I: ESPACIO AFÍN

* Definición (Sintética de EA, SEA): Un espacio afín (de dim ≥ 2) es un conjunto $\mathbb{A}$, cuyos elementos se llaman puntos, junto a dos familias no vacías $\mathcal{R}$ y $\mathcal{P}$ de subconjuntos de $\mathbb{A}$ a los que sus elementos llamaremos rectas y planos resp, verificando los siguientes axiomas:

Ax 1.- Por dos ptos distintos pasa una única recta

Ax 2.- Por tres ptos no alineados pasa un único plano.

Ax 3.- Dados dos ptos en un plano, la recta que pasa por ellos está contenida en el plano.

Ax 4.- Dado un pto y una recta, existe una única recta paralela a esta que pasa por el pto

Ax 5.- La relación de paralelismo es una relación de equivalencia.

Asimismo, llamaremos subespacio afín a cualquier subconjunto $X \subseteq \mathbb{A}$ que verifique:

1) X conteniendo a dos ptos distintos $\Rightarrow$ X contiene a la recta que pasa por ellos

2) " " " tres " " $\Rightarrow$ " " " plano " " " "

* Diremos que dos rectas son paralelas si o bien son coplanarias y no se cortan o si bien son iguales.

* Definición (Algebraica de EA, SEA): Un espacio afín es una terna $(\mathbb{A}, V, +)$, donde $\mathbb{A}$ es un conjunto a cuyos elementos llamaremos puntos, V es un K-EV al que llamaremos EV asociado, y $+$ es una aplicación

$$\begin{aligned} \mathbb{A} \times V &\longrightarrow \mathbb{A} \\ (p, v) &\longmapsto p+v \end{aligned}$$

que verifica

Ax 1.- $(p+v)+w = p+(v+w) \quad \forall p \in \mathbb{A},\ v, w \in V$

Ax 2.- $p+v = p \iff v = 0 \quad$ " $\ v \in V$

Ax 3.- Dados $p, \bar{p} \in \mathbb{A}$, $\exists! v \in V : \bar{p} = p+v$

Diremos además que un subconjunto $X \subseteq \mathbb{A}$ es un <u>subespacio afín</u> (ó <u>variedad lineal</u>) si $\exists$ un SEV $W \subseteq V$ llamado <u>dirección</u> del SEA tal que:

1) $x + w \in X \qquad \forall x \in X,\ w \in W$.

2) Dados $x, \bar{x} \in X \quad \exists\, w \in W \ : \ \bar{x} = x + w$

Se denotará $X = x_0 + W$, y ~~dim X~~

<u>Definición</u> (Dimensión): Sintéticamente, llamaremos <u>dimensión</u> de un SEA $X \subset \mathbb{A}$ a la máxima de las longitudes de SEA's de la forma $\emptyset \neq X_0 \subseteq X_1 \subseteq \dots \subseteq X_n = X$. (Por convención dim $\emptyset = -1$). Algebraicamente, dim $X :=$ dim W; y en particular dim $\mathbb{A} :=$ dim V.

* Dos SEA se dicen paralelos si sus direcciones son incidentes; y si tienen la misma dim, si son iguales.

* <u>Definición</u>: Llamaremos <u>referencia afín</u> a una sucesión $\{p_0, v_1, \dots, v_n\}$, donde $p_0 \in \mathbb{A}$, y $\{v_1, \dots, v_n\}$ base de V. Llamamos a p_0 <u>origen de la referencia</u>.

* Como cualquier $p \in \mathbb{A}$, $p = p_0 + v = p_0 + (x_1 v_1 + \dots + x_n v_n)$, llamamos a $(x_1, \dots, x_n)$ <u>coordenadas</u>.

<u>Cambio de coordenadas afines</u>: Sean $\{p_0, \underbrace{v_1, \dots, v_n}_{b.v.}\}$ y $\{\bar{p}_0, \underbrace{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n}_{b.n}\}$ dos ref afines de $\mathbb{A}$, y $(x_1, \dots, x_n)$ y $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$ las coord. de un $p \in \mathbb{A}$ resp. a las dos.

Sea $B \equiv$ matriz de cambio de base (de $\{\bar{v}_i\}$ a $\{v_i\}$), y que $p_0 = \bar{p}_0 + \sum a_i \bar{v}_i$ ciertos.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \bar{x}_1 \\ \vdots \\ \bar{x}_n \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline a_i & B^{-1} \end{array}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

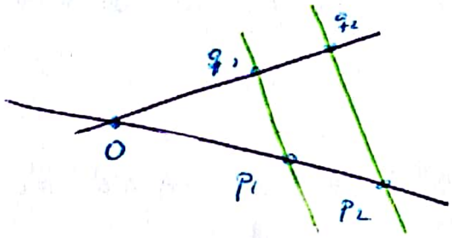
coord. de p_0 en la base nueva

mat. de cambio de base de la vieja a la nueva.

Definición: Llamaremos **segmento** a un par ordenado $\{p_0 p_1\}$ de $\mathbb{A}_n$, y diremos que dos segmentos son paralelos si están incluidos en rectas paralelas. Además, dados $\{p_0 p_1\}$ y $\{q_0 q_1\}$, $p_1 = p_0 + v$, $q_1 = q_0 + w$; y $w = \lambda v$ para algún $\lambda \in K$. Llamamos **proporción** de los segmentos a $\frac{q_0 q_1}{p_0 p_1} := \lambda$.

Teorema (Tales): Dadas dos rectas concurrentes en O, y otras dos paralelas que no pasan por O, se cumple

$$\frac{Op_2}{Op_1} = \frac{Oq_2}{Oq_1} = \frac{p_2 q_2}{p_1 q_1}$$

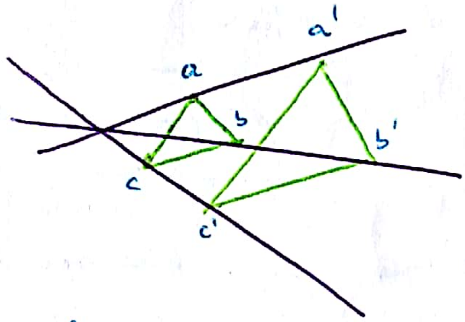


Teorema (Recíproco de Tales): Dadas dos rectas concurrentes en O y otras dos que no pasan por O,

$$\frac{Op_2}{Op_1} = \frac{Oq_2}{Oq_1} \Rightarrow \text{las rectas son paralelas.}$$

Teorema (Desargues Mayor): Dadas tres rectas distintas concurrentes en O, y dos triángulos cuyos vértices yacen en las rectas.

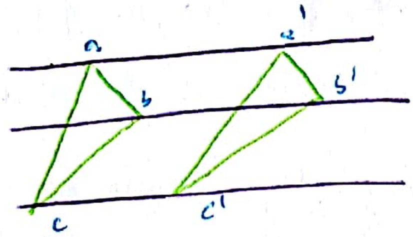
$$ab \parallel a'b', \; ac \parallel a'c' \Rightarrow bc \parallel b'c'$$



Lema: La razón entre los lados opuestos de un paralelogramo es 1.

Teorema (Desargues Menor): Dadas tres rectas distintas paralelas, y dos triángulos cuyos vértices yacen en las rectas,

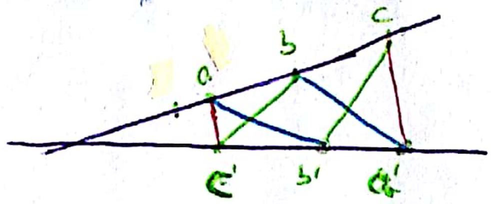
$$ab \parallel a'b', \; ac \parallel a'c' \Rightarrow bc \parallel b'c'$$



Lema: Sea pp', qq', rr' tres segmentos paralelos. $\frac{pp'}{qq'} \cdot \frac{qq'}{rr'} = \frac{pp'}{rr'}$

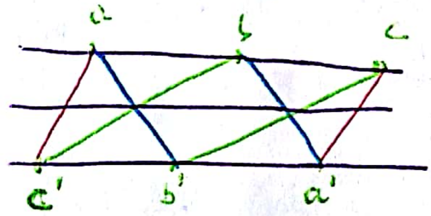
Teorema (Pappus): Sean dos rectas distintas concurrentes, y $\{a,b,c\}$, $\{a',b',c'\}$ ternas de puntos en cada una de las rectas.

$ab' \| a'b$, $bc' \| b'c \Rightarrow ac' \| a'c$



Teorema: En dos rectas paralelas consideramos las dos ternas de pts $\{a,b,c\}$, $\{c',b',c'\}$, se sigue cumpliendo

$ab' \| a'b$, $bc' \| b'c \Rightarrow ac' \| a'c$



MORFISMOS AFINES

* **Definición**: Un morfismo afín entre dos espacios afines (A_n, V) y (A'_m, V') es una aplicación $\varphi: A_n \to A'_m$ tal que existe una aplicación lineal $\vec{\varphi}: V \to V'$ que verifica

$$\boxed{\varphi(p+v) = \varphi(p) + \vec{\varphi}(v)}$$

A $\vec{\varphi}$ se le llama aplicación lineal asociada.

