VII : VARIEDADES DIFERENCIABLES

TOPOLOGÍA

• Sean $\{(X_i;\tau_i)\}\in T$, Y un conjunto y una familia $\{f_i:(X_i;\tau_i)\to Y\}$. ¿Existe alguna topología sobre Y que haga continuas a las f_i? Sí: $\tau^Y_{grosera}=\{Y,\emptyset\}$. ¿Existe la más fina?

Proposición: La topología más fina existe, la llamamos topología final y es

$$\tau_{final} := \{A\subseteq Y : f_i^{-1}(A)\in\tau_i \ \forall i\}.$$

Teorema (Propiedad universal de la top. final): Sea $(Z,\tau')\in T$, y $g:(Y,\tau_{final})\to(Z,\tau')$.

$$(Y,\tau_{final})\xrightarrow{g}(Z,\tau') \text{ continua} \iff (X_i,\tau_i)\xrightarrow{f_i}(Y,\tau_{final})\xrightarrow{g}(Z,\tau') \text{ continuas } \forall i$$

• La topología cociente es una top final.

• Sean $\{(X_i,\tau_i)\}\in T$, Y conjunto, y una familia $\{g_i: Y\to(X_i,\tau_i)\}$. ¿Existe alguna top. sobre Y que haga cont. a las g_i? Sí: $\tau^Y_{discreta}=\mathcal{P}(Y)$. ¿Y la menos fina?

Proposición: La topología menos fina existe, se llama topología inicial, y una base es

$$\mathcal{B}_{inicial}=\{\bigcap_{j=1}^{n}\bigcup_{i\in I} g_i^{-1}(U_i)\}_{U_i\in\tau_i}.$$

Teorema (Propiedad universal de la topología inicial): Sea $(Z,\tau') \in T$, $f:(Z,\tau') \to (Y, \tau_{inicial})$

$$(Z,\tau') \xrightarrow{f} (Y, \tau_{inicial}) \text{ cont} \iff (Z,\tau) \xrightarrow{f} (Y,\tau_{ini}) \xrightarrow{g_i} (X_i,\tau_i) \text{ cont. } \forall i.$$

- La topología de subespacio, y la topología producto son topologías iniciales.
- $Z \xrightarrow{f=(f_1,\dots,f_n)} X_1 \times \dots \times X_n$ cont. $\iff f_i : Z \to X_i$ cont. $\forall i$.

VARIEDADES TOPOLÓGICAS

Definición: Una variedad topológica de dimensión n es un espacio topológico Hausdorff y 2º contable tal que todo pto tiene un entorno abierto homeomorfo a un abierto de $(\mathbb{R}^n, \tau_{usual})$

Lema: $B(p,r) \simeq \mathbb{R}^n$, $p \in \mathbb{R}^n$, $r>0$.

Definición (Alternativa): Una variedad topológica de dimensión n es un espacio topológico Hausdorff y 2º contable tal que todo pto tiene un entorno abierto homeomorfo a $(\mathbb{R}^n, \tau_{usual})$.

- $S_n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ es una VT de dim n.
- El n-toro $T_n := S_1 \times \overset{n)}{\dots} \times S_1$ es una VT de dim n.
- $\mathbb{P}_n$ es una VT de dim n.

- Sea $X \in T$, y denotamos $C(X) := \{ f: X \to \mathbb{R} \text{ continuas} \}$, que es una $\mathbb{R}$-álgebra.

Definición: Dada una aplicación continua $\varphi : X \to Y$, se define

$$\varphi^* : C(Y) \longrightarrow C(X)$$
$$f \longmapsto \varphi^*(f) := f \circ \varphi$$

, $\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\varphi"] \arrow[rr, bend right, "f\circ\varphi"'] & Y \arrow[r, "f"] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$.

que es un morfismo de $\mathbb{R}$-álgebras.

Proposición (Propiedades):

1) $(\phi \circ \varphi)^* = \varphi^* \circ \phi^*$.

2) $(Id_X)^* = Id_{C(X)}$

$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "f"'] & Y \arrow[dl, dashed, "\exists F"] \\ {} & \end{tikzcd}$

3) $\varphi : X \to Y$ homeomorfismo $\Longrightarrow$ φ^* es un isomorfismo de $\mathbb{R}$-álgebras; $C(Y) \overset{\varphi^*}{\simeq} C(X)$,
i.e. $\forall f \in C(X)\ \exists! F \in C(Y) : f = F \circ \varphi$. y $\boxed{(\varphi^*)^{-1} = (\varphi^{-1})^*}$

Definición: Sea X un vt de dim n. Un abierto coordenado de X es un abierto no vacío $U \subseteq X$ junto con n funciones continuas $u_1, .., u_n \in C(U)$ tales que $U \subseteq X \xrightarrow{(u_1,..,u_n)} \overline{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ sea un homeomorfismo ($\overline{U}$ abto). Se dice que $u_1 .. u_n$ son las coordenadas del abierto coordenado $(U; u_1, .., u_n)$.

Proposición: Sea $(U; u_1, .., u_n)$ un abierto coordenado. Dada $f \in C(U)$, existe una única $F : \overline{U} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continua tal que $f = F(u_1, .., u_n)$. Ésta es la expresión de f en las coordenadas $u_1, .., u_n$

$\begin{tikzcd} U \subseteq X \arrow[r, "(u_1..u_n)"] \arrow[rr, bend right, "f = F(u_1..u_n)"'] & \overline{U} \subseteq \mathbb{R}^n \arrow[r, "F"] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$

$\begin{tikzcd} U \subseteq X \arrow[rr, "(u_1,..u_n)"] \arrow[dr, "f"'] & & \overline{U} \subseteq \mathbb{R}^n \arrow[dl, "F"] \\ & \mathbb{R} & \end{tikzcd}$ $\leftarrow (\exists!)$

$f = F(u_1, .., u_n)$

• En el sentido usual de $\mathbb{R}^n$, diremos que f es diferenciable si $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, i.e., si tiene derivadas parciales de cualquier orden y continuas.

Definición: Sea $(U; u_1, \dots u_m)$ un abierto coordenado, sea $f \in C(U)$ y $F \in C(\bar{U})$ la única función tal que $f = F(u_1, \dots u_m)$. Llamaremos derivada parcial de f respecto u_i a,

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial u_i} := \frac{\partial F}{\partial x_i}(u_1, \dots, u_m)}$$

Diremos que f es diferenciable respecto a las coordenadas $u_1, \dots, u_m$, $f \in C^\infty(U; u_1, \dots, u_m)$, si existen derivadas parciales continuas de todos los órdenes.

• De la def se extrae que $\boxed{f \in C^\infty(U; u_1, \dots, u_m) \iff F \in C^\infty(\bar{U})}$

• $C^\infty(U; u_1 \dots u_m) \subseteq C(U)$ es una subálgebra.

• Entonces la noción de diferenciabilidad depende de las coordenadas. ¿Cuando dos sistemas de coordenadas dan las mismas funciones diferenciables? Ei el siguiente lema.

• Pongamos un abierto U de una VT X con abierto coordenado de dos formas: $(U; u_1, \dots u_m)$ y $(U; v_1, \dots v_n)$.
Como $v_1, \dots, v_n \in C(U)$, $\exists\, h_1, \dots, h_n \in C(\bar{U})$:

$$\left.\begin{array}{l} v_1 = h_1(u_1, \dots u_m) \\ \vdots \\ v_n = h_n(u_1, \dots u_m) \end{array}\right\}$$

Definición: Llamaremos ecuaciones del cambio de coordenadas de $\{v_i\}$ a $\{u_i\}$ a las anteriores.

• Notar que sustituyendo dan la expresión en las $\{u_i\}$ de una función en las $\{v_i\}$.

Definición: Diremos que el cambio de coordenadas de $\{v_i\}$ a $\{u_i\}$ es diferenciable si las $\{h_i\}$ sean diferenciables (en el sentido usual de $\mathbb{R}^n$), i.e., $h_1, \dots, h_n \in C^\infty(\tilde{U}) \Leftrightarrow v_1, \dots, v_n \in C^\infty(U; u_1, \dots, u_n)$.

Lema: Sean $(U; u_1, \dots u_n)$, $(U; v_1, \dots, v_n)$ abierto coordenado.

$$C^\infty(U; u_1, \dots u_n) = C^\infty(U; v_1 \dots v_n) \Longleftrightarrow$$ los cambios de coordenadas entre los dos son diferenciables.

ESPACIOS ANILLADOS

Definición: Un haz de funciones sobre un espacio topológico (X, τ) es una "aplicación"

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_X : \tau &\longrightarrow \{\text{subálgebras de } C(U)\} \\ U &\longmapsto \mathcal{O}_X(U) \end{aligned}$$

que cumple:

i) la restricción de funciones del haz son del haz: $U, V \in \tau$, $V \subset U$.
Si $f \in \mathcal{O}_X(U) \Rightarrow f_{|V} \in \mathcal{O}_X(V)$.

ii) Toda función que localmente es del haz pertenece al haz: si $U \in \tau$, y $\{U_i\}$ es un recubrimiento abierto de U, y sea $f: U \to \mathbb{R}$. Si $f_{|U_i} \in \mathcal{O}_X(U_i)\ \forall i \Rightarrow f \in \mathcal{O}_X(U)$.

Ambas condiciones se resumen en: una función es del haz $\Leftrightarrow$ es localmente del haz.

Llamaremos espacio anillado al par $(X, \mathcal{O}_X)$.

• (X, C) es un espacio anillado, donde a cada U, C asigna $C(U)$.

• $(\bar{U}, C^{\infty})$ es un esp. anillado. ($\bar{U}$ abierto de $\mathbb{R}^n$)

<u>Definición</u>: Un <u>morfismo de espacios anillados</u> es una aplicación $\varphi : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ tal que

i) $\varphi : X \to Y$ es continua

ii) Componer φ con funciones del haz $\mathcal{O}_Y$ da funciones del haz $\mathcal{O}_X$: si $f \in \mathcal{O}_Y(V) \Rightarrow$

$\Rightarrow f \circ \varphi \in \mathcal{O}_X(\varphi^{-1}(V))$, $(V \subseteq Y)$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\varphi"] & Y \arrow[r, "f"] & \mathbb{R} \\ \varphi^{-1}(V) \arrow[u, phantom, "\cup"] & V \arrow[u, phantom, "\cup"] & \end{tikzcd}$$

• Si X, Y son ET, toda aplicación continua $(X, C) \to (Y, C)$ es morfismo de espacios anillados.

<u>Proposición</u> (Propiedades):

1) La composición de morf. de esp. anillados es morf. de esp. anillado.

2) $\varphi : X \to Y$ morf. de esp. anillado $\Leftrightarrow$ lo es localmente.

