleftrightarrow X^\circ$$

- $\emptyset \longleftrightarrow \mathbb{P}$; $\subseteq \longleftrightarrow \supseteq$
  hiperplano $\longleftrightarrow$ pto ; $+ \longleftrightarrow \cap$
  $\vdots \longleftrightarrow$ recta
  $\vdots$

• Como $\mathbb{P}^*$ es otro EP, cualquier enunciado cierto para $\mathbb{P}$ se puede "dualizar" con las reglas anteriores y es también verdadero (o falso si el 1º lo era) para un EP.

INMERSIÓN PROYECTIVA DEL ESPACIO AFÍN

• $\mathbb{A}_n \hookrightarrow \mathbb{E}_{n+1}$; $V_n \hookrightarrow \mathbb{E}_{n+1}$.



Consideremos $P_n := \mathbb{P}(\mathbb{E}_{n+1})$, y

$H_{n-1} := \mathbb{P}(V_n) = \{$ sev de V de dim $1 \}$.

Entonces

$$\mathbb{A}_n \xhookrightarrow{j} \mathbb{E}_{n+1} \xrightarrow{\pi} P_n$$
$$p \longmapsto \pi(p) = \langle p \rangle$$

Cada sev de dim 1, salvo los de V_n, se identifica con un pto de $\mathbb{A}_n$. Luego se tiene la <u>inmersión del espacio afín</u>

$$\boxed{\mathbb{A}_n \overset{\pi}{=\!=} P_n \setminus H}$$

Llamamos a este hiperplano <u>hiperplano del infinito</u>.

<u>Proposición</u>: Sea $p \in \mathbb{A}_n$ un pto de coordenadas afines $(y_1, \dots, y_n)$. Entonces las coordenadas homogéneas de p son $(x_0 = \lambda, x_1 = \lambda \cdot y_1, \dots, x_n = \lambda y_n)$, pues $p = (1, y_1, \dots, y_n)$ en $\mathbb{E}_{n+1}$. Análogamente, si $(x_0, \dots, x_n)$ son las coordenadas homogéneas de un pto, sus coordenadas afines son

$$\boxed{y_i = \frac{x_i}{x_0}}$$

• $\boxed{x_0 = 0}$ es la ec. del hiperplano del infinito.

• Notar q. al homogeneizar la ecuación de una cónica, obtenemos cambiando a coordenadas homogéneas.

•

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{A}_n \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, hook] & \mathbb{A}'_n \arrow[d, hook] & \text{afinidad} \\
\mathbb{E}_{n+1} \arrow[r, "\hat{\varphi}"] \arrow[d, "\pi"'] & \mathbb{E}'_{n+1} \arrow[d, "\pi"] & \text{isomorfismo} \\
\mathbb{P}(\mathbb{E}_{n+1}) \arrow[r, "\widetilde{\hat{\varphi}}"] & \mathbb{P}(\mathbb{E}'_{n+1}) & \text{proyectividad.}
\end{tikzcd}$$

Luego

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{afinidades} \\ \varphi: \mathbb{A}_n \to \mathbb{A}'_n \end{array} \right\} \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{proyectividades} \\ \varphi: \mathbb{P} \to \mathbb{P}'_n \\ \text{tq } \varphi(H) = H' \end{array} \right\} \; ; \; \left\{ \begin{array}{l} \text{VL } X \subseteq \mathbb{P}_n \\ \text{tq } X \not\subseteq H \end{array} \right\} \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{SEA} \\ Y \subseteq \mathbb{A}_n \end{array} \right\}.$$

RAZÓN DOBLE, CUATERNAS ARMÓNICAS, CUATRIVÉRTICES, ...

• Dos ~~ternas~~ de puntos en $\mathbb{P}_1$ son siempre equivalentes ($\exists$ proyect. q. transf. una en la otra. ¿Y 4?