Proposición (Propiedades de los morfismos afines):

1) La identidad es un morfismo afín, cuya apl. lin. asoc. es la Id_V.
2) La composición de morfismos afines es un morfismo afín, cuya apl. li. aso. es la composición de las apl. lin.
3) Los morfismos afines transforman SEA en SEA
4) Los morfismos afines conservan el paralelismo
5) φ inyectiva (ó epi ó bi) $\iff$ $\vec{\varphi}$ inyectiva (ó epi ó bi)
6) Los morfismos afines transforman ptos de corte de dos SEA en pts de corte de los SEA transformados.

Coordenadas de morfismos afines: Sea $\varphi : \mathbb{A}_n \longrightarrow \overline{\mathbb{A}}_m$

$$\{p_0, v_1, \dots, v_n\} \qquad \{\bar{p}_0, \bar{v}_1, \dots, \bar{v}_m\}.$$

Sea $\varphi(p_0) = \bar{p}_0 + b_1 \bar{v}_1 + \dots + b_m \bar{v}_m \equiv (b_1, \dots, b_m)$

y $A \equiv$ matriz de $\vec{\varphi} : V \longrightarrow \bar{V}$.

Sea $p \in \mathbb{A}$; si $p = (x_1, \dots, x_n)$; y $\varphi(p) = (y_1, \dots, y_m)$,

$$\begin{pmatrix} 1 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline b_i & A \end{array}\right).$$

transformada del origen

matriz de $\vec{\varphi}$

* **Definición:** Un morfismo afín se llama isomorfismo afín ó afinidad si $\exists\, \varphi^{-1} : \varphi \circ \varphi^{-1} = \varphi^{-1} \circ \varphi = Id$. Llamaremos autoafinidad a una afinidad de un EA en sí mismo.

* φ isomorfismo $\Longleftrightarrow$ φ biyectiva.

Definición (Traslación): Dado un vector $w \in V$, llamaremos traslación respecto al vector w a la aplicación

$$\begin{aligned} \tau_w : \mathbb{A} &\longrightarrow \mathbb{A} \\ p &\longmapsto \tau_w(p) := p + w \end{aligned}$$

Proposición: $\{\text{traslaciones}\} = \{\text{autoafinidades} : \vec{\varphi} = Id\}$.

Proposición: $\tau_v \circ \tau_w = \tau_{v+w}$

* Grupo Lineal $\equiv Gl(V) := (Aut(V), \circ)$.

Definición (Homotecia): Fijado un pto p_0 y un $0 \neq \lambda \in K$, llamaremos homotecia de centro p_0 y razón λ a la aplicación

$$\sigma : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{A}$$
$$p = p_0 + v \longmapsto \sigma(p_0+v) := p_0 + \lambda v$$

que es una auto-afinidad, de apl. lin asoc. $\vec{\sigma} = \lambda \cdot Id$.

*Definición (Dilatación): Llamaremos dilatación a toda auto-afinidad $\sigma : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ cuya apl. lin. asoc. sea proporcional a la identidad, $\vec{\sigma} = \lambda \cdot Id$, para algún $\lambda \in K$.
Llamaremos razón de la dilatación a λ.

* La composición de dilat. es una dilat.

*Teorema:
D

$$\{\text{dilataciones}\} = \underset{\exists \text{ pto fijo}}{\{\text{homotecias}\}} \cup \underset{\nexists \text{ pto fijo}}{\{\text{traslaciones}\}}$$

Teorema (Caract. Geom. de las Dilataciones). Sea $\sigma : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ una aplicación biyectiva.

σ dilatación $\Longleftrightarrow$ σ transforma cada recta en otra paralela.

*Teorema (Fundamental de la Geom. Afín): Sea $\varphi : \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$ una biyección entre $\mathbb{R}$-EA.
E

φ afinidad $\Longleftrightarrow$ φ transforma rectas en rectas.

ECUACIONES DE JEA :

Recta

$\mathbb{A}_2$, $\begin{cases} a(a_1, a_2) \\ b = (b_1, b_2) \end{cases}$

- Param. : $\begin{cases} x = a_1 + \lambda(b_1 - a_1) \\ y = a_2 + \lambda(b_2 - a_2) \end{cases}$
- Implícit : $\begin{vmatrix} x - a_1 & y - a_2 \\ b_1 - a_1 & b_2 - a_2 \end{vmatrix} = 0$

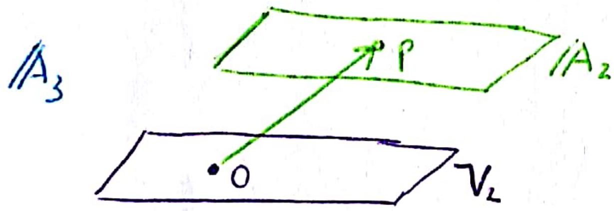
$\mathbb{A}_3$ $a(a_1, a_2, a_3)$, $b(b_1, b_2, b_3)$: $\operatorname{rg}\begin{pmatrix} x - a_1 & y - a_2 & z - a_3 \\ b_1 - a_1 & b_2 - a_2 & b_3 - a_3 \end{pmatrix}$

Plano : $a(a_1, a_2, a_3)$, $b(b_1, b_2, b_3)$, $c(c_1, c_2, c_3)$

$$\begin{vmatrix} x - a_1 & y - a_2 & z - a_3 \\ b_1 - a_1 & b_2 - a_2 & b_3 - a_3 \\ c_1 - a_1 & c_2 - a_2 & c_3 - a_3 \end{vmatrix} = 0.$$

* **Definición** : Llamaremos extensión vectorial de $\mathbb{A}_n$ a un K-EV $\mathbb{E}_{n+1}$ de dim $n+1$, junto con un morf. afín inyectivo $j : \mathbb{A}_n \hookrightarrow \mathbb{E}_{n+1}$ tal que $0 \notin \operatorname{Im} j = j(\mathbb{A}_n) \simeq \mathbb{A}_n$.

* $j(\mathbb{A}_n)$ es un hiperplano afín de $\mathbb{E}_{n+1}$ de dirección $\vec{j}(V)$. Denotaremos además a $j(p) \overset{NOT}{=} p$, para indicar el vector $j(p) \in \mathbb{E}_{n+1}$.



* **Lema** D : Toda referencia afín $\{p_0, v_1, \dots, v_n\}$ de $\mathbb{A}_n$ es una base de $\mathbb{E}_{n+1}$

Teorema : Todo morfismo afín $\varphi : \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$ extiende de modo único a una apli. lin. $\hat{\varphi} : \mathbb{E} \to \mathbb{E}'$, de modo que el sig. diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{A} & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{A}' \\ j \downarrow & & \downarrow j' \\ \mathbb{E} & \xrightarrow{\hat{\varphi}} & \mathbb{E}' \end{array}$$

Corolario: Si $\mathbb{E}, \mathbb{E}'$ son dos extensiones vectoriales de $\mathbb{A}$, entonces son isomorfas.

CL ESPECIALES

Lema: Dado $\mathbb{A}_n \xhookrightarrow{j} \mathbb{E}_{n+1}$, $\exists\, \omega_0 \in \mathbb{E}^*_{n+1}$: la ec. del hiperplano $j(\mathbb{A}) = \mathbb{A}$ es $\omega_0 = 1$

Corolario: Sean $p_1, \ldots, p_r \in \mathbb{A}_n \subseteq \mathbb{E}_{n+1}$.

$$\lambda_1 p_1 + \ldots + \lambda_r p_r \in \mathbb{A}_n \iff \lambda_1 + \ldots + \lambda_r = 1$$

* En Geometría Afín tiene sentido por tanto hablar de: pto medio $\left(\frac{p_1+p_2}{2}\right)$, baricentro $\left(\frac{p_1 + \ldots + p_n}{n}\right)$, ...

II: GEOMETRÍA EUCLÍDEA

* E denotará un $\mathbb{R}$-EV de dim $< +\infty$.

<u>Definición</u>: Una <u>métrica simétrica</u> es una aplicación bilineal y simétrica.

$$S: E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(e, e') \longmapsto S(e, e')$$

<u>Definición</u>: Una <u>métrica euclídea</u> (ó producto escalar ó producto interior) es una métrica simétrica $g: E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ definida positiva, ie, $g(e,e) > 0$ $\forall e \neq 0$ (luego $g(e,e) = 0 \Leftrightarrow e = 0$).