<u>Definición</u>: Un <u>isomorfismo de espacios anillados</u> es un morfismo de espacios anillados $\varphi : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ tal que existe otro morfismo de esp. anillado $\varphi^{-1} : (Y, \mathcal{O}_Y) \to (X, \mathcal{O}_X)$: $\varphi \circ \varphi^{-1} = \varphi^{-1} \circ \varphi = Id$, o de otra forma, es un morfismo de espacios anillados que es homeomorfismo y que φ^{-1} es también morfismo de espacios anillados.

Teorema: Sea $\varphi : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ un morfo de espacios anillados.

φ es un isomorfismo de espacios anillados $\iff$
1) $\varphi : X \to Y$ es homeomorfo.
2) Para cada abto V de Y,
$$\varphi^* : \mathcal{O}_Y(V) \longrightarrow \mathcal{O}_X(\varphi^{-1}(V))$$
$$f \longmapsto f \circ \varphi$$
es isomorfismo de $\mathbb{R}$-álgebras

Corolario: Sea $(U; u_1, \dots, u_n)$ un abto coordenado de una VT X, y consideremos sobre U el haz de funciones $V \subseteq U$ abto $\longmapsto C^\infty(V; u_1, \dots, u_n)$. Si $U \subseteq X \xrightarrow{\varphi = (u_1, \dots, u_n)} \bar{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ es el homeomorfo del abto coordenado, entonces $\varphi : (U, C^\infty(\cdot\,; u_1 \dots u_n)) \longrightarrow (\bar{U}, C^\infty)$ es un isomorfo de espacios anillados.

VARIEDADES DIFERENCIABLES

Definición: Una variedad diferenciable de dimensión n es un espacio anillado $(X, \mathcal{O}_X)$ que:

i) El espacio topológico X es Hausdorff y 2º contable.

ii) Todo pto de X tiene un entorno abierto que es isomorfo, como espacio anillado, a un abierto de $(\mathbb{R}^n, C^\infty)$.

Llamaremos funciones diferenciables sobre la variedad X a las funciones del haz $\mathcal{O}_X$.

- $(\mathbb{R}^n, C^\infty)$ es una VD de dim n, y todo abto no vacío de una VD es VD.
- El corolario anterior dice que si $(U; u_1, \dots, u_n)$ es un abto coordenado de una VD, y $\mathcal{O}_U = C^\infty(\cdot\,; u_1, \dots, u_n)$, entonces $(U, \mathcal{O}_U)$ es una variedad topológica.

Definición: Una aplicación $\varphi: X \to Y$ entre VD se dice diferenciable si $\varphi: (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ es un morfismo de espacios anillados. φ se dice difeomorfismo si el morfismo de esp. anillados es isomorfismo.

Proposición (Propiedades):

1) La composición de aplicaciones diferenciables es diferenciable.

2) $\varphi: X \to Y$ entre VD es diferenciable $\Leftrightarrow$ es localmente diferenciable.

3) $U \subseteq X$ abto, X VD, $\Rightarrow U \xhookrightarrow{i} X$ es diferenciable, y si Y es otra VD, cumple:

$$Y \xrightarrow{f} U \text{ diferenciable} \iff Y \xrightarrow{f} U \xhookrightarrow{i} X \text{ es diferenciable.}$$

4) $U \subseteq \mathbb{R}^n \xrightarrow{\varphi} V \subseteq \mathbb{R}^m$ es diferenciable $\iff$ es diferenciable en el sentido usual (del Análisis).

- Si $f: X \to \mathbb{R}$, X VD, tenemos 2 nociones de "f diferenciable": una como función del haz $\mathcal{O}_X(X)$, y otra como "aplicación diferenciable" (considerando a $\mathbb{R}$ V.D). Ambas coinciden.

5) X V.D., $X \xrightarrow{\varphi = (f_1, \dots, f_m)} \mathbb{R}^m$, entonces φ es diferenciable $\Leftrightarrow f_1, \dots, f_m$ son diferenciables.

Definición. Sea X una variedad diferenciable. Un abierto coordenado diferenciable de X es un abto $\emptyset \neq U \subseteq X$ junto con n funciones diferenciables $u_1, \dots, u_n \in \mathcal{O}_X(U)$ tales que para algún $\overline{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ abto $U \subseteq X \xrightarrow{\varphi = (u_1, \dots, u_n)} \overline{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ es un difeomorfismo.

- Pongamos $U \subseteq X \xrightarrow{\varphi = (u_1, \dots, u_n)} \overline{U} \subseteq \mathbb{R}$ un abto coordenado dif.. Al ser φ difeomorfismo $\Rightarrow \varphi$ es isomorfismo de espacios anillados, y por tanto $\forall \overline{V} \subseteq \overline{U}$ abto, $\varphi^*: C^\infty(\overline{V}) = \mathcal{O}_U(V)$ $(V = \varphi^{-1}(\overline{V}))$. Por tanto $\forall f \in \mathcal{O}_U(V)$ $\exists! F: f = F(u_1, \dots, u_n)$, ie,

$$\mathcal{O}_U(V) = C^\infty(V; u_1, \dots, u_n)$$

<u>Definición</u>: Llamamos <u>atlas</u> de una VD a un recubrimiento suyo formado por abiertos coordenados diferenciables.

- ¿Cuándo una VT X es una VD?

<u>Teorema</u>: Sea X una VT de dim n recubierta por abiertos coordenados $\{(U_i, u^i_1, .., u^i_n)\}_{i \in I}$. Si en las intersecciones $\{U_i \cap U_j\}_{i,j \in I}$ los cambios de coordenadas son diferenciables $\Rightarrow \exists!$ estructura de VD $(X, \mathcal{O}_X)$ para la cual el recubrimiento $\{(U_i, u^i_1 .. u^i_n)\}$ es un atlas.

- ¿Cuándo una aplicación continua entre VD es diferenciable?

<u>Teorema</u>: Sean X, Y VD; $\{U_i\}$ un recubrimiento atlas de X, $\{V_j\}$ de Y. Sea $\varphi: X \to Y$ una aplicación y $\varphi_{ij} := \varphi|_{\varphi^{-1}(V_j) \cap U_i}$ (valores en V_j). Entonces

$$\varphi \text{ es diferenciable} \Longleftrightarrow \varphi_{ij} \text{ es diferenciable } \forall i,j.$$

- En la práctica el Th anterior se utiliza siendo $\{U_i\}$, $\{V_j\}$ atlas de X e Y, resp. Así φ_{ij} está definida en abiertos coordenados y se pueden hacer cálculos en coordenadas para ver si φ_{ij} es dif.

<u>Teorema</u>: Sea X VD, Y un conjunto y $\varphi: Y \to X$ una biyección. Entonces sobre Y existe una única estructura de VD para la cual φ es difeomorfismo.

<u>Corolario</u>: En todo $\mathbb{R}$-EV de dimensión finita hay una estructura de variedad diferenciable. Si $T: E \to \mathbb{R}^n$ es el isomorfismo (siempre hay), entonces dicha estructura hace a T difeomorfismo.

Teorema: Si $F \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$, $n \geq 2$ y $\nabla F \neq 0$ en $M = \{x \in \mathbb{R}^n : F(x) = 0\}$, entonces M tiene una estructura natural de VD de dim $n-1$.

Teorema: Sean X, Y VD, y consideremos $X \times Y$ con la top. producto. Entonces sobre $X \times Y$ hay una única estructura de VD tal que las proyecciones $\pi_1 : X \times Y \to X$, $\pi_2 : X \times Y \to Y$ son diferenciables y se cumple la siguiente prop. universal: si Z es otra VD,

$$f : Z \to X \times Y \text{ diferenciable} \iff \pi_i \circ f \text{ son diferenciables, ie, si } f = (f_1, f_2), \text{ si } f_1, f_2 \text{ son dif.}$$

Además,

1) $\dim X \times Y = \dim X + \dim Y$

2) Fijado $y_0 \in Y$, si $g : X \times Y \to Z$ dif $\Rightarrow X \to Z$, $x \mapsto g(x, y_0)$ es dif.

Scanned by CamScanner

VIII : ESPACIO TANGENTE

Definición: Sea X un ET. Se llama soporte de una función $f: X \to \mathbb{R}$ al cerrado

$$\operatorname{Sop} f := \overline{\{x \in X : f(x) \neq 0\}}.$$

Lema: Sea X una VD, $\mathcal{U}$ abto y $F \subseteq \mathcal{U}$ cerrado. Toda función $f \in C^\infty(\mathcal{U})$ que se anula en F^c puede extenderse "por cero" fuera de $\mathcal{U}$ a una función $\tilde{f} \in C^\infty(X)$.

Proposición: Sea X VD, $\mathcal{U}$ abto y $K \subseteq \mathcal{U}$ compacto. Existe una función $h \in C^\infty(X)$, $\operatorname{Sop} h \subseteq \mathcal{U}$, $0 \leq h \leq 1$ y $h_{|K} = 1$. A tal función h se le denomina función meseta ó machacona.

Corolario: Sea X VD, $\mathcal{U}$ abto y $x \in \mathcal{U}$. Toda función $f \in C^\infty(\mathcal{U})$ puede extenderse a una función $F \in C^\infty(X)$ que coincide con f en algún entorno de x.

- Sea X VD de dim n, y $x \in X$. Consideremos $\mathcal{D} := \bigsqcup_{\substack{\mathcal{U} \text{ entorno} \\ \text{abto de } x}} C^\infty(\mathcal{U})$, conjunto sobre el cual se tiene la siguiente relación de equivalencia:

$$f_1 \equiv f_2 \iff f_1 = f_2 \text{ en algún entorno de } \mathcal{U}.$$

Definición: Llamaremos anillo de gérmenes de funciones diferenciables en x a

$$\mathcal{O}_{X,x} \overset{\text{NOT}}{=} \mathcal{O}_x := \mathcal{D}/_{\equiv}.$$

Dada $f \in \mathcal{D}$, su clase se denota f_x y se dice que es el germen de f en x

• Las operaciones $f_x + g_x := (f+g)_x$ y $f_x \cdot g_x := (fg)_x$ dotan a $\mathcal{O}_x$ de estructura de $\mathbb{R}$-álgebra.

• La aplicación $f \in C^\infty(X) \longrightarrow f_x \in \mathcal{O}_x$ es un morfismo de $\mathbb{R}$-álgebras, y el corolario dice que es epiyectiva, i.e., toda función en $\mathcal{O}_x$ es el germen de una función dif globalmente.

<u>Lema</u>: U entorno abierto de x $\Longrightarrow$ $\mathcal{O}_{X,x} = \mathcal{O}_{U,x}$.

<u>Definición</u>: Una aplicación diferenciable $\varphi: X \to Y$ entre VD se dice <u>difeomorfismo local</u> en $x \in X$ si existen entornos abiertos $U \subseteq X$ de x, $V \subseteq Y$ de $\varphi(x)$, tal que $\varphi: U \subseteq X \to V \subseteq Y$ sea difeomorfismo.