Definición: Sean p_1, p_2, p_3, p_4 puntos ordenados de $\mathbb{P}_1$. Llamamos razón doble de los 4 puntos a

$$(p_1, p_2; p_3, p_4) := \frac{x_1}{x_2} \in K \cup \{\infty\}$$

donde (x_1, x_2) son las coord. homogéneas de p_4 en la ref. $\{p_1, p_2, p_3\}$.

$$\left. \begin{array}{l} \bullet\ p_4 = p_1 \\ \bullet\ p_4 = p_2 \\ \bullet\ p_4 = p_3 \end{array} \right\} \Rightarrow (p_1, p_2; p_3, p_4) = \left\{ \begin{array}{l} \infty \\ 0 \\ 1 \end{array} \right.$$

Lema: $(p_1, p_2; p_3, p_4) = (p_1, p_2; p_3, \overline{p_4}) \iff p_4 = \overline{p_4}$.

Definición: Fijamos una ref proyectiva $\{p_1, p_2, p_3\}$ de $\mathbb{P}_1$ y consideramos la biyección (por el lema)

$$\mathbb{P}_1 \xrightarrow{\ \Theta\ } K \cup \{\infty\}$$

$$p \longmapsto \Theta(p) = (p_1, p_2; p_3, p) = \frac{x_1}{x_2}$$

Llamamos a $\Theta(p)$ parámetro proyectivo de p.

- La biyección dice que Θ sirve para coordenar la recta con una sola coordenada.
- $\mathbb{A}_1 = \mathbb{P}_1 \setminus \{p_1\} \xrightarrow{\ \Theta\ } K$; luego $\Theta|_{\mathbb{A}_1}$ es la coordenada afín resp. una cierta ref afín.

Teorema: Toda proyectividad conserva razones dobles.

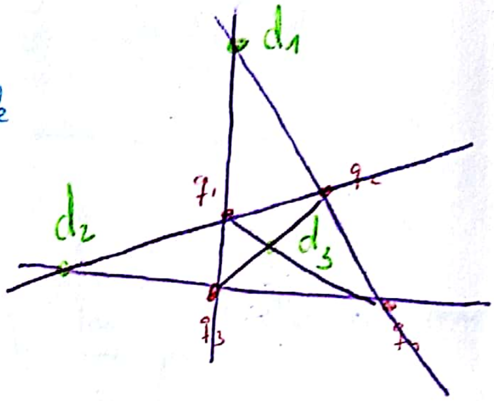
Proposición: Sean $q_1, q_2, q_3, q_4 \in \mathbb{P}_1$ y $\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3, \Theta_4$ sus parámetros proyectivos resp. a una ref. dada. Entonces

$$\boxed{(q_1, q_2; q_3, q_4) = \frac{(\Theta_1 - \Theta_3)(\Theta_2 - \Theta_4)}{(\Theta_1 - \Theta_4)(\Theta_2 - \Theta_3)}}$$

- $(q_1, q_2; q_4, q_3) = \dfrac{1}{(q_1, q_2; q_3, q_4)} = (q_2, q_1; q_3, q_4)$.

Definición: Una cuaterna p_1, p_2, p_3, p_4 se dice armónica si $(p_1, p_2; p_3, p_4) = -1$.

Se dice que $\{p_1, p_2\}$, $\{p_3, p_4\}$ se separan armónicamente o que p_1 y p_2 son mutuamente conjugados respecto $\{p_3, p_4\}$.



Definición: Un cuadrivértice completo es una figura de $\mathbb{P}_2$ formada por 4 ptos en posición general, llamados vértices, junto con las 6 rectas que pasan por cada dos de los ptos. A los ptos donde se cortan rectas opuestas se le llama puntos diagonales.

- Sean $p, a_1, a_2 \in \mathbb{P}_1$. El conjugado armónico de p resp. $\{a_1, a_2\}$ es, según el dibujo de arriba, el pto de corte de la recta $d_1 d_3$ con la $q_3 q_4$.

Proposición: Toda proyectividad $\tau : \mathbb{P}_1 \to \mathbb{P}_1$ puede expresarse en términos del parámetro proyectivo, como $\tau(\theta) = \dfrac{a\theta + b}{c\theta + d}$, con $ad - bc \neq 0$.