<u>Matriz de una métrica</u>: Fijada $\{e_1, \dots, e_n\}$ $\mathcal{B}(E)$, vamos a definir $(g_{ij}) := (e_i \cdot e_j)$, y la llamaremos matriz de la métrica g resp. a la base dada. Además, si $x = (x_1, \dots, x_n)$, e $y = (y_1, \dots, y_n)$, entonces

$$g(x, y) = x \cdot y = (x_1, \dots, x_n) \begin{pmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ g_{n1} & \cdots & g_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

<u>Definición</u>: Un <u>espacio vectorial euclídeo</u> es un $\mathbb{R}$-EV de dim $< +\infty$ dotado de una métrica euclídea g. Denotaremos como (E, g) al EVE. Además,

$$|e| := \sqrt{g(e,e)} = \sqrt{e \cdot e} \equiv \underline{\text{módulo}} \text{ de } e$$

$$\cos\theta := \frac{e_1 \cdot e_2}{|e_1| \cdot |e_2|} \equiv \text{coseno del ángulo que forman los vectores } e_1 \text{ y } e_2.$$

* Direm que dos vectors son <u>ortogonales</u> quan $e_1 \cdot e_2 = 0$.

<u>Definició</u>: Sea $V \subseteq E$ un SEV. Llamarem <u>ortogonal</u> de V a

$$V^{\perp} := \{ e \in E : e \cdot V = 0 \}$$

y direm que dos SEV's son ortogonals quan $V_1 \cdot V_2 = 0$.

* La suma de SEV, $V_1 + V_2$, si $V_1 \cap V_2 = 0$, se denota com $V_1 \oplus V_2$; y si además $V_1 \cdot V_2 = 0$, se denota com $V_1 \perp V_2$.

<u>Definición</u>: Dado E un EVE, llamarem <u>polaridad de la métrica</u> ó <u>polaridad asociada a g</u> a

$$\begin{aligned} \phi : E &\longrightarrow E^* \\ e &\longmapsto \phi(e) : E \longrightarrow \mathbb{R} \\ &\qquad\qquad e' \longmapsto \phi(e)(e') := e \cdot e' \end{aligned}$$

<u>Proposición</u> (Propiedades de ϕ):

1) ϕ es un isomorfismo
2) $\begin{pmatrix} \text{matriz} \\ \text{de} \\ g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{matriz} \\ \text{de} \\ \phi \end{pmatrix}$

<u>Proposición</u>: Sea $V \subseteq E$ de un EVE.

1) $\dim V^{\perp} + \dim V = \dim E$
2) $E = V^{\perp} \perp V$
3) $(V^{\perp})^{\perp} = V$
4) $E = F \perp G \Rightarrow G = F^{\perp}$

Definición: Diremos que una base $\{e_1, \dots, e_n\}$ de un EVE es ortonormal si $e_i \cdot e_j = \delta_{ij}$

En este caso, la matriz de g es Id, y $x \cdot y = \sum_i x_i y_i$

Teorema: Todo EVE admite bases ortonormales.

ISOMETRÍAS

Definición: Dados dos EVE E y E', diremos que un isomorfismo lineal $\sigma: E \longrightarrow E'$ es una isometría si conserva el producto escalar, i.e

$$e_1 \cdot e_2 = \sigma(e_1) \cdot \sigma(e_2) \qquad \forall e_1, e_2 \in E.$$

Teorema: Sea $\sigma: E \longrightarrow E$ un endomorfismo. Son equivalentes.

1) σ es una isometría

2) σ conserva el módulo de los vectores, i.e, $|e| = |\sigma(e)|$

3) σ transforma bases ortonormales en bases ortonormales

4) $(\text{matriz de } \sigma)^t \cdot (\text{matriz de } \sigma) = \text{Id}$ en una base ortonormal

* $e_1 \cdot e_2 = \dfrac{|e_1 + e_2|^2 - |e_1|^2 - |e_2|^2}{2}$

* 4) del Th hace que $\det(\text{mat. de } \sigma) = \pm 1$. $\begin{cases} +1 \Rightarrow \text{GIRO} \\ -1 \Rightarrow \text{REFLEXIÓN} \end{cases}$

* Grupo Ortogonal $\equiv O(n) := \{\text{isometrías } \sigma: E \to E\} \subseteq Gl(E)$

* Grupo Especial Ortogonal $\equiv SO(n) := \{\text{isometrías } \sigma: E \to E \text{ de det } +1\} \subseteq O(n) \subseteq Gl(n)$.

* Giro de ángulo θ $\equiv \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

* Simetría resp. eje abscisas $\equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Definición: Diremos que dos isometrías $\varphi, \overline{\varphi} : E$ son equivalentes si existe otra isometría $\sigma : E \to E$ tal que $\overline{\varphi} = \sigma \varphi \sigma^{-1}$, i.e.,

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\varphi} & E \\ \sigma \downarrow \wr & & \wr \downarrow \sigma \\ E & \xrightarrow{\overline{\varphi}} & E \end{array}$$

$$\boxed{\overline{\varphi} \circ \sigma = \sigma \circ \varphi}$$

Lema: Dos isometrías $\varphi, \overline{\varphi}$ son equivalentes si y sólo si existen dos bases ortonormales en E tal que la matriz de φ en una de ellas coincide con la matriz de $\overline{\varphi}$ en la otra.

Lema: $\varphi : E \to E$ isometría, V SEV $\Longrightarrow \varphi(V^{\perp}) = \varphi(V)^{\perp}$

* Dado $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ mónico, y $T \in \operatorname{End}(E)$, se define $p(T) := T^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_0 \cdot Id$.

En particular, llamaremos polinomio anulador del endomorfismo T como el único polinomio mónico ($\equiv$ el coef. de su término de mayor grado es 1) $c(x)$ que verifica $c(T) = 0$, y que si $q(T) = 0 \Rightarrow q(x)$ múltiplo de $c(x)$.

Lema: Dada una isometría $\varphi : E \to E$, $\exists$ una descomposición $E = F_1 \perp \dots \perp F_r$, donde cada F_i verifica:

1) $\dim F_i = 1$ ó 2
2) $\varphi(F_i) = F_i$
3) el pol. caract. de $\varphi|_{F_i} : F_i \to F_i$ es irreducible.

Teorema (Clasificación de Isometrías): Dos isometrías son equivalentes si y sólo si tienen el mismo polinomio característico. Además, las raíces de tal polinomio tienen módulo 1.

TIPOS DE ISOMETRÍAS (Por matrices reducidas)

$\boxed{n=1}$

$$\begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -1 \end{pmatrix}$$

Id — SIM RESP. ORIGEN

$\boxed{n=2}$

$$\begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -1 & \\ & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Id — SIM. RESP. UNA RC — SIM. RESP. ORIGEN — GIRO DE ÁNG. θ

Ie, giro de ángulo θ ó simetría respecto una rc.

$\boxed{n=3}$

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$$

Id — SIM RESP PLANO — SIM RESP RC — SIM RESP. ORIGEN

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ & \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -1 & & \\ & \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ & \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

GIRO DE ÁNG. θ ALREDEDOR DE UNA RC

GIRO DE ÁNG θ ALREDEDOR DE UNA RC CONJUNTO CON LA SIMETRÍA DEL PLANO ORTOGONAL A LA RC

$\equiv$ GIRO IMPROPIO

Ie, giro alrededor de un eje ó giro impropio

ESPACIO AFÍN EUCLÍDEO

* Se podría definir un EAE como un $\mathbb{R}$-EA cuyo EV asociado es un EVE. Pero en el mundo real no se puede hablar de distancia entre dos pts ($\overline{p} = p + v$, $|v| \equiv$ distancia) con tan solo un escalar; hay que indicar una unidad, algo con qué compararlo.

* Denotemos por $\mathcal{M}(V) := \{$métricas simétricas $S: V \times V \to \mathbb{R}\}$, que es un $\mathbb{R}$-EV.

Definición: Llamaremos <u>espacio afín euclídeo</u> a $(A_n, V, \langle g \rangle)$, donde (A_n, V) es un $\mathbb{R}$-EA, y $\langle g \rangle \subseteq \mathcal{M}(V)$ es un SEV de dim 1 llamado <u>absoluto</u>, que posee alguna métrica simétrica definida positiva; g, por ejemplo. Esta métrica se denomina <u>representante del absoluto</u>, y no es único ya que λg es otro representante con $\lambda > 0$.

* $d(p_1, p_2) := |v| = \sqrt{g(v,v)}$, $v \equiv$ único $v \in V$: $p_1 + v = p_2$; g represent. del absoluto. Si sustituimos g por λg la distancia quedará multiplicada por $\sqrt{\lambda}$. Así, la proporción de distancias no depende del representante del absoluto.

Definición: Fijada una métrica euclídea g representante del absoluto, diremos que una <u>referencia euclídea</u> $\{p_0, v_1, \dots, v_n\}$ de $(A_n, V, \langle g \rangle)$ es una referencia afín donde $\{v_1, \dots, v_n\}$ es una base ortonormal de (V, g).

MOVIMIENTOS

$(\mathbb{A}_n, V, \langle g \rangle)$ EAE.

<u>Definición</u>: Un <u>movimiento</u> es una autoafinidad $\tau: \mathbb{A}_n \longrightarrow \mathbb{A}_n$ cuya aplicación lineal asociada $\vec{\tau}: V \longrightarrow V$ es una isometría; i.e., $g(v_1, v_2) = g(\vec{\tau}(v_1), \vec{\tau}(v_2))$.