<u>Definición</u>: Sea $\varphi: X \to Y$ diferenciable entre VD, y sea $y = \varphi(x)$, $x \in X$. φ induce un morfismo de $\mathbb{R}$-álgebras que llamaremos φ^*:

$$\varphi^* : \mathcal{O}_y \longrightarrow \mathcal{O}_x$$
$$g_y \longmapsto \varphi^*(g_y) := (g \circ \varphi)_x .$$

<u>Proposición</u> (Propiedades de φ^*):

1) $(\varphi^* \circ \phi^*) = (\phi \circ \varphi)^*$.

2) $(Id_X)^* = Id_{\mathcal{O}_x}$

3) $\varphi: X \to Y$ difeomorfismo $\Longrightarrow$ $\varphi^*: \mathcal{O}_y \to \mathcal{O}_x$ es isomorfismo de $\mathbb{R}$-álgebras.

4) $\varphi: X \to Y$ difeomorfismo local en $x \in X \Rightarrow \varphi^*: \mathcal{O}_y \to \mathcal{O}_x$ también es isomorfismo de $\mathbb{R}$-álgebras.

Proposición: $\mathcal{O}_x$ es un anillo local.

Lema. Sea $p=(p_1,\dots,p_n)\in U\subseteq\mathbb{R}^n$, U convexo. Entonces $\mathfrak{m}:=\{f\in C^\infty(U): f(p)=0\}$ es un ideal maximal, y en particular es

$$\mathfrak{m}=(x_1-p_1,\dots,x_n-p_n)$$

Proposición: Sea $(U;u_1,\dots,u_n)$ un abierto coordenado (diferenciable) de una VD X, sea $x\in U$ y sean $(\lambda_1,\dots,\lambda_n)=(u_1(x),\dots,u_n(x))$ las coordenadas de x. Entonces, el único ideal maximal $\mathfrak{m}_x$ de $\mathcal{O}_x$ es

$$\mathfrak{m}_x=\left((u_1-\lambda_1)_x,\dots,(u_n-\lambda_n)_x\right).$$

ESPACIO TANGENTE

- Sea $p\in\mathbb{R}^n$. Puesto que si $f=g$ en un entorno de p ($\Leftrightarrow f_p=g_p$), $D_p^v f=D_p^v g$, sugiere que tenemos bien def la aplicación $f_p\in\mathcal{O}_p\longrightarrow D_p^v f\in\mathbb{R}$.

Definición: Sea X una VD y $p\in X$. Una derivación en p es una aplicación $D:\mathcal{O}_p\to\mathbb{R}$ que cumple:

i) $D\lambda=0 \quad \forall\lambda\in\mathbb{R}$

ii) $D(f_p+g_p)=Df_p+Dg_p$

iii) $D(f_p\cdot g_p)=Df_p\cdot g(p)+f(p)\cdot Dg_p$.

- Notar que D es $\mathbb{R}$-lineal (i) y ii)), pero no es morfismo de anillos (iii)).

• Sea $Der_{\mathbb{R}}(\mathcal{O}_p, \mathbb{R}) = \{$derivaciones en p $D: \mathcal{O}_p \to \mathbb{R}\}$. Notar que las operaciones $(D+D')(f_p) = Df_p + D'f_p$ y $(\lambda D)(f_p) = \lambda \cdot Df_p$ dotan a $Der_{\mathbb{R}}(\mathcal{O}_p, \mathbb{R})$ de estructura de espacio vectorial.

<u>Definición</u>: Llamaremos <u>espacio tangente</u> a la VD X en $p \in X$ a $T_pX := Der_{\mathbb{R}}(\mathcal{O}_p, \mathbb{R})$, y llamaremos <u>vectores tangentes</u> a sus elementos, ie, a las derivaciones en p.

• Si U abto de X que contiene a p, $T_pX = T_pU$ (pues $\mathcal{O}_{X,x} = \mathcal{O}_{U,x}$).

• <u>NOT</u>: En general se dice $f \in \mathcal{O}_x$, en lugar de f_x.

<u>Lema</u>: Sea $(U; u_1, \dots, u_n)$ abto coord dif de X VD, $p \in U$. La derivada parcial respecto u_i en p, que se denota con $(\partial u_i)_p : f \in \mathcal{O}_p \longrightarrow \frac{\partial f}{\partial u_i}(p) \in \mathbb{R}$, es una derivación.

<u>Teorema</u>: Sea U entorno de $p \in X$, y sea $(U; u_1, \dots, u_n)$ abto coord. dif. Entonces una base del EV T_pX es $\{(\partial_{u_1})_p, \dots, (\partial_{u_n})_p\}$, por lo que $\dim T_pX = n = \dim X$.

• Del Th se extrae que las coordenadas de un vector tangente $D \in T_pX$ en la base $\{(\partial_{u_i})_p\}_{i=1}^{n}$ es $\underline{(Du_1, \dots, Du_n)}$, y que $D = \bar{D} \iff Du_i = \bar{D}u_i \quad \forall i = 1..n$.

<u>Teorema</u>: Si V es un $\mathbb{R}$-EV de dim finita, dotado de su estructura nal de VD, entonces dado $p \in V$,

$$\boxed{T_pV = V}$$

Definición: Sea $\varphi: X \to Y$ difble, $x \in X$ y $y = \varphi(x) \in Y$. Llamaremos aplicación lineal tangente a

$$\varphi_x : T_x X \longrightarrow T_y Y$$
$$D \longmapsto \varphi_x(D) := D \circ \varphi^*$$

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}_y \arrow[r, "\varphi^*"] \arrow[rr, bend right, "D \circ \varphi^*"'] & \mathcal{O}_x \arrow[r, "D"] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

• φ_x está bien def y es una aplicación lineal entre EV.

Proposición (Propiedades).

1) $\varphi_* \circ \phi_* = (\phi \circ \varphi)_*$

2) $(Id_X)_* = Id_{T_x X}$

3) $\varphi: X \to Y$ difeomorfismo $\Rightarrow$ $\varphi_x : T_x X \to T_y Y$ es isomorfismo de EV

4) $\varphi: X \to Y$ difeomorfismo local $\Rightarrow$ $\varphi_x : T_x X \to T_y Y$ es isomorfismo de EV.

• Si φ_x es una apl. lin, ¿cuál es su matriz?

Teorema: Sea $\varphi: X \to Y$ dif, $x \in X$ e $y = \varphi(x) \in Y$. Consideremos dos cartas coordenadas $(U; u_1, \dots, u_m)$ de x y $(V; v_1, \dots, v_n)$ de y, y consideremos $\varphi: U \to V$. Entonces la matriz de la apl. lin tangente $\varphi_x : T_x X = T_x U \longrightarrow T_y Y = T_y V$ en las bases $\{(\partial u_i)_x\}$ y $\{(\partial v_j)_y\}$ es

$$(\varphi_x) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial u_j}(x) \right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1}(x) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial u_m}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial u_1}(x) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial u_m}(x) \end{pmatrix} \equiv \text{matriz Jacobiana},$$

donde $\varphi = (f_1, \dots, f_n)$, $f_i = v_i \circ \varphi$

$$\begin{tikzcd} U \subseteq X \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, equal, "(u_1, \dots, u_m)"'] \arrow[dr, "f_i = v_i \circ \varphi"] & V \subseteq Y \arrow[d, equal, "(v_1, \dots, v_n)"] \\ \bar{U} \subseteq \mathbb{R}^m & \mathbb{R} \quad \bar{V} \subseteq \mathbb{R}^n \end{tikzcd}$$

• El Th de la Func Inversa se reformula en este lenguaje así:

<u>Teorema</u>. Sea $\varphi : X \to Y$ difble, $x \in X$, $y = \varphi(x) \in Y$.

$$\varphi_* : T_x X \to T_y Y \text{ es isomorfismo} \iff \varphi \text{ es difeomorfismo local en } x.$$

DIFERENCIAL EN UN PTO.

<u>Definición</u>: Dada una VD X, llamaremos <u>espacio cotangente</u> de X en $x \in X$ a $T_x^* X := (T_x X)^*$.

Llamaremos <u>1-formas</u> en x a los elementos de $T_x^* X$.

<u>Definición</u>: Sea $x \in X$ VD, $f \in \mathcal{O}_x$. Se llama <u>diferencial</u> de f en x a la 1-forma

$$\begin{aligned} d_x f : T_x X &\longrightarrow \mathbb{R} \\ D &\longmapsto d_x f(D) := Df. \end{aligned}$$

<u>Proposición</u>. La diferencial $\begin{aligned} d_x : \mathcal{O}_x &\longrightarrow T_x^* X \\ f &\longmapsto d_x f \end{aligned}$ es una derivación.

<u>Teorema</u>: Si $(U; u_1, \dots, u_m)$ son coordenadas en un entorno de x, entonces $\{d_x u_1, \dots, d_x u_m\}$ es base de $T_x^* X$. En particular es la base dual de la base de $T_x X$ $\{(\partial u_1)_x, \dots, (\partial u_m)_x\}$.

<u>Proposición</u>: Sea $f \in \mathcal{O}_x$. Las coordenadas de $d_x f \in T_x^* X$ en la base $\{d_x u_i\}$ son

$$\left(\frac{\partial f}{\partial u_1}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial u_m}(x) \right) = \nabla f(x)$$

Proposición: La diferencial $d_x : \mathcal{O}_x \longrightarrow T_x^* X$ es epiyectiva, i.e., toda 1-forma es la diferencial en x de algún germen.

Definición: Sea $\varphi : X \longrightarrow Y$ diferenciable y $x \in X$, $y = \varphi(x) \in Y$. Llamaremos aplicación lineal cotangente a la aplicación lineal dual de la aplicación lineal tangente $\varphi_x : T_x X \longrightarrow T_y Y$, i.e., a

$$\begin{aligned} \varphi^* : T_y^* Y &\longrightarrow T_x^* X \\ d_y g &\longmapsto \varphi^*(d_y g) := d_y g \circ \varphi_x \end{aligned}$$

$$\begin{tikzcd} T_x X \arrow[r, "\varphi_x"] \arrow[rr, bend right, "d_y g \circ \varphi_x"'] & T_y Y \arrow[r, "d_y g"] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

$(g \in \mathcal{O}_y)$

- Del Álg Lin sabemos:
  - φ_x iny $\Longleftrightarrow$ φ^* epi
  - φ_x epi $\Longleftrightarrow$ φ^* iny
  - φ_x isomf $\Longleftrightarrow$ φ^* isomf.