Lema: Toda proyectividad $\tau : \mathbb{P}_1 \to \mathbb{P}_1$ tiene a lo sumo dos ptos fijos.

Definición: Sea $\tau : \mathbb{P}_1 \to \mathbb{P}_1$ una proyectividad.

1) τ se dice hiperbólica si tiene 2 ptos fijos.

2) parabólica 1.

3) elíptica 0.

Teorema: Sea $\tau : \mathbb{P}_1 \longrightarrow \mathbb{P}_1$ una proyectividad. Entonces existe una referencia proyectiva tal que τ se escribe como

1) τ hiperbólica $\Longrightarrow \tau(\theta) = \lambda\theta$

2) τ parabólica $\Longrightarrow \tau(\theta) = \theta + 1$

3) τ elíptica $\Longrightarrow \begin{cases} \tau \text{ involutiva} \Longrightarrow \tau(\theta) = \dfrac{\lambda}{\theta}, & \sqrt{\lambda} \notin \mathbb{K} \\ \tau \text{ no involutiva} \Longrightarrow \tau(\theta) = \dfrac{1}{\lambda\theta + 1}, & \sqrt{1+4\lambda} \notin \mathbb{K} \end{cases}$

IV: CUÁDRICAS EN EL ESPACIO PROYECTIVO

Definición: Una cuádrica en $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(E_{n+1})$ es un SEV unidimensional $\langle q \rangle \subset Q(E_{n+1})$ ó $\langle S \rangle \subset \mathcal{M}(E_{n+1})$. Llamaremos lugar de la cuádrica $C = \langle S \rangle$ a

$$\text{lugar de } C = \{ p = \pi(e) \in \mathbb{P}_n : S(e,e) = 0 \}$$

- $\displaystyle\sum_{i,j=1}^{n+1} a_{ij}\, x_i x_j = 0$ es la ecuación de una cuádrica proyectiva

- Una cuádrica en $\mathbb{P}_1$ es siempre dos puntos "bien contados": efectivos, doble o imaginarios.

Definición: Sea $X = \pi(F)$ una VL no contenida en $C = \langle S \rangle$ (luego $S_{|F} \neq 0$). Llamaremos cuádrica intersección $C \cap X$ a la cuádrica $\langle S_{|F} \rangle$ en $\mathbb{P}(F) = X$.

- Una recta (plano) proyectiva corta a una cuádrica en dos puntos (una cónica)

Definición: Llamaremos rango e índice de una cuádrica $(C = \langle S \rangle)$ al rango e índice de S.

Definición: Llamaremos lugar singular de $C = \langle S \rangle$ a

$$\operatorname{Sing} C := \pi(\operatorname{rad} E)$$

Lema I: Sea (E, S), S de rang r e índice i. Todos los SIM contienen al rad E y tienen dimensión $n-r+i$.

Lema II: $(\bar{E}, S)$ no singular, $\exists$ SIM cuya intersección es 0.

Lema III: $\bigcap$ SIM $=$ rad E.

Teorema: Sea $C = \langle S \rangle$ una cuádrica de $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(E_{n+1})$ de rango r e índice i.

1) $\boxed{\dim \operatorname{Sing} C = n-r}$

2) $\boxed{\dim VLM = n-r+i}$ (todas las VLM tienen dim común)

3) $\bigcap VLM = \operatorname{Sing} C$.

NOCIÓN DE EQUIVALENCIA EN CUÁDRICAS PROYECTIVAS

- $\varphi : (E, S) \xrightarrow{\sim} E'$ isomorfo, y se puede definir $(E', \varphi(S))$ con $\varphi(S)(e_1', e_2') := S(\varphi^{-1}(e_1'), \varphi^{-1}(e_2'))$ y se llama a $\varphi(S)$ métrica transformada.