<u>Lema</u>: Sea (V, g) EVE. Una biyección $f: V \longrightarrow V$ es una isometría si cumple:

1) $f(0) = 0$
2) $|v_2 - v_1| = |f(v_2) - f(v_1)|$

<u>Teorema</u> (Caracterización de Movimientos): Sea $\tau: \mathbb{A}_n \longrightarrow \mathbb{A}_n$ una biyección.

$$\tau \text{ movimiento} \iff \tau \text{ conserva las distancias}$$

* $\begin{cases} -\tau \text{ \underline{directo} o propio si } \vec{\tau} \text{ giro } (\det(\vec{\tau}) = +1) \\ -\tau \text{ \underline{indirecto} o impropio si } \vec{\tau} \text{ reflexión } (\det(\vec{\tau}) = -1). \end{cases}$

* Sea τ un movimiento. Como $\vec{\tau}$ es isometría, dadas dos ref euclídeas $\{p_0, v_1, \dots, v_n\}$ y $\{\bar{p}_0, \bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n\}$, $\exists!\ \tau$ movimiento : $\bar{p}_0 = \tau(p_0)$, $\bar{v}_i = \vec{\tau}(v_i)$.

CLASIFICACIÓN DE MOVIMIENTOS

<u>Definición</u>: Dos movimientos τ, τ' son <u>equivalentes</u> si $\exists$ un movimiento $\sigma: \mathbb{A}_n \longrightarrow \mathbb{A}_n$ tal que $\tau' = \sigma \tau \sigma^{-1}$.

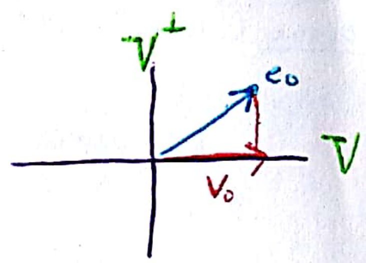
$$\begin{tikzcd} \mathbb{A}_n \arrow[r, "\tau"] \arrow[d, "\sigma"', "\wr"] & \mathbb{A}_n \arrow[d, "\sigma"', "\wr"] \\ \mathbb{A}_n \arrow[r, "\tau'"] & \mathbb{A}_n \end{tikzcd} \qquad \boxed{\tau' \sigma = \sigma \tau}$$

Lema: Dos movimientos son equivalentes $\Longleftrightarrow$ $\exists$ una ref. eucl. para τ y otra para τ' : las matrices de τ y τ' coincidan.

Definición: Fijado un representante del abstracto, llamaremos <u>módulo de deslizamiento</u> de un movimiento $\tau: \mathbb{A}_n \longrightarrow \mathbb{A}_n$ al escalar

$$\delta := \inf_{p \in \mathbb{A}_n} \{ d(p, \tau(p)) \}$$

Lema: Sea (E, g) EVE, y $V \subseteq E$ sev. Fijado un $e_0 \in E$, el mínimo sobre V de la función distancia a e_0,



$$V \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$v \longmapsto d(v, e_0) = |v - e_0|$$

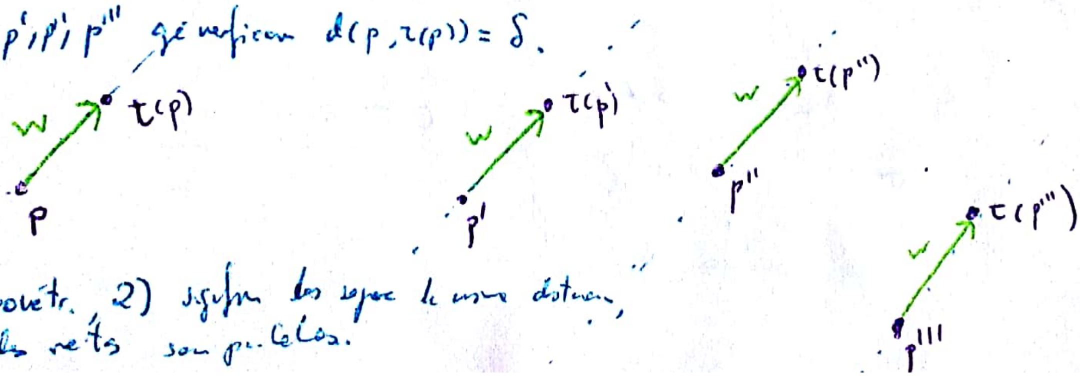
se alcanza en un único vector $v_0 \in V$, que es precisamente la proyección ortogonal de e_0 sobre V.

Proposición: Sea $\tau: \mathbb{A}_n \longrightarrow \mathbb{A}_n$ un movimiento y δ su mód. de deslizamiento.

1) $\exists\, p \in \mathbb{A}_n : \delta = d(p, \tau(p))$

2) $\exists!\, w \in V : \forall p \in \mathbb{A}_n \quad d(p, \tau(p)) = \delta \Longleftrightarrow \tau(p) = p + w$

* Llamaremos a el w de la prop. <u>vector de deslizamiento</u>.
* Sean p, p', p'', p''' que verifican $d(p, \tau(p)) = \delta$.



Geométr. 2) significa los segm. la misma distancia, y los vectores son paralelos.

Corolario: τ tiene algún pto fijo $\Longleftrightarrow \delta = 0$

Corolario: Sea $w \equiv$ vector de deslizamiento. 1) $|w| = \delta$, 2) $\vec{\tau}(w) = w$

Teorema (Clasificación de movimientos): Sean $\tau, \tau' : \mathbb{A}_n \longrightarrow \mathbb{A}_n$ dos movimientos

τ, τ' equivalentes $\Longleftrightarrow \begin{cases} 1) \text{ Tienen el mismo módulo de deslizamiento} \\ 2) \text{ tienen el mismo polinomio característico.} \end{cases}$

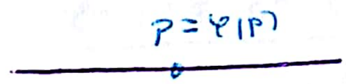
TIPOS DE MOVIMIENTO

Proposición: Sea $\tau : \mathbb{A}_n \longrightarrow \mathbb{A}_n$ un movimiento sin ptos fijos, y sea $\{p_0, v_1, \dots, v_n\}$ una ref ~~cualquiera~~ buena de $\mathbb{A}_n$. $\tau_{|\langle v_1 \rangle}$ es una translación.

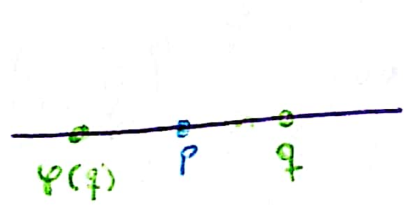
CON PUNTOS FIJOS: $\mathbb{A}_n \simeq V$, luego igual que las isometrías.

$\boxed{n=1}$

ID $\quad \begin{pmatrix} 1 & \\ \boxed{0} & \boxed{1} \end{pmatrix}$



SIM RESP. PUNTO $\quad \begin{pmatrix} 1 & \\ \boxed{0} & \boxed{-1} \end{pmatrix}$



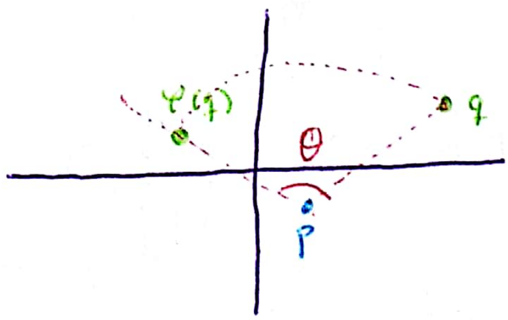
$\boxed{n=2}$

GIRO DE ÁNGULO θ ALR. DE UN PTO

$\to \theta = 0° \Rightarrow$ ID

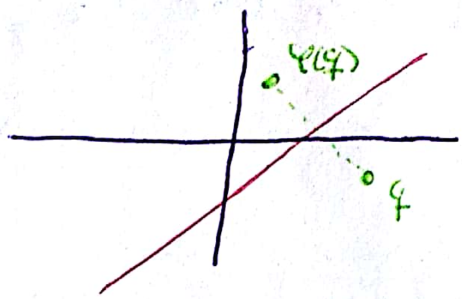
$\to \theta = 180° \Rightarrow$ SIM RESP. PTO

$\begin{pmatrix} 1 & & \\ \boxed{0} & \boxed{\begin{matrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{matrix}} \end{pmatrix}$



SIM. RESP. UNA RC

$$\begin{pmatrix} 1 & \\ \boxed{0} & \boxed{\begin{matrix} 1 & \\ & -1 \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