Lema. Sea $\varphi : X \longrightarrow Y$ dif, $x \in X$, $y = \varphi(x) \in Y$. Para cada $g \in \mathcal{O}_y$, se cumple que

$$\varphi^*(d_y g) = d_x(\varphi^* g),$$

i.e., el siguiente diagrama es conmutativo.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}_y \arrow[r, "\varphi^*"] \arrow[d, "d_y"'] & \mathcal{O}_x \arrow[d, "d_x"] \\ T_y^* Y \arrow[r, "\varphi^*"] & T_x^* X \end{tikzcd}$$

(¡OJO! Los dos φ^* son diferentes!)

NOTA: Decir que $f_1, \dots, f_r \in C^\infty(X)$ definen un sistema de coordenadas en un entorno de x significa justamente que $X \xrightarrow{(f_1,\dots,f_r)} \mathbb{R}^r$ es un difeomorfismo local. Se dice que $f_1 \dots f_r$ son coordenadas locales en x.

Teorema: Sean $f_1, \dots, f_r \in C^\infty(U)$, $x \in X$.

$\{d_x f_1, \dots, d_x f_r\}$ es base de $T_x^* X \iff f_1, \dots, f_r$ son coordenadas locales en x.

Teorema: Sean $V, \overline{V}$ EV, y $f: V \to \overline{V}$. La aplicación lineal tangente $f_*: T_p V \to T_{f(p)} \overline{V}$ coincide (esencialmente, salvo los isomorfismos $T_p V = V$, $T_{f(p)} \overline{V} = \overline{V}$) con la única aplicación lineal $L: V \to \overline{V}$ que cumple la condición de diferenciabilidad $\lim_{x \to 0} \frac{f(x+p) - f(p) - L(x)}{x} = 0$ del Análisis.

Teorema (Definición Clásica de Diferencial de una función): Sea $x \in X$ VD, y $\mathfrak{m}_x$ el ideal maximal de $\mathcal{O}_x$. Entonces $\mathfrak{m}_x / \mathfrak{m}_x^2 = T_x^* X$.

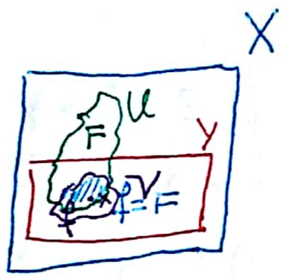
- Dada $f \in \mathcal{O}_x$, $f - f(x) \in \mathfrak{m}_x$, y su clase en el cociente se identifica con $d_x f$, la diferencial. Si $\mathfrak{m}_x^2$ son los "infinitesimos de 2º orden", esto dice que la diferencial $d_x f$ se corresponde con el incremento de la función en dicho pto, módulo infinitesimos de 2º orden.

Teorema (Definición Geométrica del Espacio Tangente): Sea $p \in X$ VD, y $\sigma: I \subseteq \mathbb{R} \to X : \sigma(0) = p$. Si llamamos "vector tangente a σ en p" a $T := \sigma_*((\partial_t)_0)$, entonces los vectores tangentes se corresponden biunívocamente con los "desplazamientos infinitesimales"; podemos entender que los vectores de $T_p X$ representan puntos infinitesimalmente próximos a p en X.

Proposición: $\varphi: X \to Y$ difeomorfismo local en todo pto + biyectiva $\Rightarrow$ difeomorfismo global.

IX : SUBVARIEDADES DIFERENCIALES

Definición. Sea $(X, \mathcal{O}_X)$ un espacio anillado y $\emptyset \neq Y \subseteq X$. Si V es un abto de Y, y $f \in C(V)$, se dice que <u>f coincide localmente con funciones del haz $\mathcal{O}_X$</u> si $\forall x \in V$ $\exists\, U$ entorno abto de x en X y $F \in \mathcal{O}_X(U)$: $f = F$ en $U \cap V$.



Proposición: El haz $\mathcal{O}_X$ induce un haz de funciones sobre Y,

$$\mathcal{O}_Y : V \in \tau_Y \longmapsto \mathcal{O}_Y(V) := \{ f \in C(V) : f \text{ coincide loc. con funs del haz } \mathcal{O}_X \}.$$

que llamaremos <u>haz inducido</u> en Y por el haz de X.

- Por def, los funs del haz $\mathcal{O}_Y$ son los que coinciden loc. con funs del haz $\mathcal{O}_X$.
- $i : (Y, \mathcal{O}_Y) \hookrightarrow (X, \mathcal{O}_X)$ es un morfismo de espacios anillados.
- Si Y es abto, $V \subseteq Y$ abto $\Leftrightarrow V \subseteq X$ abto, y por tanto $\mathcal{O}_Y = \mathcal{O}_X$.
- Sea $(\mathbb{R}^n, C^\infty_{\mathbb{R}^n})$, y consideremos $\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^m \times 0^r$ $(m+r=n)$ como subespacio. Entonces $\mathcal{O}_{\mathbb{R}^m} = C^\infty_{\mathbb{R}^m}$

Proposición (Propiedades):

1) Sea $Z \subseteq Y \subseteq (X, \mathcal{O}_X)$. Restringir el haz a Y y luego a Z es igual que restringir directamente el haz a Z.

2) Consideremos $i: Y \hookrightarrow X$, sea Z otro esp. anillado y $\varphi: Z \to Y$.

$Z \xrightarrow{\varphi} Y$ morf de esp. anillados $\iff$ $Z \xrightarrow{\varphi} Y \xhookrightarrow{i} X$ morf. de esp. anillad.

3)
$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\varphi} & \overline{X} \\ \cup\!\!\!\mid & & \cup\!\!\!\mid \\ Y & \xrightarrow{\varphi_{|Y}: \varphi} & \overline{Y} \ (\subseteq \varphi(Y)) \end{array}$$

morf. / isomorf. de esp. anill.

$\Downarrow$

morf. / isomorf. de esp. anill. $\left(\overline{Y} = \varphi(Y) \right)$

Definición. Sea $Y \subseteq X$ VD. Se dice que Y es una subvariedad diferenciable regular, o simplemente subvariedad de X, si $(Y, \mathcal{O}_Y)$ es una variedad diferenciable.

Proposición (Propiedades anteriores revisadas):

1) Sea Y subvariedad de X VD, y $Z \subseteq Y \subseteq X$.

Z subvariedad de Y $\iff$ Z subvariedad de X

2) Y subVD, $\subseteq X$ VD, Z VD, $\varphi: Z \to Y$.

$Z \xrightarrow{\varphi} Y$ diferenciable $\iff$ $Z \xrightarrow{\varphi} Y \xhookrightarrow{i} X$ diferenciable

3)
$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & \overline{X} \\ \cup\!\!\!\mid & & \cup\!\!\!\mid \\ Y & \longrightarrow & \overline{Y} \end{array}$$

dif / difeomorf.

$\Downarrow$

dif / difeomorf. $\left(\overline{Y} = \varphi(Y) \right)$

Teorema: Sea Y SVD de X VD, e $i: Y \hookrightarrow X$. Entonces para cada $y \in Y$,

$$i_* : T_y Y \longrightarrow T_x X \quad \text{es } \underline{\text{inyectiva}},$$

ie, el espacio tangente a la subvariedad es un SEV del esp. tgte.

Corolario: $\dim Y \leq \dim X$.

Teorema: Sea X VD y $f_1, \dots, f_r \in C^\infty(X)$, y sea $Y := \{x \in X : f_1(x) = \dots = f_r(x) = 0\}$.

Si $\{d_x f_1, \dots, d_x f_r\}$ son L.I. $\forall x \in Y \Longrightarrow$ $\underline{Y \text{ es SVD}}$, y $\underline{\dim Y = \dim X - r}$.

Proposición: Sea X VD, $f_1 \dots f_r \in C^\infty(X)$ con $\{d_x f_1 \dots d_x f_r\}$ L.I. $^{\forall x \in Y}$, con lo que $Y = \{x \in X : f_1(x) = \dots = f_r(x) = 0\}$. Para cada $y \in Y$, $i_* : T_y Y \to T_y X$ cumple:

$$\boxed{i_*(T_y Y) = \langle d_y f_1, \dots, d_y f_r \rangle^\circ}$$

Definición: Llamamos $\underline{\text{codimensión}}$ de una SVD Y de X a $\dim X - \dim Y$.

Teorema: Sea Y SVD de codimensión r, y $\dim X = n$ (ie, $\dim Y = n - r$). Para cada pto $y \in Y$ existe un entorno coordenado $(U; u_1, \dots, u_n)$ de y en X tal que

$$Y \cap U = \{x \in U : u_1(x) = \dots = u_r(x) = 0\}$$

Es decir, localmente toda subvariedad es de la forma $X = \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^m$, $Y = 0 \times \mathbb{R}^m$.

Corolario: Sea Y svd de X vd.

$$\dim Y = \dim X \implies Y \text{ es un abierto de } X$$

Es decir, las subvariedades de X de codimensión 0 son sus abtos. no vacíos.

INMERSIONES Y PROYECCIONES

Definición: Una aplicación diferenciable $\varphi: Y \longrightarrow X$ se dice inmersión local en $y \in Y$ si $\varphi_*: T_y Y \longrightarrow T_{\varphi(y)} X$ es inyectiva (luego $\dim X \geq \dim Y$)

• Y svd de X vd, $i: Y \hookrightarrow X$ es una inmersión local en todo pto.

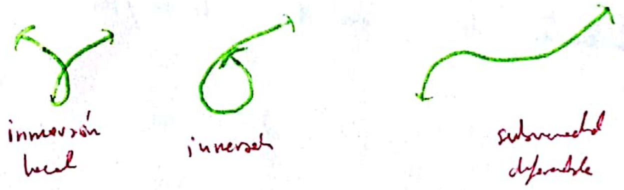
Teorema: Si $\varphi: Y \longrightarrow X$ es inmersión local en $y_0 \in Y \implies \exists\, V \subseteq Y$ entorno abto de y_0: $\varphi(V)$ es svd X, y $\varphi: V \longrightarrow \varphi(V)$ difeomorfismo.

Es decir, localmente toda inmersión local es la inclusión de una subvariedad.

• La condición de regularidad de las parametrizaciones de curvas y superficies significan "ser inmersión local" en todo pto.

Definición: Una aplicación diferenciable $\varphi: Y \longrightarrow X$ se dice inmersión si φ es inyectiva y es inmersión local en todo pto $y \in Y$. Se dice que $\varphi(Y)$ es una subvariedad inmersa.

Teorema: Sea $\varphi: Y \longrightarrow X$ una inmersión. Si, considerando sobre $\varphi(Y) \subset X$ la topología inducida de X, $\varphi: Y \longrightarrow \varphi(Y)$ es un homeomorfismo, entonces $\varphi(Y)$ es una subvariedad diferenciable de X y $\varphi: Y \longrightarrow \varphi(Y)$ un difeomorfismo.