Definimos: Sea $\tilde{\varphi} : \mathbb{P}(E) \longrightarrow \mathbb{P}(E')$, y $C = \langle S \rangle$ sobre E. Llamamos transformada de C por $\tilde{\varphi}$ a $\tilde{\varphi}(C) = \tilde{\varphi}(\langle S \rangle) := \langle \varphi(S) \rangle$.

Definición: Dos cuádricas $C, \bar{C}$ de $\mathbb{P}(E)$ se dicen *proyectivamente equivalentes* si $\exists\, \tilde{\varphi} : \mathbb{P}(E) \to \mathbb{P}(E)$ tal que $\bar{C} = \tilde{\varphi}(C)$.

Teorema (Clasificación Proyectiva para $\mathbb{R}$): Sean $C, \bar{C}$ dos cuádricas de un EP *real*.

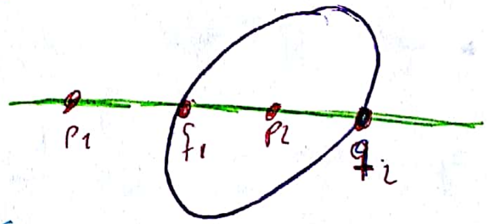
$$C \equiv \bar{C} \iff C, \bar{C} \text{ tienen el mismo rango e índice}$$

POLARIDAD Y TANGENCIA

Definición: Dos puntos $p_1 = \pi(e_1)$ y $p_2 = \pi(e_2)$ se dicen *conjugados respecto una cuádrica* $\langle S \rangle = C$ si $S(e_1, e_2) = 0$.

- $p = \pi(e) \in$ lugar de $C \Rightarrow S(e,e) = 0 \iff e$ auto-conjugado.
- Como $\mathrm{Sing}\, C = \pi(\mathrm{rad}\, E)$, $e \in \mathrm{Sing}\, C \iff e$ conjugado con todo punto de E.

Proposición: Sea C cuádrica y $\mathbb{P}_1$ una recta que corta en dos pts q_1, q_2 a C. Sean $p_1, p_2 \in \mathbb{P}_1$.



p_1, p_2 conjugados respecto $C \iff p_1, p_2$ conj. armónicos resp. q_1, q_2

Definición: Sea $X = \pi(V)$ VL. Llamamos variedad polar de X a

$$X^{\perp} := \pi(V^{\perp}) = \{p \in \mathbb{P}(E) : p \text{ conjugado de todo pto de } X\}$$

Definición: Sea $C = \langle S \rangle$ no singular. Entonces $\forall p \in \mathbb{P}(E)$, $p^{\perp}$ es un hyperplano, al que llamamos hyperplano polar de p. Análogamente si H hiperplano, $H^{\perp}$ es un punto al que llamamos polo del hyperplano.

Lema: Sea $C = \langle S \rangle$. $p \notin \text{Sing} \to p^{\perp}$ es un hyperplano, al que llamamos hyperplano polar de p.

• Para construir la recta polar de un pto respecto una cónica $C = \langle S \rangle$, se construye un cuadrivértice completo y se usa la prop. anterior. y el hecho que

$$p^{\perp} = \{q \in \mathbb{P}(E) : q \text{ conjugado de } p\}.$$

para ver que si ponemos p con uno de los puntos diagonales, la recta polar será la que pasa por los otros dos pts diagonales.

• El polo de una recta se hace como sigue: se cogen dos pts de la recta, se calculan sus hyperplanos polares y el pto de corte es el polo.

• Las rectas tg a una ~~cónica~~ cónica que pasan por un pto exterior se hacen como ...

<u>Defn</u>: Una vc X se dice tangente a C en $p \in C \setminus \mathrm{Sing}\, C$ si $p \in X \subseteq p^{\perp}$.

<u>Propn</u>: Sea $p \in C \setminus \mathrm{Sing}\, C$, y $p \in L$ recta.

$$L \text{ es tg a } C \text{ en } p \iff L \subseteq C \text{ ó } L \cap C \text{ es un pto doble.}$$

<u>Propn</u>: Sea $b = (b_0, \ldots, b_n) \in \mathbb{P}(E_{n+1})$, $b \in C \setminus \mathrm{Sing}\, C$.

$$\boxed{(b_0, \ldots, b_n) \begin{pmatrix} a_{ij} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0}$$

ECUACIONES DEL HIPERPLANO POLAR DEL PUNTO b.