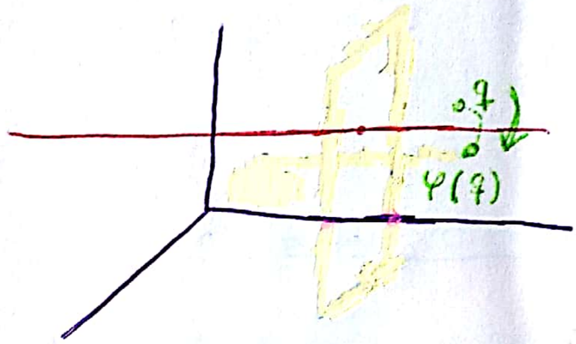


n = 3

GIRO ALREDEDOR DE UNA RC

- θ = 0° ⇒ ID
- θ = 180° ⇒ SIM RESP. RC

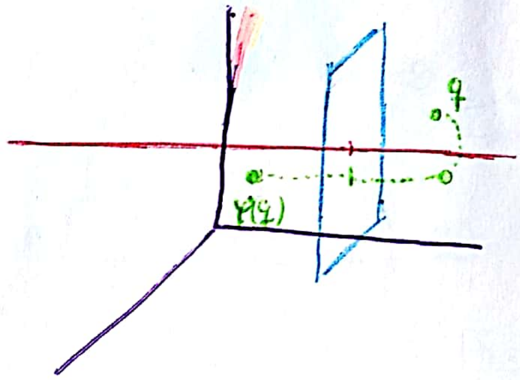
$$\begin{pmatrix} 1 & \\ \boxed{0} & \boxed{\begin{matrix} 1 & & \\ & \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ & \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{matrix}} \end{pmatrix}$$



GIRO IMPROPIO

- θ = 0° ⇒ SIM. RESP. PLANO
- θ = 180° ⇒ SIM RESP. PUNTO

$$\begin{pmatrix} 1 & \\ \boxed{0} & \boxed{\begin{matrix} -1 & & \\ & \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ & \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

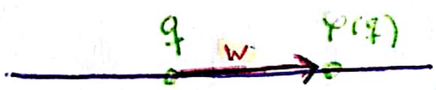


SIN PUNTOS FIJOS : $\delta > 0$.

n = 1

TRANSLACIÓN

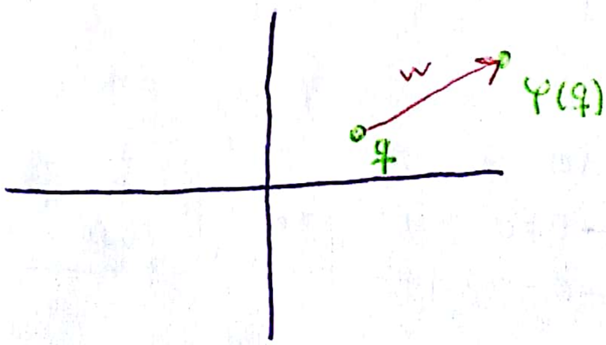
$$\begin{pmatrix} 1 & \\ \boxed{\delta} & \boxed{\pm 1} \end{pmatrix}$$



n = 2

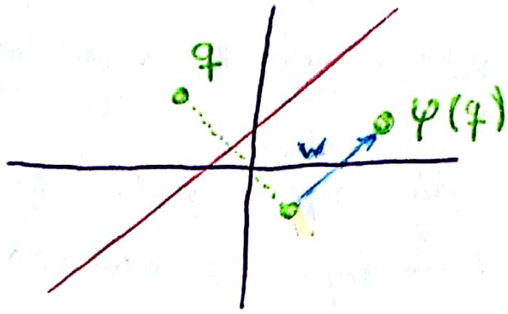
TRANSLACIÓN

$$\begin{pmatrix} 1 & \\ \boxed{\begin{matrix} \delta \\ 0 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} 1 & \\ & 1 \end{matrix}} \end{pmatrix}$$



SIMETRÍA DESLIZADA

$$\left(\begin{array}{c|cc} 1 & & \\ \hline \delta & 1 & \\ 0 & & -1 \end{array}\right)$$

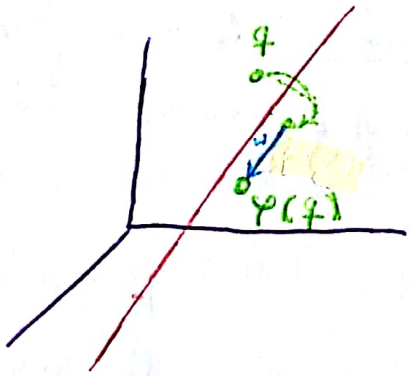


$\boxed{n=3}$

GIRO HELICOIDAL

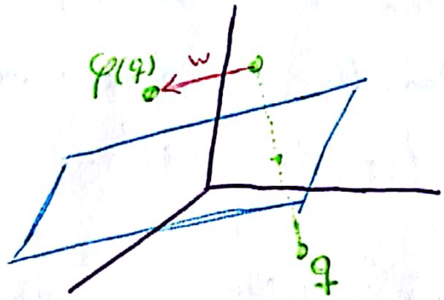
$-\theta = 0 \Rightarrow$ TRASLACIÓN

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & & & \\ \hline \delta & 1 & & \\ 0 & & \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ 0 & & \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{array}\right)$$



SIMETRÍA DESLIZADA

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & & & \\ \hline \delta & 1 & & \\ 0 & & 1 & \\ 0 & & & -1 \end{array}\right)$$



SEMEJANZAS

<u>Definición</u>: Llamaremos <u>semejanza</u> de razón $\lambda > 0$ a toda afinidad $\varphi: \mathbb{A}_n \to \mathbb{A}_n$ tal que $\vec{\varphi}(v_1) \cdot \vec{\varphi}(v_2) = \lambda^2 (v_1 \cdot v_2)$; ie, $|\vec{\varphi}(v)| = \lambda \cdot |v|$; ie, multiplica los módulos por un factor λ.

* Notar que $\{\text{movimientos}\} = \{\text{semejanzas de razón } \lambda = 1\}$.

<u>Proposición</u>: φ semejanza $\iff (\vec{\varphi}) \cdot (\vec{\varphi})^t = \lambda^2 \cdot Id$

Teorema (Caracterización de semejanzas): Sea A_n un EAE

Una biyección $\varphi : A_n \to A_n$ es una semejanza de razón $\lambda > 0$ $\iff$ φ multiplica las distancias por el factor λ, ie, $d(\varphi(v_1), \varphi(v_2)) = \lambda \cdot d(v_1, v_2)$

Proposición: Toda semejanza $\varphi : A_n \to A_n$ de razón $\lambda \neq 1$ (ie, que no sea un movimiento) tiene un único punto fijo, llamado <u>centro de la semejanza</u>.

Proposición: Toda semejanza que no sea un movimiento descompone de modo único como composición de una homotecia de razón positiva y un movimiento, que además conmutan. Más aún, el centro de la semejanza es el centro de la homotecia y un punto fijo del movimiento.

PARALELEPÍPEDOS

Definición: Sea (V, g) EVE, $\{v_1, \dots, v_n\}$ base ortonormal. Tomemos $\{w_1, \dots, w_n\}$ otra base de V, arbitraria. Así, definimos el <u>paralelepípedo</u> generado por $\{w_1, \dots, w_n\}$ como

$$P = \{ \sum \lambda_i w_i : \lambda_i \in [0,1] \}$$

Así, sea $w_j = \sum_{i=1}^{n} b_{ij} v_i$. Así, definimos $|\det(b_{ij})| := \text{VOLUMEN DEL PARALELEPÍPEDO} = \text{vol } P$

Sea $\varphi \in \text{Aut}(V)$. Sea $\varphi(P) := \{ \sum \lambda_i \varphi(w_i) : \lambda_i \in [0,1] \}$.

Se verifica que

$$\boxed{\frac{\text{vol } \varphi(P)}{\text{vol } P} = |\det(\varphi)|}$$

el $|\det|$ de un isomorfismo es el <u>factor</u> por el que quedan multiplicados los volúmenes de los paralelepípedos.

* Más aún, tomado $P \equiv$ paral. generado por una base arbitraria $\{w_1, \dots, w_n\}$,

tomemos la matriz $(g_{ij}) \equiv$ matriz de g en la base $\{w_1, \dots, w_n\}$

Entonces $$\underline{\text{vol } P = \sqrt{|\det (g_{ij})|}}$$

* En un EAE, para ejemplo: $\{\bar{p}_0, w_1, \dots, w_n\}$ otra ref afín,

y $P = \{\bar{p}_0 + \sum \lambda_i w_i : \lambda_i \in [0,1)\}$; y con $\{v_1, \dots, v_n\}$ base ortonormal de V,

y $w_j = \sum b_{ij} v_j$, $\underline{\text{vol } P := |\det (b_{ij})|}$.

Y también $$\frac{\text{vol } \varphi(P)}{\text{vol } P} = |\det (\vec{\varphi})|.$$

* Como cualquier área (volumen) se puede aproximar por paralelepípedos ilimitados de el factor que multiplica a los volúmenes de estos también se puede extender a áreas, volúmenes en general:

$$\frac{\text{vol } \varphi(A)}{\text{vol } A} = |\det (\vec{\varphi})|$$

<u>Proposición</u>: Sea $\varphi : \mathbb{A}_n \to \mathbb{A}_n$ una afinidad

φ es una semejanza $\Longleftrightarrow$ φ conserva los ángulos.