<u>Definición</u>: Una aplicación $\varphi : X \to Y$ se dice <u>proyección regular</u> en $x \in X$ si $\varphi_x : T_x X \to T_{\varphi(x)} Y$ es epiyectiva. (luego $\dim X \geq \dim Y$).

• $\varphi : (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \longrightarrow (x_1 ... x_m) \in \mathbb{R}^m$ $(n \geq m)$ es proyección regular.

<u>Teorema</u>: Sea $\varphi : X \to Y$ proyección regular en $x_0 \in X$. Entonces $\exists$ adecuadas coordenadas U de x_0 y V de $y_0 = \varphi(x_0)$ tales que $\varphi(U) \subseteq V$ y $\varphi : U \to V$ se expresa en coordenadas como

$$\varphi(a_1, .., a_n) = (a_1, .., a_m)$$

Es decir, toda proyección regular es localmente proyectar algunas coordenadas.

<u>Lema</u>: Sea $X \xrightarrow{\varphi = (f_1 .. f_m)} \mathbb{R}^m$ diferenciable, $x \in X$

$$\varphi \text{ proyección regular en } x \iff \{ d_x f_1, ..., d_x f_m \} \text{ L.I.}$$

<u>Corolario</u>: Si $\varphi : X \to Y$ proyección regular en todo pto $\Rightarrow$ cada fibra no vacía de φ es una subvariedad de X.

<u>NOTA</u>: La "fibra" de φ en $y \in Y$ es $\varphi^{-1}(y) = \{ x \in X ; \varphi(x) = y \}$.

X: CAMPOS TENSORIALES

Definición: Un campo tangente ó campo de vectores tangentes sobre una VD X es una familia de vectores tangentes $D = \{D_x \in T_x X\}_{x\in X}$. Dicho campo se dice diferenciable si para todo abierto U de X y toda $f \in C^\infty(U)$ la función

$$Df : U \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto Df(x) := D_x f$$

es diferenciable. (i.e., $Df \in C^\infty(U)$)

Proposición: Un campo tangente es diferenciable $\iff$ es localmente diferenciable: si $D = \{D_x\}_{x\in X}$ es dif, $D_U = \{D_x\}_{x\in U}$ es dif, (U abierto de X); y si para un recubrimiento por abiertos $\{U_i\}_{i\in I}$ de X, D_{U_i} son dif., entonces D es dif.

• Sea $(U; u_1 \dots u_n)$ un abierto coordenado de X, y $D = \{D_x\}_{x\in U}$ un campo tg. Para cada $x \in U$ (i.e, para cada D_x), sus coordenadas son $(D_x(u_1) \dots D_x(u_n))$ en la base $\{(\partial_{u_i})_x\}$, i.e, $D_x = \sum_{i=1}^{n} D_x(u_i) \cdot (\partial_{u_i})_x$.

y cada $D_x(u_i)$ se puede extender con una función que varía en x: $D_x(u_i) = f_i(x)$ (su coord. i-ésima).

Proposición: El campo D es diferenciable $\iff$ $f_1 = Du_1, \dots, f_n = Du_n$ son diferenciables.

• En adelante todos los campos serán diferenciables.

Definición. Sea X VD. Una derivación sobre X es una aplicación $D : C^\infty(X) \longrightarrow C^\infty(X)$ que cumple:

¡ funciones $\longmapsto$ funciones !

i) $D\lambda = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$

ii) $D(f+g) = D(f) + D(g)$, $f, g \in C^\infty(X)$

iii) $D(f \cdot g) = Df \cdot g + f \cdot Dg$, $f, g \in C^\infty(X)$.

Lema. Si $f \in C^\infty(X)$ es constante en algún entorno de un pto $x \in X$, $\Rightarrow Df(x) = 0$.

Definición: Cada campo tangente $D = \{D_x\}_{x\in X}$ define una aplicación

$$D : C^\infty(X) \longrightarrow C^\infty(X)$$
$$f \longmapsto Df : X \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto Df(x) := D_x f$$

y se le llamará derivación asociada al campo tangente D.

- Denotemos como $\mathcal{D}(X) = \{$campos tangentes sobre $X\}$.

Teorema:

$$\mathcal{D}(X) \;=\!=\!=\; Der_{\mathbb{R}}(C^\infty(X), C^\infty(X))$$

$D = \{D_x\} \longrightarrow D : C^\infty(X) \to C^\infty(X)$

$f \longmapsto Df : X \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto Df(x) = D_x f$.

$D = \{D_x\}$, donde para cada x

$D_x : \mathcal{O}_x \longrightarrow \mathbb{R} \longleftarrow D$

$f \longmapsto D_x f = Df(x)$.

- Notar que $\mathcal{D}(X)$ tiene estructura natural de $C^\infty(X)$-módulo: $(D+D')(f) = Df + D'f$ (o bien $\{D_x\} + \{D'_x\} = \{D_x + D'_x\}$); $(h\cdot D)(f) = h \cdot Df$ (o bien $h \cdot \{D_x\} = \{h \cdot D_x\}$).

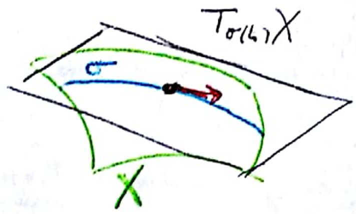
- Si $(U; u_1 \ldots u_n)$ es un abierto coordenado, tenemos la derivación $\partial_{u_i} : C^\infty(X) \longrightarrow C^\infty(X)$, $f \mapsto \partial_{u_i} f = \frac{\partial f}{\partial u_i}$,

o como campo tangente, $\partial_{u_i} = \{(\partial_{u_i})_x\}_{x\in X}$.

Teorema. Sea $(U; u_1, \ldots u_n)$ un abierto coordenado de una VD X. El $C^\infty(U)$-módulo $\mathcal{D}(U)$ es libre de rango n, y una base suya es $\{\partial_{u_1}, \ldots, \partial_{u_n}\}$. En particular, dado $D \in \mathcal{D}(U)$, sus coordenadas en dicha base son $\boxed{(Du_1, \ldots, Du_n)}$.

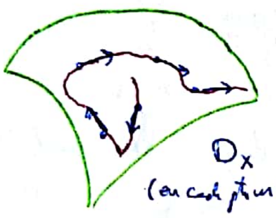
CURVAS INTEGRALES

Definición: Sea X una VD. Llamamos curva (parametrizada) en X a una aplicación diferenciable $\sigma : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow X$, donde I es un intervalo abierto. Si t es la coord. cartesiana en I, entonces llamamos vector tangente de σ en $t_0 \in I$ a $T_{t_0} := \sigma_*\left((\partial_t)_{t_0}\right) \in T_{\sigma(t_0)}X$.



Lema: Sea $\sigma : I \longrightarrow (U; x_1, \dots x_n)$ una curva que valora en un abierto coordenado. Si $\sigma(t) = (g_1(t), \dots, g_n(t))$ $\left(g_i = x_i \circ \sigma = \sigma^*(x_i)\right)$, entonces las coordenadas de T_{t_0} en la base $\{(\partial_{x_i})_{t_0}\}$ de $T_{\sigma(t_0)}X$ son $T_{t_0} = (g_1'(t_0), \dots, g_n'(t_0))$, i.e. igual que en el 1er cuatrimestre.

Definición: Sea $D \in \mathfrak{D}(X)$. Llamamos curva integral del campo D a toda curva $\sigma : I \longrightarrow X$ que en cada pto $t_0 \in I$ cumple $T_{t_0} = D_{\sigma(t_0)}$, i.e., que en cada pto el vector tg a la curva coincide con el vector que el campo asigna en $\sigma(t)$.



Proposición: Sea $\sigma(t) = (g_1(t), \dots g_n(t))$ una curva sobre un abierto coordenado $(U; x_1 \dots x_n)$, y sea $D = \sum_{i=1}^{n} F_i(x_1, \dots x_n)\partial_{x_i} \in \mathfrak{D}(X)$ (notar que $F_i = Dx_i$).

$$\sigma \text{ curva integral de } D \iff \left.\begin{array}{l} g_1' = F_1(g_1 \dots g_n) \\ \vdots \\ g_n' = F_n(g_1 \dots g_n) \end{array}\right\}$$

Definición: Dado un sistema de ec. dif. como el de antes, al campo tangente (derivación) $D := \sum F_i(x_1, \dots x_n)\partial_{x_i}$ se le llama operador diferencial asociado al sistema.

Teorema: Dado un campo tangente $D \in \mathfrak{D}(X)$, y $p \in X$, existe una curva integral $\sigma : I \longrightarrow X$ del campo tal que $0 \in I$ y $\sigma(0) = p$. En particular dos de tales curvas coinciden en la intersección de sus intervalos.

• Con las notaciones del Th, considera el conjunto de todas las curvas integrales de D que pasan por $p\in X$ en $t=0$: $\{\sigma_j : I_j \to X : \sigma_j(0)=p\}$. Si $I=\bigcup_j I_j$ (intervalos con $0\in I_j\ \forall j$), el Teorema nos dice que la aplicación $\sigma : I \to X$, $\sigma(t)=\sigma_j(t)$ para cualquier σ_j que pase por t, está bien definida. Así que $\sigma : I \to X$ es la curva integral que pasa por $p\in X$ para $t=0$ y está definida sobre el mayor intervalo posible.

Definición: Llamaremos <u>trayectoria</u> o <u>curva integral máxima</u> de D que pasa por $p\in X$ a dicha curva. Si $I=\mathbb{R}$ diremos que dicha trayectoria es <u>completa</u>, y si para D se cumple que todas sus trayectorias son completas, diremos que D es <u>completo</u>.

Definición: Un punto $x\in X$ se dice <u>singular</u> para $D\in\mathcal{D}(X)$ si $D_x=0$.

Proposición: $x\in X$ es singular para $D\in\mathcal{D}(X) \iff$ la trayectoria de D que pasa por x es la curva cte x.

Definición: Se dice que $f\in C^\infty(X)$ es una <u>integral primera</u> de $D\in\mathcal{D}(X)$ si $Df\equiv 0$.

Proposición: $f\in C^\infty(X)$ es integral primera de $D\in\mathcal{D}(X) \iff f$ es constante a lo largo de las trayectorias de D

<u>GRUPOS UNIPARAMÉTRICOS</u>

• $\mathrm{Dif}\, X := \{\text{difeomorfismos } X\to X\}$. Es grupo con la composición.

Definición: Dar un <u>grupo uniparamétrico</u> sobre una VD X es dar una aplicación $(\mathbb{R},+) \xrightarrow{\tau} (\mathrm{Dif}\,X, \circ)$, $t \longmapsto \tau_t$ (también se dice $\tau=\{\tau_t\}_{t\in\mathbb{R}}$) que cumple:

i) τ morfismo de grupos: $\tau_{t+t'} = \tau_t \circ \tau_{t'}$

ii) la aplicación $\mathbb{R}\times X \xrightarrow{\tau} X$, $(t,x) \longmapsto \tau(t,x) := \tau_t(x)$ sea diferenciable.