<u>Propn</u>:

$$\boxed{\begin{pmatrix} a_{ij} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0}$$

ECUACIONES DE $\mathrm{Sing}\, C$.

<u>CUÁDRICAS AFINES DESDE UN PUNTO DE VISTA PROYECTIVO</u>

- $\mathbb{A}_n = \mathbb{P}_n \setminus H$, $H = \pi(\vec{V})$, dado $(\mathbb{A}_n, \vec{V}, +)$ EA.

$$\left.\begin{array}{l} \text{Cuádrica de } \mathbb{A}_n = \langle S \rangle \subset \mathcal{M}(E_{n+1}) \\ \text{Cuádrica de } \mathbb{P}_n = \mathbb{P}(E_{n+1}) = \langle S \rangle \subset \mathcal{M}(E_{n+1}) \end{array}\right\} \text{ es lo mismo!}$$

Scanned by CamScanner

• r e i de $\overset{\langle S\rangle}{\overset{\shortparallel}{C}}$ (afínmente) $=$ r e i de S $=$ r e i de C (proyectivamente)

• r' e i' de $C = \langle S\rangle$ afínmente $=$ r e i de $S_{|V}$ ($\equiv$ matriz de la cuádrica en $P(V) = H$) $=$ r e i de $C \cap H = \langle S_{|V}\rangle$ proyect.

• $\boxed{y_i = \dfrac{x_i}{x_0}}$ REL. ENTRE COORD. AFINES Y HOMOGENEAS.

• El cambio de coordenadas de afines a homogéneas de una cuádrica es precisamente la homogeneización de q, $\hat{q}$, y el corte con H ($x_0 = 0$) es la parte principal $\overleftrightarrow{q}$.

Teorema (Clasificación Afín de las Cuádricas en Términos Proyectivos): Dos cuádricas son afínmente equivalentes si y sólo si son proyectivamente equivalentes y las cuádricas obtenidas en el hiperplano del infinito son proyectivamente equivalentes.

Teorema (Tipos de cuádricas proyectivamente)

C de tipo I $\Longleftrightarrow$ $r' = r$, $i' = i$ $\Longrightarrow$ $\operatorname{Sing} C \not\subseteq H$

C de tipo II $\Longleftrightarrow$ $r' = r-1$, $\begin{cases} i' = i \\ i' = i-1 \end{cases}$ $\Longrightarrow$ $\operatorname{Sing} C \subseteq H$, H no tg a C ; $\begin{cases} H \text{ contiene VLM} \\ H \text{ no contiene VLM} \end{cases}$

C de tipo III $\Longleftrightarrow$ $r' = r-2$, $i' = i-1$ $\Longrightarrow$ $\operatorname{Sing} C \subseteq H$, H tg a C.

<u>Proposición</u>: H tg a C $\Leftrightarrow$ $rg(C \cap H) = rg(C) - 2$,
$i(C \cap H) = i(C) - 1$.

• $(\mathbb{A}_n, V_n, \langle g \rangle) \in AE$, con $H = \pi(V)$ en $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(\mathbb{E}_{n+1})$, que den ge.
$\langle g \rangle = C$ es una cuádrica sobre H. Como g euclídea, $(p = n, q = 0) \Rightarrow$
$\Rightarrow r = n$, $i = 0$ $\Rightarrow$ C cuádrica no singular imaginaria en H. A esta cuádrica se le llama <u>cuádrica del absoluto</u> y tiene ecuación

$$\boxed{x_1^2 + \dots + x_n^2 = 0} \qquad (\text{en } x_0 = 0).$$

<u>Prop</u>. Las elipses tienen 4 focos "bien contados".

<u>Prop</u>: $\mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1 \simeq$ Hiperboloide reglado.