III: FORMAS CUADRÁTICAS

Definición: Llamaremos polinomio sobre E a toda aplicación $q: E \longrightarrow k$
$e = \sum_i x_i e_i \longmapsto Q(x_1, \dots, x_n)$
donde Q es un polinomio en las variables $x_1, \dots, x_n$ con coef. en k.

Llamaremos a q forma de grado r cuando $Q(x_1, \dots, x_n)$ sea homogéneo de grado r.

Las formas de grado 1 son las formas lineales o covectores (i.e., los elementos de E^*)

Las formas de grado 2 son las formas cuadráticas, que se expresan como

$$q\left(\sum_i x_i e_i\right) = \sum_{i,j} a_{ij} x_i x_j$$

* Tomemos una métrica simétrica $S \equiv (a_{ij})$, que su matriz simétrica $(a_{ij} = a_{ji} = S(e_i, e_j))$, con $a_{ji} = S(e_j, e_i)$

Notar que la aplicación $q: E \longrightarrow k$, $e \longmapsto q(e) := S(e, e)$ es una forma cuadrática, ya que

$$q\left(\sum_i x_i e_i\right) = \left(\sum_i x_i e_i\right)\left(\sum_j x_j e_j\right) = \sum_{i,j} a_{ij} x_i x_j \overset{a_{ij} = a_{ji}}{=} \sum_i a_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{i<j} a_{ij} x_i x_j$$

Luego dada una forma cuadrática q, los coeficientes se pueden corresponder con una matriz simétrica. Aquí hay relación, no? Denotamos por

$\mathcal{M}(E) = \{$ métricas simétricas $S: E \times E \longrightarrow k \}$

$Q(E) = \{$ formas lineales $q: E \longrightarrow k \}$

Proposición: $\mathcal{M}(E) \simeq Q(E)$

$$S \longmapsto q : E \longrightarrow K$$
$$e \longmapsto q(e) := S(e,e)$$

$$* \quad S(e_1,e_2) = \frac{q(e_1,e_2) - q(e_1) - q(e_2)}{2}$$

Definición: Llamaremos radical de (E, S) al sev

$$\text{rad } E = \{ e \in E : e \cdot E = 0 \}$$

Además, diremos que una métrica S es no singular si $\text{rad } E = 0$, y

se define $\underline{\text{rg } S := \dim E - \dim(\text{rad } E)}$, por lo que se da que

S no singular $\Leftrightarrow \text{rg } S = \dim E = n$.

* Denotamos por ϕ = polaridad de S; con $\phi(e)(e') := S(e,e')$.

Lema: $\underline{\text{Ker } \phi = \text{rad } E}$

Corolario: $\text{rg } S = \text{rg } \phi$

* Las definiciones de ortogonal, subespacio ortogonal, y sus propiedades son prácticamente las mismas que las de la página 5. Notar que ahora $e \cdot e^* = 0$ y no necesariamente algún tiene que ser 0, y que $E^\perp = \text{rad } E$.

Lema: $E = E_1 \perp E_2 \Rightarrow \text{rad } E = \text{rad } E_1 \perp \text{rad } E_2$

Corolario: $E = E_1 \perp E_2$ no singular $\Leftrightarrow E_1, E_2$ son no singulares.

EQUIVALENCIA DE MÉTRICAS

Definición: Una isometría es un isomorfismo $\varphi : (E, S) \longrightarrow (\bar{E}, \bar{S})$ que preserva las métricas, ie, $S(e_1, e_2) = \bar{S}(\varphi(e_1), \varphi(e_2))$.

Definición: Sea $\varphi : (E, S) \longrightarrow \bar{E}$ un isomorfismo. Llamaremos transformada de la métrica S respecto φ a la métrica $\varphi(S) : \bar{E} \times \bar{E} \longrightarrow k$

$$(\bar{e}_1, \bar{e}_2) \longmapsto \varphi(S)(\bar{e}_1, \bar{e}_2) := S(\varphi^{-1}(\bar{e}_1), \varphi^{-1}(\bar{e}_2))$$

de forma que $\varphi : (E, S) \longrightarrow (\bar{E}, \varphi(S))$ sea una isometría.

Análogamente, dada una forma cuadrática sobre E q, definimos la transformada de la forma q como $\varphi(q) : \bar{E} \longrightarrow k$

$$\bar{e} \longmapsto \varphi(q)(\bar{e}) := q(\varphi^{-1}(\bar{e}))$$

Definición: Diremos que dos métricas sobre E S y $\bar{S}$ son equivalentes si $\exists\, \varphi \in Aut(E)$ tal que $\varphi(S) = \bar{S}$; ie, si $\varphi : (E, S) \longrightarrow (E, \varphi(S) = \bar{S})$ es una isometría.

Análogamente, diremos que dos formas cuadráticas sobre E q y $\bar{q}$ son equivalentes si $\exists\, \varphi \in Aut(E)$ tal que $\bar{q} = \varphi(q)$; ie, si $\varphi : (E, q) \longrightarrow (E, \varphi(q) = \bar{q})$ es una isometría.

Lema: Dos métricas simétricas $S, \bar{S}$ son equivalentes $\iff$ $\exists$ una base para S y otra para $\bar{S}$ tal que las respectivas matrices de S y $\bar{S}$ coinciden.

Proposición: Sea $\varphi : (E, S) \longrightarrow (E, \bar{S})$ un automorfismo de matriz $\varphi \equiv C$, y sean $S, \bar{S}$ de matrices A y $\bar{A}$. Entonces φ preserva las métricas, ie, $S(e_1, e_2) = \bar{S}(\varphi(e_1), \varphi(e_2))$, ie, φ es una isometría $\iff$ $A = C^t \bar{A} C$.
(ie, $\varphi(S) = \bar{S}$).

PARTE NO SINGULAR

Concluimos el paso al cociente $\pi: E \longrightarrow E/\mathrm{rad}\,E$, $e \longmapsto [e]$, y definimos en el cociente una métrica $\bar{S}: E/\mathrm{rad}\,E \times E/\mathrm{rad} \longrightarrow K$

$$([e_1], [e_2]) \longmapsto \bar{S}([e_1],[e_2]) := S(e_1, e_2).$$

Como el cociente anula a todo $\mathrm{rad}\,E$, es obvio que en $E/\mathrm{rad}\,E$ no habrá elementos $\neq 0$ que "maten" a todo el espacio. Vemos que $\underline{\bar{S} \text{ es no singular}}$.

Definición: Se dice que un $e \in E$ es <u>isótropo</u> si $e \cdot e = 0$, que un sev V lo es si $S_{|V} = 0$ (i.e, $\mathrm{rad}\,V = V$), y que E lo es si $S = 0$ (i.e, $\mathrm{rad}\,E = E$).

Lema: $V \underset{E}{\subseteq} E$ isótropo $\iff$ $\underset{e}{v}$ isótropo $\underset{e \in E}{\forall v \in V}$

Teorema: Todo espacio (E, S) descompone de modo único salvo isometrías en suma ortogonal de un espacio isótropo y otro no singular. En particular, $E = \mathrm{rad}\,E \perp \bar{E}$, donde $\bar{E} \simeq E/\mathrm{rad}\,E$.

Lema: Todo espacio <u>no singular</u> (E, S) posee una base ortogonal, es decir, la matriz de S es diagonal

Proposición: Todo espacio (E, S) posee una base en la que la matriz de S es diagonal (los λ_i de la parte no singular y completando con 0's).

Corolario: Dada una forma cuadrática $q: E \to K$, $\exists$ una base de E tal que q se expresa como

$$q(x_1, \dots, x_n) = \lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_r x_r^2$$

CLASIF. DE MÉTR. EN UN CUERPO ALG. CERRADO

Teorema (Clasificación de métricas sobre K alg. cerrado): Sea E un K-EV, $S, \bar{S}$ métricas sim. sobre E

$$S \equiv \bar{S} \iff \operatorname{rg} S = \operatorname{rg} \bar{S}$$

CLASIF. DE MÉTRIC. SIM. SOBRE $\mathbb{R}$ $(E \equiv \mathbb{R}\text{-EV})$

Teorema (de Inercia de Sylvester): Todo espacio (E, S) posee una base en la que la matriz de S es diagonal de la forma $\begin{pmatrix} 1 \overset{p)}{\cdots} & & \\ & -1 \overset{q)}{\cdots} & \\ & & 0 \cdots 0 \end{pmatrix}$. Además, p y q no dependen de la base. Llamaremos signatura de S al par (p, q).