• Notar que se cumple $\tau_0 = Id_X$, $\tau_{-t}=(\tau_t)^{-1}$.

Definición: Se llama generador infinitesimal de un grupo uniparamétrico $\{\tau_t\}$ sobre una VD X al campo tangente

$$D : C^\infty(X) \longrightarrow C^\infty(X)$$
$$f \longmapsto Df : X \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$p \longmapsto Df(p) := \lim_{t\to 0} \frac{f(\tau_t(p)) - f(p)}{t}.$$

Proposición: El límite anterior existe, D es una derivación y en particular $Df = \frac{\partial(f\circ\tau)}{\partial t}(0,\cdot)$.

Más aún, si $(V; x_1 \dots x_n)$ es un abierto coordenado entorno de $p\in X$, y $\tau = (f_1, \dots, f_n)$, entonces

$$D = \left(\frac{\partial f_1}{\partial t}(0,x_1\dots x_n), \dots, \frac{\partial f_n}{\partial t}(0,x_1\dots x_n)\right).$$

Teorema: El generador infinitesimal D de un grupo uniparamétrico $\{\tau_t\}$ es un campo completo: la trayectoria de D que pasa por $p\in X$ en $t=0$ es $\sigma_p : \mathbb{R} \to X$, $\sigma_p(t) := \tau_t(p)$.

- Nótese que el nombre de "gen. infint" se debe a que determina el grupo uniparamétrico vía la igualdad $\tau_t(p) = \sigma_p(t)$.
- Ejemplos de grupos uniparamétricos: Traslaciones, dilataciones, giros, transformaciones lineales, ...
- ¿Todo campo tangente es el gen. infint. de un grupo uniparamétrico? NO, pues para aparecer deben ser completos.

La respuesta va a ser sí localmente:

Definición: Un grupo uniparamétrico local sobre una VD X es una aplicación diferenciable

$$\tau : W \subset \mathbb{R}\times X \longrightarrow X$$
$$(t,x) \longmapsto \tau(t,x) = \tau_t(x)$$

que cumple

i) $\operatorname{dom} \tau_0 = X$, $\tau_0 = Id_X$

ii) $x\in \operatorname{dom} \tau_{t_1}$, entonces $\tau_{t_1}(x)\in \operatorname{dom}\tau_{t_2} \iff x\in\operatorname{dom}\tau_{t_1+t_2}$

en cuyo caso se cumple que $(\tau_{t_2}\circ\tau_{t_1})(x) = \tau_{t_1+t_2}(x)$.

$\left(\text{donde } \operatorname{dom}\tau_t := \{x\in X : (t,x)\in W\}\right)$

Definición: Se llama <u>generador infinitesimal</u> de un grupo uniparamétrico local $\tau = \{\tau_t\}$ sobre X al campo tangente

$$D : C^\infty(X) \longrightarrow C^\infty(X)$$
$$f \longmapsto Df : X \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$p \longmapsto Df(p) := \lim_{t\to 0} \frac{f(\tau_t(p)) - f(p)}{t}.$$

Teorema: Sea $D \in \mathfrak{D}(X)$, y σ_p la curva integral máxima que pasa por $p \in X$ en $t=0$. Entonces la aplicación

$$\tau : \mathbb{R} \times X \longrightarrow X$$
$$(t, x) \longmapsto \sigma_x(t)$$

tiene como dominio de definición a un abierto $W \subseteq \mathbb{R} \times X$, es diferenciable y define un grupo uniparamétrico local cuyo generador infinitesimal es justamente D.

• (<u>Fibrado tangente</u>). Sea $TX := \bigsqcup_{x\in X} T_xX$ junto a la proyección $\pi : TX \longrightarrow X$, $D_x \longmapsto x$.

Cada $D \in \mathfrak{D}(X)$ es en cierto sentido una aplicación $D : X \longrightarrow TX$, $x \longmapsto D_x$ (una sección de π).

Teorema: TX tiene estructura de variedad diferenciable para la cual π es proyección (epi y proyección regular en todo pto) y los campos tg (dif) son las secciones (dif) de π. Dicha VD dotada de π se denomina <u>fibrado tangente</u> de la VD X.

Proposición: Se tiene la correspondencia biunívoca

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{campos tg de } X \\ (\text{arbitrarios}) \end{array} \right\} \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \text{secciones del fibrado tangente} \\ \pi : TX \to X \end{array} \right\}.$$

$$\text{dif} \longleftrightarrow \text{dif}$$

1-FORMAS

Definición: Una 1-forma ó campo de 1-formas sobre una VD X es una familia $\omega = \{\omega_x \in T_x^*X\}_{x\in X}$.

Diremos que es diferenciable si para todo abierto $U \subseteq X$ y todo $D \in \mathcal{D}(U)$ se cumple que la función

$$\omega(D) : U \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \omega(D)(x) := \omega_x(D_x)$$

es diferenciable (ie, $\omega(D) \in C^\infty(U)$).

- Sea $(U; u_1, \dots u_n)$ un abierto coordenado, y $\omega = \{\omega_x\}$ una 1-forma. Cada ω_x, en la base $\{d_x u_i\}$ se escribe como $\omega_x = \sum f_i(x) \cdot d_x u_i$, donde $f_i(x) = \omega_x((\partial u_i)_x)$.

Proposición: Con las not. anteriores, ω es diferenciable $\iff$ $f_1, \dots, f_n$ son diferenciables.

- En adelante toda 1-forma se supondrá diferenciable.
- Denotemos como $\Omega(X) = \{$1-formas sobre $X\}$, que tiene estructura de $C^\infty(X)$-módulo:

$\{\omega_x\} + \{\omega'_x\} := \{\omega_x + \omega'_x\}$; $h \cdot \{\omega_x\} := \{h \cdot \omega_x\}$.

Lema: Sea $\omega \in \mathrm{Hom}_{C^\infty(X)\text{-mod}}(\mathcal{D}(X), C^\infty(X))$, $x \in X$. Si $\overline{D} \in \mathcal{D}(X)$ cumple que $\overline{D}_x = 0$, entonces $\omega(\overline{D})(x) = 0$.

Teorema: Sobre toda VD se tiene el isomorfismo de $C^\infty(X)$-módulos

$$\Omega(X) = \mathrm{Hom}_{C^\infty(X)\text{-mod}}(\mathcal{D}(X), C^\infty(X)).$$

Definición: Sea X una VD. Se llama diferencial de $f \in C^\infty(X)$ a la 1-forma $df := \{d_x f\}_{x\in X} \in \Omega(X)$.

- Entendida como aplicación de $\mathrm{Hom}(\ ,\ )$ es $df : \mathcal{D}(X) \longrightarrow C^\infty(X)$, $D \longmapsto Df$.
- La aplicación $d : C^\infty(X) \longrightarrow \Omega(X)$, $f \longmapsto df$ es una derivación, pues punto a punto lo es.

Teorema: Sea $(U; u_1, \dots u_n)$ un abierto coordenado de una VD X. El $C^\infty(U)$-módulo $\Omega(U)$ es libre de rango n, y una base suya es $\{du_1, \dots, du_n\}$, la cual es base dual de la base $\{\partial_{u_1}, \dots, \partial_{u_n}\}$ de $\mathfrak{D}(U)$.

- Dada $\omega \in \Omega(U)$, sus coordenadas son $\boxed{\omega = (\omega(\partial_{u_1}), \dots, \omega(\partial_{u_n}))}$
- Dada $f \in C^\infty(U)$, las coordenadas de df son $\boxed{df = \left(\frac{\partial f}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial u_n}\right)}$

(en la base $\{du_1 \dots du_n\}$ de $\Omega(U)$).

TENSORES EN UNA VARIEDAD

- Repaso Alg Lin II!
- Recordar una propiedad: $C^i_j(\xi^1 \otimes \dots \otimes \xi^p \otimes v_1 \otimes \dots \otimes v_q) = \xi^i(v_j)\, \xi^1 \otimes \overset{\hat{i}}{\dots} \otimes \xi^p \otimes v_1 \otimes \overset{\hat{j}}{\dots} \otimes v_q$.

Definición: Un tensor o campo tensorial de tipo (p,q) sobre X es una familia $T = \{T_x \in T^{(p,q)}(T_x X)\}_{x \in X}$. Dicho campo tensorial se dice diferenciable si para todo abierto U de X y todos $D_1, \dots, D_p, \omega^1, \dots, \omega^q \in \mathfrak{D}(U)^p \times \Omega(U)^q$ lo es la función

$$T(D_1 \dots D_p, \omega^1 \dots \omega^q) : U \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto T_x(D_{1_x} \dots D_{p_x}, \omega^1_x, \dots, \omega^q_x).$$

- Si $(U; u_1 \dots u_n)$ es un abierto coordenado, cada T_x es $T_x = \sum f_\alpha(x)\, d_x u^{i_1} \otimes \dots \otimes d_x u^{i_p} \otimes (\partial_{u_{j_1}})_x \otimes \dots \otimes (\partial_{u_{j_q}})_x$.

Proposición: T es diferenciable $\iff \{f_\alpha\}$ son diferenciables

- En adelante todo tensor se supondrá dif.
- $(p,0) \equiv$ covariantes ; $(0,q) \equiv$ contravariantes ; $(1,0) \equiv$ 1-formas ; $(0,1) \equiv$ campos tangentes

$(0,0) :\equiv C^\infty(X)$

• {tensores de tipo (p,q) sobre X} tiene estructura de $C^\infty(X)$-módulo:

$$\{T_x\} + \{T'_x\} = \{T_x + T'_x\} \qquad ; \qquad h\cdot\{T_x\} = \{h(x) T_x\}$$

y se puede definir el producto tensorial y la contracción de índices

$$\{T_x\} \otimes \{T'_x\} := \{T_x \otimes T'_x\} \quad ; \quad C^{ij}(\{T_x\}) := \{C^{ij} T_x\} .$$

• Sea $T^{(p,q)}(X) := \{ \mathcal{D}(X)^p \times \Omega(X)^q \longrightarrow C^\infty(X)$, $C^\infty(X)$-multilineales$\}$.

Cada tensor $T = \{T_x\}$ define una de estas aplicaciones

$$\begin{aligned} T : \mathcal{D}(X)^p \times \Omega(X)^q &\longrightarrow C^\infty(X) \\ (D_1 \dots D_p , \omega^1 \dots \omega^q) &\longmapsto T(D_1 \dots D_p, \omega^1 \dots \omega^q) : X \longrightarrow \mathbb{R} \\ & \qquad\qquad x \longmapsto T_x(D_{1x} \dots D_{px}, \omega^1_x \dots \omega^q_x) \end{aligned}$$

<u>Teorema</u>: En toda VD hay un isomorfismo de $C^\infty(X)$-módulos

$$\{\text{tensores de tipo } (p,q) \text{ sobre } X\} = T^{(p,q)}(X) .$$

<u>Teorema</u>: Si $(U; u_1 \dots u_n)$ es un abierto coord. de X, el $C^\infty(U)$-módulo $T^{(p,q)}(U)$ es libre de rango n^{p+q} y base

$$\{ du_{i_1} \otimes \dots \otimes du_{i_p} \otimes \partial_{u_{j_1}} \otimes \dots \otimes \partial_{u_{j_q}} \}_{i_1 \dots i_p, j_1 \dots j_q = 1, \dots, n} .$$

<u>Definición</u>: Una <u>métrica riemanniana</u> sobre X es un tensor $T = \{T_x\}$ de tipo $(2,0)$ en el que en cada pto es un producto escalar, ie, una métrica simétrica definida positiva.

• Sobre $\mathbb{R}^n$, con sus coordenadas cartesianas, la métrica riemanniana usual o standard, el producto escalar usual, es

$$\underline{g = dx_1 \otimes dx_1 + \dots + dx_n \otimes dx_n} .$$

Proposición: $\{D_1 \dots D_n\}$ base de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \iff \{D_{1p} \dots D_{np}\}$ base de $T_p\mathbb{R}^3$ $\forall p \in \mathbb{R}^3$

Proposición: f integral primera de $D \in \mathcal{D}(X) \iff df \in \langle D \rangle^\circ$.

Proposición: Sea $D \in \mathcal{D}(X)$. Si las trayectorias de D están en compactos $\Rightarrow D$ completo.

Proposición: Sea g la métrica estándar de $\mathbb{R}^2$ / $\mathbb{R}^3$, que en coordenadas cartesianas se expresa como $g = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}$ / $g = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$. Entonces en otras coord. es:

1) Polares en $\mathbb{R}^2$:
$$g = \begin{pmatrix} 1 & \\ & r^2 \end{pmatrix} = dr \otimes dr + r^2\, d\theta \otimes d\theta$$

2) Cilíndricas en $\mathbb{R}^3$:
$$g = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & r^2 & \\ & & 1 \end{pmatrix} = dr \otimes dr + r^2\, d\theta \otimes d\theta + dz \otimes dz$$

3) Esféricas en $\mathbb{R}^3$:
$$g = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & r^2\cos^2\varphi & \\ & & r^2 \end{pmatrix} = dr \otimes dr + r^2\cos^2\varphi\, d\theta \otimes d\theta + r^2\, d\varphi \otimes d\varphi$$

XI : CÁLCULO DIFERENCIAL EXTERIOR

• Sea $\varphi : X \to Y$ dif. Sabemos que $\varphi^* : T^*_{\varphi(x)} Y \to T^*_x X$ lleva 1-formas de "Y" en "X". Vamos a generalizar esto:

Definición: Sea $T \in T^{(r,0)}(Y)$. Se llama imagen inversa de T por φ al tensor $\varphi^* T \in T^{(r,0)}(X)$ definido por:

$$\varphi^* : T^{(r,0)}(Y) \longrightarrow T^{(r,0)}(X)$$

$$T \longmapsto \varphi^* T : \mathcal{D}(X)^r \longrightarrow C^\infty(X)$$

$$(D_1 \ldots D_r) \longmapsto \varphi^* T(D_1 \ldots D_r) : X \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto \underline{\underline{T_{\varphi(x)}(\varphi_* D_{1_x}, \ldots, \varphi_* D_{r_x})}}$$

• Para $C^\infty(Y) = T^{(0,0)}(Y)$, la imagen inversa es componer: $C^\infty(Y) \to C^\infty(X)$; $f \longmapsto \varphi^* f = f \circ \varphi$.

• Para definir la imagen inversa y directa en general, necesitamos que $\varphi : X \to Y$ sea difeomorfismo. Además, a partir de ahora usaremos la notación siguiente:

- φ^* : cosas sobre $Y \longrightarrow$ cosas sobre X
- φ_* : cosas sobre $X \longrightarrow$ cosas sobre Y

y debe quedar claro por el contexto: si $\varphi_* : T_x X \to T_y Y \Rightarrow (\varphi_*)^{-1} \overset{NOT}{=} \varphi^* : T_y Y \to T_x X$,

y si $\varphi^* : T_y^* Y \to T_x^* X \Rightarrow (\varphi^*)^{-1} \overset{NOT}{=} \varphi_* : T_x^* X \to T_y^* Y$.

Definición: Sea $(p,q) \neq (0,0)$. Se llama imagen inversa por φ de tensores de tipo (p,q) sobre Y a

$$\varphi^*: T^{(p,q)}(Y) \longrightarrow T^{(p,q)}(X)$$

$$T \longmapsto \varphi^* T : \mathfrak{D}(X)^p \times \Omega(X)^q \longrightarrow C^\infty(X)$$

$$(D_1 \ldots D_p, \omega^1 \ldots \omega^q) \longmapsto \varphi^* T(D_1 \ldots D_p, \omega^1 \ldots \omega^q) : X \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto$$

$$\longmapsto := \boxed{T_y \left(\varphi_* D_{1_x}, \ldots, \varphi_* D_{p_x}, \varphi_* \omega^1_x, \ldots, \varphi_* \omega^q_x \right)} \quad , \ y = \varphi(x).$$

- Para $(0,0)$, $\Rightarrow$ $\varphi^*: C^\infty(Y) \to C^\infty(X)$.

Definición: Sea $(p,q) \neq (0,0)$. Se llama imagen directa por φ de tensores de tipo (p,q) sobre X a

$$\varphi_*: T^{(p,q)}(X) \longrightarrow T^{(p,q)}(Y)$$

$$T \longmapsto \varphi_* T : \mathfrak{D}(Y)^p \times \Omega(Y)^q \longrightarrow C^\infty(Y)$$

$$(\bar{D}_1 \ldots \bar{D}_p, \bar{\omega}^1 \ldots \bar{\omega}^q) \longmapsto \varphi_* T(\bar{D}_1 \ldots \bar{D}_p, \bar{\omega}^1 \ldots \bar{\omega}^q) : Y \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$y \longmapsto$$

$$\longmapsto := \boxed{T_x \left(\varphi^* \bar{D}_{1_y}, \ldots, \varphi^* \bar{D}_{p_y}, \varphi^* \bar{\omega}^1_y, \ldots, \varphi^* \bar{\omega}^q_y \right)}$$

- Para $(p,q) = (0,0)$, $\Rightarrow$ $\varphi_*: C^\infty(X) \to C^\infty(Y)$.

Proposición (Propiedades): Sea $\varphi: X \to Y$ difeomorfismo. Entonces se cumple:

1) Las aplicaciones directa e inversa de tensores φ_* y φ^* son inversas una de la otra.

2) $\varphi^*(df) = d(\varphi^* f)$; $\varphi_*(df) = d(\varphi_* f)$.

3) $\varphi^*(T + T') = \varphi^* T + \varphi^* T'$; $\varphi_*(T + T') = \varphi_* T + \varphi_* T'$

4) $\varphi^*(T\otimes T') = \varphi^* T \otimes \varphi^* T'$; $\varphi_*(T\otimes T') = \varphi_* T \otimes \varphi_* T'$

5) $\varphi^*(f\cdot T) = (\varphi^* f)\cdot \varphi^* T$; $\varphi_*(f\cdot T) = (\varphi_* f)\cdot \varphi_* T$.

6) $\varphi^*(C^{ij}T) = C^{ij}(\varphi^* T)$; $\varphi_*(C^{ij}T) = C^{ij}(\varphi_* T)$.

NOTA: Como la imagen directa de tensores por $\varphi: X \to Y$ es la imagen inversa de tensores por $\varphi^{-1}: Y \to X$, toda propiedad probada para una queda probada para la otra.

Proposición (Propiedades):

1) $(\varphi^* D)_x = \varphi^*(D_{\varphi(x)})$

2) $(\varphi_* \bar{D})_{\varphi(x)} = \varphi_*(\bar{D}_x)$

3) $\varphi^*\omega(\varphi^* D) = \varphi^*(\omega(D))$.

DERIVADA DE LIE

Sea $D \in \mathfrak{D}(X)$ y $\{\tau_t\}$ su grupo uniparamétrico local (i.e., D es el generador infinitesimal de $\{\tau_t\}$). Entonces ya vimos que D actúa como derivación: $Df = \lim_{t\to 0} \frac{\tau_t^* f - f}{t} \in C^\infty(X)$. Vamos a generalizar esta noción a tensores.

Definición: Sea $D \in \mathfrak{D}(X)$ y $\{\tau_t\}$ su grp. unip. local. Dado un campo tensorial $T \in T^{(p,q)}(X)$, se llama derivada de Lie de T respecto de D a

$$D^L T := \lim_{t\to 0} \frac{\tau_t^* T - T}{t}.$$

Teorema: Con las notaciones anteriores, $D^L T$ es un tensor sobre X del mismo tipo que T.

En particular $\tau^*_t T$ también es un tensor, y del mismo tipo.

Proposición (Propiedades):

1) $D^L f = Df$
2) $D^L(T+T') = D^L T + D^L T'$
3) $D^L(T \otimes T') = (D^L T) \otimes T' + T \otimes (D^L T')$.
4) $D^L(C^{ij} T) = C^{ij}(D^L T)$.

Definición: Sean $D_1, D_2 \in \mathcal{D}(X)$. Se llama corchete de Lie al campo $[D_1, D_2] \in \mathcal{D}(X)$

$$[D_1, D_2] := D_1 \circ D_2 - D_2 \circ D_1 .$$

- La composición arbitraria de derivaciones (campos tg) en general no es derivación, pero en este caso sí.
- CAUTION: $[D_1, D_2]_x \neq D_{1_x} \circ D_{2_x} - D_{2_x} \circ D_{1_x}$ ó $\neq (D_1 \circ D_2)_x - (D_2 \circ D_1)_x$ ... $\boxed{NO}$.

Proposición (Propiedades):

1) Anticonmutativo: $[D_1, D_2] = -[D_2, D_1]$
2) Lineal resp. suma: $[D_1 + D_2, D] = [D_1, D] + [D_2, D]$; $[D, D_1 + D_2] = [D, D_1] + [D, D_2]$.
3) (No lin. resp. func.): $[D, f\bar{D}] = (Df)\cdot\bar{D} + f\cdot[D, \bar{D}]$
4) Identidad de Jacobi: $[D_1, [D_2, D_3]] + [D_3, [D_1, D_2]] + [D_2, [D_3, D_1]] = 0$.