Corolario: Dada una forma cuadrática $q: E \to \mathbb{R}$, $\exists$ una base tal que q se expresa como

$$q(x_1, \dots, x_n) = x_1^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_{p+q}^2$$

Teorema (Clasificación de Métricas Simétricas sobre $\mathbb{R}$): Sea E un $\mathbb{R}$-EV, $S, \bar{S}$ mét. sim. sobre E.

$$S \equiv \bar{S} \iff S, \bar{S} \text{ tienen la misma signatura.}$$

ENDOMORFISMOS AUTO-ADJUNTOS : (E, g) EVE y $\varphi \in \operatorname{End}(E)$

Definición: Llamaremos endomorfismo adjunto de φ al único endomorfismo $\varphi^* \in \operatorname{End}(E)$ que cumple

$$\varphi(e) \cdot e' = e \cdot \varphi^*(e')$$

* Su existencia y unicidad lo garantiza el hecho que $\underline{\varphi_a^* = \phi^{-1} \circ \varphi_t^* \circ \phi}$ (ϕ = polaridad de S)

* Se verifica que $\begin{pmatrix} \text{matriz} \\ \text{de } \varphi^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{matriz} \\ \text{de } \varphi \end{pmatrix}^t$

Definición: Diremos que $\varphi \in End(E)$ es auto-adjunto si $\varphi = \varphi^*$, i.e., si

$$\varphi(e) \cdot e' = e \cdot \varphi(e')$$

* Luego φ autoadjunto $\iff$ (φ) es diagonal

* Además, $\varphi^2(e) \cdot e' = \varphi(\varphi(e)) \cdot e' = \varphi(e) \cdot \varphi(e') = e \cdot \varphi^2(e')$

* En general, $\varphi^r(e) \cdot e' = e \cdot \varphi^r(e')$

Teorema (Espectral): Todo endomorfismo auto-adjunto $\varphi : E \to E$ posee una base ortonormal en la que $(\varphi) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$. A $\{\lambda_i\}$ se le llama espectro de φ.

Dem: Dado un par de métricas simétricas (g, S), g euclídea, $\exists \varphi : E \to E$ tal que

$$S(e, e') = g(\varphi(e), e'),$$

y además,

$$(\varphi) = (g)^{-1} \cdot (S)$$

A este φ se le denomina endomorfismo asociado al par de métricas (g, S), y es de hecho auto-adjunto.

Corolario: Todo endomorfismo asociado a un par de métricas (g, S) diagonaliza en una base ortonormal para g y ortogonal para S (es decir, $g \equiv \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}$; $S \equiv \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \equiv \varphi$)

Teorema (Cálculo de Signatura). Sea (E, S) un $\mathbb{R}$-EV.

1) El polinomio característico de (S) tiene todas sus raíces reales.

2) La signatura de S es $(p, q) =$ (nº de raíces >0 del pol. carac, nº de raíces <0 del pol. ca

ÍNDICE

Definición: Llamaremos índice de un espacio no singular a la dimensión común de los subespacios isótropos maximales.

$\ast$ $E = \text{rad}\, E \perp \overline{E}$, índice de $(E,S) :=$ índice de $(\overline{E}, S)$

Lema (en $\mathbb{R}$): Sea (E, S) un $\mathbb{R}$-espacio no singular de dim n.

Si E carece de vectores isótropos $\Rightarrow S$ es $\begin{cases} \text{def positiva} & : (p = n,\ q = 0) \\ \text{def negativa} & : (p = 0,\ q = n) \end{cases}$

Proposición (en $\mathbb{R}$): Sea (E, S) un $\mathbb{R}$-espacio no singular de signatura (p, q). Todos los subespacios isótropos tienen la misma dimensión: $\underline{i = \min\{p, q\}}$.

Corolario (en $\mathbb{R}$): Sea (E, S) un $\mathbb{R}$-espacio de signatura (p, q). $\underline{i = \min\{p, q\}}$.

Lema (en K alg. cerrado): Sea (E, S) un K-espacio no singular.

Si E carece de vectores isótropos $\Rightarrow \dim E \leq 1$

Proposición (K) Sea (E, S) un espacio no singular de dim n. $\quad \underline{i = \text{int}\left(\frac{n}{2}\right)}$

Corolario (K): Sea (E, S) un espacio de rango r. $\quad \underline{i = \text{int}\left(\frac{r}{2}\right)}$

IV : CÓNICAS

Definición: Una función $q : \mathbb{A}_2 \longrightarrow \mathbb{R}$ se llama polinomio de gr ≤ 2 si en coordenadas euclídeas se expresa como

$$q(x,y) = Ax^2 + Bxy + Cx + Dx + Ey + F \qquad , A, \dots, F \in \mathbb{R}.$$

* Se podría definir "cónica" como "lugar geométrico donde un pol se anula"; pero x^2+y^2+1 y x^2+y^2+5 se anulan en el mismo cjto. $\emptyset$.

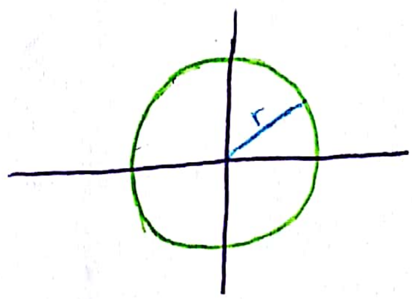
* Denotamos por $\mathcal{P}(\mathbb{A}_2) = \{$ polinomios $q : \mathbb{A}_2 \longrightarrow \mathbb{R}$ de gr $\leq 2\}$, que es un EV.

Definición: Llamaremos cónica del plano euclídeo a un SEV unidimensional $\langle q \rangle \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{A}_2)$, y lugar de la cónica $\langle q \rangle$ al conjunto de pts donde se anula q.

Definición (Circunferencia): Dado un pto $c = (c_1, c_2) \in \mathbb{A}_2^2$ y un escalar $r > 0$, llamamos circunferencia de centro c y radio r al lugar geométrico de los pts cuya distancia a c vale r.

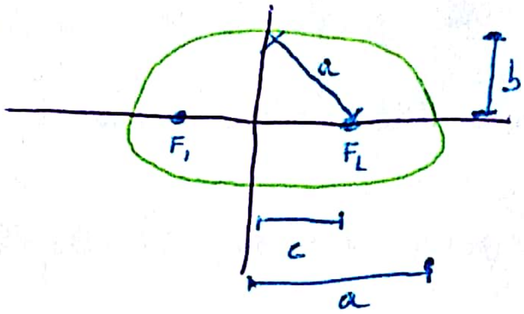
$$\boxed{x^2 + y^2 = r^2}$$

EC. REDUCIDA DE CIRCUNFERENCIA



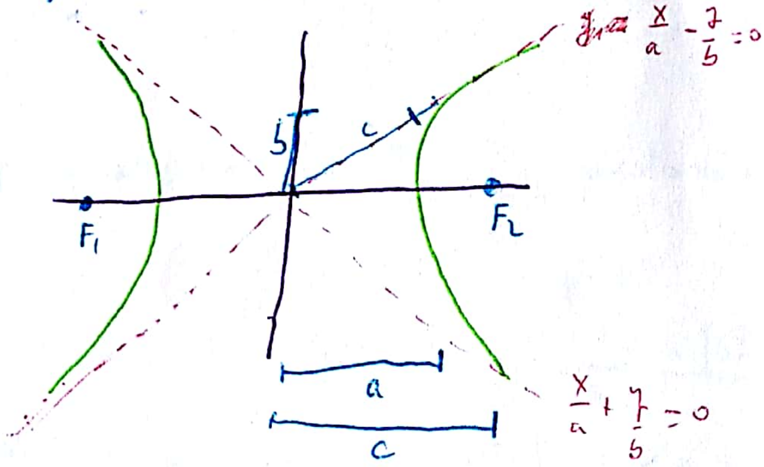
Definición (Elipse): Llamamos elipse al lugar geométrico de los ptos de A_2 cuya suma de distancias a dos ptos fijos, llamados focos, es cte.

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1}$$



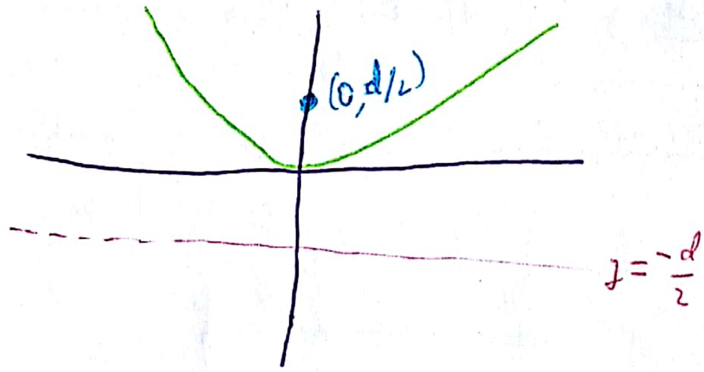
Definición (Hipérbola): Llamamos hipérbola al lugar geométrico de los ptos cuya diferencia de distancias en valor absoluto a dos ptos fijos llamados focos es cte.

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1}$$



Definición (Parábola): Una parábola es el lugar geométrico de los ptos de A_2 que equidistan de un pto fijo p y de una recta L, con $p \notin L$.

$$\boxed{2dy = x^2}$$



Proposición: Fijado un punto p que no $\in L$ $(p \notin L)$, el lugar geométrico de los puntos de $\mathbb{A}_2$ cuya proporción de distancias a p y a L sea una cte $e > 0$ es una cónica, y

$$e < 1 \Rightarrow \text{ELIPSE}$$

$$e = 1 \Rightarrow \text{PARÁBOLA}$$

$$e > 1 \Rightarrow \text{HIPÉRBOLA}$$

Además, p es un foco de la cónica. A $e := \dfrac{d(x,p)}{d(x,L)}$ se le llama excentricidad.

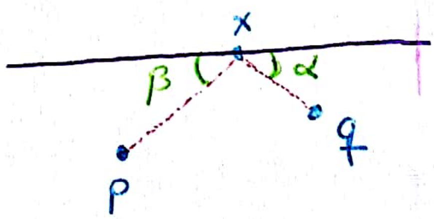
* Toda cónica se puede expresar en función de su excentricidad, en la llamada ecuación focal de la cónica:

$$\boxed{r = \frac{p}{1 + e\cos\theta}}$$

donde $p := de$, donde $d = d(F, \text{rect. directriz})$. A este p se le llama "semi-latus rectum". ó parámetro de la cónica. $(r = d(x,F))$

PROPIEDADES ÓPTICAS

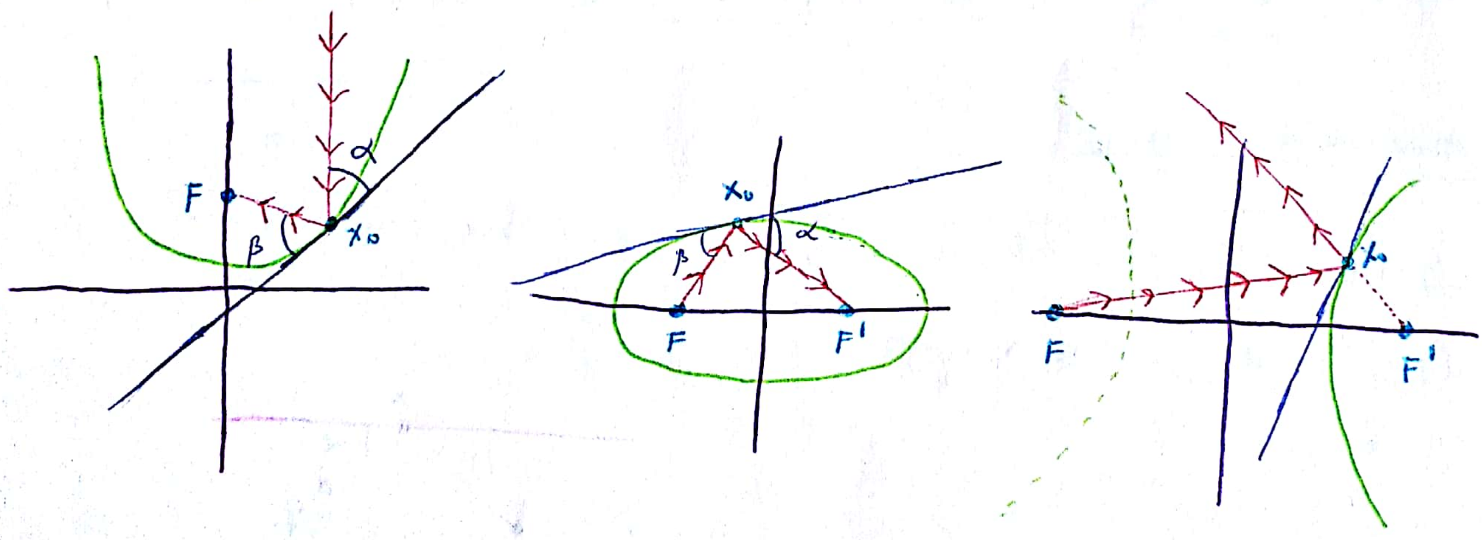
Proposición (Herón): Dada una recta L, un pto $x \in L$ hace mínima la suma $d(p,x) + d(q,x) \iff \alpha = \beta$.



Proposición (Propiedad óptica de la Parábola): Dado un pto x_0 de la parábola, la re paralela al eje que pasa por x_0 y la re x_0F tienen como bisectriz a la re tg en x_0. O en Física: "Un rayo de luz cuya trayectoria sea paralela al eje, después de reflejarse, pasará por el foco".

Proposición (Propiedad Óptica de la Elipse): Dado un pto x_0 de una elipse, las rectas x_0F y x_0F' (las rectas que unen el pto con los focos) tienen como bisectriz a la re tg en x_0. O en Física: "Un rayo de luz que parte de un foco de la elipse, después de reflejarse, pasará por el otro foco".

Proposición (Prop. Óptica de la Hipérbola): Dado un pto x_0 de una hipérbola, las rectas x_0F y x_0F' tienen como bisectriz a la re tg a la hipérbola en x_0. O en Física: "Un rayo de luz que parte de un foco, después de reflejarse en la hipérbola (en la rama más lejana al foco) parece venir del otro foco".



CLASIFICACIÓN DE CÓNICAS

* Dado un polinomio de gr ≤ 2 en $\mathbb{A}_2$, $q(x_1,x_2) = Ax_1^2 + Bx_1x_2 + Cx_2^2 + Dx_1 + Ex_2 + F$, no es una forma cuadrática pq tiene un término independiente. Para salvar esto introducimos una nueva variable x_0:

$$\hat{q}(x_0,x_1,x_2) = Ax_1^2 + Bx_1x_2 + Cx_2^2 + Dx_0x_1 + Ex_0x_2 + Fx_0^2 .$$

* Llamamos a $\hat{q}$ <u>homogeneización</u> de q

* Se verifica que $\hat{q}(1,x_1,x_2) = q(x_1,x_2)$.

* Así, $\hat{q}$ sí es una forma cuadrática, q está definida sobre la extensión vectorial $\mathbb{E}_3$ de $\mathbb{A}_2$ (tiene 3 coordenadas).

<u>Lema</u>: Todo polinomio de gr ≤ 2 $q : \mathbb{A}_2 \to \mathbb{R}$ extiende de modo único a una forma cuadrática $\hat{q} : \mathbb{E}_3 \to \mathbb{R}$.

* A $\vec{q}(x_1,x_2) = Ax_1^2 + Bx_1x_2 + Cx_2^2$ se le llama <u>parte principal</u> de q.

* Así que $\hat{q}$ se identifica con una matriz simétrica que es

$$\hat{q} \equiv \begin{pmatrix} F & D/2 & E/2 \\ D/2 & A & B/2 \\ E/2 & B/2 & C \end{pmatrix}$$

* Y denotamos

$$D := \det(\hat{q}) = \begin{vmatrix} F & D/2 & E/2 \\ D/2 & A & D/2 \\ E/2 & D/2 & C \end{vmatrix} \quad ; \quad E := \det(\vec{q}) = \begin{vmatrix} A & B/2 \\ B/2 & C \end{vmatrix}$$

Entonces:

$D \neq 0$ CÓNICA NO SINGULAR

- $E > 0 \Rightarrow$ ELIPSE
  - $\text{sgn}\, D \neq \text{sgn}\, C \Rightarrow$ REAL $\quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
  - $\text{sgn}\, D = \text{sgn}\, C \Rightarrow$ IMAGINARIA $\quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$
- $E = 0 \Rightarrow$ PARÁBOLA $\quad 2dy = x^2$
- $E < 0 \Rightarrow$ HIPÉRBOLA $\quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

$D = 0$ CASO DEGENERADO

- $E > 0 \Rightarrow$ PAR DE RC IMAGINARIAS QUE SE CORTAN $\quad x^2 + a^2 y^2 = 0$
- $E = 0 \Rightarrow$ PAR DE RC PARALELAS $\quad y^2 = a$
- $E < 0 \Rightarrow$ PAR DE RC REALES QUE SE CORTAN $\quad x^2 - a^2 y^2 = 0$

Scanned by CamScanner

ANEXO

* Se necesitan <u>3</u> puntos y sus transformados para que una afinidad afín en A_2 quede definido.

* Las afinidades afines transforman ptos de corte de rectas en puntos de corte de los transformados de las rectas.

* En gral, $\begin{pmatrix} \text{matriz de giro} \\ \text{de } \theta \text{ centrado en } (a,b) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{mat. de traslación} \\ \text{al pto } (a,b) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \text{matriz de giro} \\ \text{de } \theta \text{ centrado} \\ \text{en } (0,0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{mat. de traslación} \\ \text{al pto } (a,b) \end{pmatrix}^{-1}$

Pero si observamos que el centro tiene que quedarse quieto,

$$\left.\begin{array}{l} \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x_0 & \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ y_0 & \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ b \end{pmatrix} \\ a = x_0 + a\cos\theta - b\operatorname{sen}\theta \\ b = y_0 + a\operatorname{sen}\theta + b\cos\theta \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a - a\cos\theta + b\operatorname{sen}\theta & \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ b - a\operatorname{sen}\theta - b\cos\theta & \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

MATRIZ DE GIRO DE ÁNGULO θ CENTRADO EN (a,b)

* <u>Cálculo de la signatura</u>

1) Raíces del pol. caract.
2) Manipular la ecuación para quedar solo términos en x_i^2
3) Hacer los menores de la matriz de S y rellenar una matriz diagonal de ± 1 para que los sgn de los menores coincidan.