(Expresión en coordenadas): En unas ctas coordenadas,

$$[\Sigma f_i \partial_i, \Sigma g_j \partial_j] = \sum_{i,j} (f_j g_{i,j} - g_j f_{i,j}) \partial_i \quad , \text{ donde } h_{i,j} \overset{\text{not}}{=} \frac{\partial h_i}{\partial x_j}$$

Lema: Sea $(\mathbb{R}^n; x_1 \dots x_n)$. Si $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ se anula sobre el hiperplano $x_1 = 0 \implies \exists\, g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $f = x_1 \cdot g$ ("f está en el ideal (x_1)"). Como consecuencia, si se anula en $x_1 = 0$ y $x_2 = 0$, entonces $\exists\, h \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $f = x_1 x_2 h$.

***Teorema**: Para todos $D, \bar{D} \in \mathcal{D}(X)$ se tiene que la derivada de Lie coincide con el corchete de Lie:

$$\boxed{D^L \bar{D} = [D, \bar{D}]}$$

Corolario: Sean $D \in \mathcal{D}(X)$ y $\omega \in \Omega(X)$. Entonces la 1-forma $D^L \omega$ es:

$$\begin{aligned} D^L\omega : \mathcal{D}(X) &\longrightarrow C^\infty(X) \\ \bar{D} &\longmapsto \boxed{D^L\omega(\bar{D}) = D(\omega(\bar{D})) - \omega([D, \bar{D}])} \end{aligned}$$

Corolario: Sea $D \in \mathcal{D}(X)$ y $f \in C^\infty(X)$. Entonces la 1-forma $df \in \Omega(X) = \mathcal{T}^{(1,0)}(X)$ cumple:

$$\boxed{D^L df = d(Df)} \qquad (\text{ie, } \underline{D^L \circ d = d \circ D^L})$$

NOTA: Dado un abierto coordenado $(U; u_1 \dots u_n)$, el lema de Schwarz de las derivadas cruzadas se expresa vía el corchete de Lie como $[\partial_{u_i}, \partial_{u_j}] = 0 \quad \forall i,j = 1 \dots n$. Estas igualdades permiten determinar el corchete de Lie (y la derivada de Lie, por tanto) de dos campos a partir de su expresión en coordenadas.

DIFERENCIAL EXTERIOR

Definición: Sea X una vd, y $p \geq 1$. Llamaremos <u>p-forma</u> (ó <u>p-forma exterior</u>) sobre X a todo tensor covariante hemisimétrico de orden p sobre X, y el conjunto de ellas lo denotaremos como $\Omega^p(X)$.

- $\Omega^p(X)$ es un $C^\infty(X)$-submódulo de $\mathcal{T}^{(p,0)}(X)$.

Definición: Dada una p-forma $\omega_p \in \Omega^p(X)$, se llama <u>grado</u> de ω_p a p.

Proposición: Sea $\omega_p \in \Omega^p(X)$, $\omega_q \in \Omega^q(X)$. Entonces el <u>producto exterior</u> de ω_p y ω_q es la $(p+q)$-forma

$$\omega_p \wedge \omega_q : \mathfrak{D}(X)^{p+q} \longrightarrow C^\infty(X)$$

$$(D_1, \dots, D_{p+q}) \longmapsto (\omega_p \wedge \omega_q)(D_1 \dots D_{p+q}) = \frac{1}{p!\,q!} \sum_{\sigma \in S_{p+q}} \operatorname{sgn}(\sigma)\,(\omega_p \otimes \omega_q)(D_{\sigma(1)}, \dots D_{\sigma(p+q)})$$

- $f \wedge \omega_p = f \cdot \omega_p$, $\left(f \in C^\infty(X)\right)$.

Definición: Sea $\omega_p \in \Omega^p(X)$, $p \geq 1$, y $D \in \mathfrak{D}(X)$. Se llama <u>contracción interior</u> de ω_p por D a la $(p-1)$-forma

$$i_D\,\omega_p : \mathfrak{D}(X)^{p-1} \longrightarrow C^\infty(X)$$

$$(D_1 \dots D_{p-1}) \longmapsto i_D\,\omega_p(D_1 \dots D_{p-1}) := \omega_p(D, D_1, \dots, D_{p-1}).$$

Proposición (Propiedades):

1) "$\wedge$" es <u>anti-conmutativo</u>: $\omega_p \wedge \omega_q = (-1)^{pq} \cdot \omega_q \wedge \omega_p$, $\omega_p \in \Omega^p(X)$, $\omega_q \in \Omega^q(X)$.

2) "$\wedge$" es asociativo: $\omega_p \wedge (\omega_q \wedge \omega_r) = (\omega_p \wedge \omega_q) \wedge \omega_r$, ..

3) "$\wedge$" es distributivo respecto de la suma: $\omega_p \wedge (\omega_q + \overline{\omega}_q) = \omega_p \wedge \omega_q + \omega_p \wedge \overline{\omega}_q$.

Definición: Llamamos álgebra exterior de la variedad diferenciable X a

$$\Omega^\bullet(X) := \bigoplus_{p\geq 0} \Omega^p(X) \quad ,$$

que es una $C^\infty(X)$ – álgebra graduada anti-conmutativa, (que sea graduada es que sus elementos tienen grado – como los polinomios – y que al hacer el producto el grado es la suma), con el producto exterior.

• Sea $(U, x_1, \dots, x_n)$ un abierto coordenado. Entonces $\Omega^p(U)$ es un $C^\infty(U)$ – módulo libre, de rango $\binom{n}{p}$, y una base suya es $\{dx_{i_1}\wedge\dots\wedge dx_{i_p}\}_{1\leq i_1<\dots<i_p\leq n}$. Además, $\Omega^p(U)=0$ para $p>n$, y $\Omega^p(X)=0$ para $p>n$ (pues X puede recubrirse de abiertos coord.), y el álgebra exterior entonces es

$$\Omega^\bullet(X) = C^\infty(X)\oplus\Omega^1(X)\oplus\dots\oplus\Omega^n(X).$$

Definición: A los elementos de $\Omega^\bullet(X)$ los llamamos formas.

• Para cada $\omega\in\Omega^\bullet(X)$ $\exists!\ \omega_0\in\Omega^0(X), \dots, \omega_n\in\Omega^n(X)$: $\omega=\omega_0+\dots+\omega_n$.

Proposición: Fijado $D\in\mathcal{D}(X)$, $i_D : \underset{p\text{-forma}}{\Omega^\bullet(X)} \longrightarrow \underset{(p-1)\text{-forma}}{\Omega^\bullet(X)}$ es una aplicación homogénea de grado -1, y es una anti-derivación:

$$i_D(\omega_p\wedge\omega_q) = (i_D\omega_p)\wedge\omega_q + (-1)^p\,\omega_p\wedge(i_D\omega_q).$$

Proposición: El producto exterior conmuta con imágenes inversas: si $\varphi : X\to Y$, y $\omega, \bar\omega\in\Omega^\bullet(Y)$,

$$\varphi^*(\omega\wedge\bar\omega) = \varphi^*\omega\wedge\varphi^*\bar\omega.$$

Definición: Una **diferencial exterior** sobre una VD X es un operador **$\mathbb{R}$-lineal** (¡no $C^\infty(X)$!)

$$d : \Omega^{\bullet}(X) \longrightarrow \Omega^{\bullet}(X)$$

que cumple:

i) d es una aplicación homogénea de grado 1 : p-formas $\longmapsto$ $(p+1)$-formas.

ii) coincide con la diferencial ordinaria sobre $C^\infty(X)$.

iii) d es una anti-derivación:

$$d(\omega_p \wedge \omega_q) = d\omega_p \wedge \omega_q + (-1)^p \omega_p \wedge d\omega_q$$

iv) $d \circ d = 0$.

Lema: Sea $d : \Omega^{\bullet}(X) \longrightarrow \Omega^{\bullet}(X)$ una diferencial exterior sobre una VD X. Dadas $f, g_1 \dots g_n \in C^\infty(X)$ se cumple:

1) $d(dg_1 \wedge \dots \wedge dg_p) = 0$.

2) $d(f \cdot dg_1 \wedge \dots dg_p) = df \wedge dg_1 \wedge \dots \wedge dg_p$.

***Teorema**: Sobre toda variedad diferenciable X existe una única diferencial exterior.

En particular, en cada abierto coordenado $(U, u_1 \dots u_n)$, donde tenemos la base $\{du_{i_1} \wedge \dots du_{i_p}\}_{1 \le i_1 < \dots < i_p \le n}$, cada p-forma $\omega_p \in \Omega^p(X)$ se expresa como $\omega_p = \sum_\alpha f_\alpha \cdot du_{i_1} \wedge \dots \wedge du_{i_p}$, $\alpha = (i_1, \dots, i_p)$.

Entonces la diferencial de la p-forma ω_p es

$$\boxed{d\omega_p := \sum_\alpha df_\alpha \wedge du_{i_1} \wedge \dots \wedge du_{i_p}}$$

Proposición (Cartan): Sea $D \in \mathcal{D}(X)$. Entonces los operadores D^L y $d \circ i_D + i_D \circ d$, definidos sobre el álgebra exterior $\Omega^\circ(X)$, son derivaciones, y coinciden:

$$\boxed{D^L = d \circ i_D + i_D \circ d}$$

Corolario: Para cada $D \in \mathcal{D}(X)$ se cumple:

$$\boxed{D^L \circ d = d \circ D^L}$$

Corolario (Fórmula de Cartan para las 1-formas): Dada $\omega \in \Omega(X)$, la 2-forma $d\omega \in \Omega^2(X)$ es:

$$\begin{aligned} d\omega : \mathcal{D}(X) \times \mathcal{D}(X) &\longrightarrow C^\infty(X) \\ (D_1, D_2) &\longmapsto \boxed{d\omega(D_1, D_2) = D(\omega(\bar{D})) - \bar{D}(\omega(D)) - \omega([D, \bar{D}])} \end{aligned}$$

Definición: Sea $\omega \in \Omega^p(X)$. Se dice que ω es cerrada si $d\omega = 0$. Para $p \geq 1$, se dice que ω es exacta si ω es la diferencial de alguna $(p-1)$-forma, i.e., si $\exists\, \bar{\omega} \in \Omega^{p-1}(X)$: $\omega = d\bar{\omega}$.

- ω exacta $\Rightarrow$ ω cerrada.

Lema (Poincaré): Sea $\omega \in \Omega^p(\mathbb{R}^n)$, $p \geq 1$. Entonces ω cerrada $\Leftrightarrow$ ω exacta.

Corolario: Sea $p > 0$. Toda p-forma cerrada sobre X es localmente exacta: si ω es cerrada, para cada $x \in X$ $\exists$ un entorno abierto U y una $(p-1)$-forma $\bar{\omega} \in \Omega^{p-1}(U)$: $\omega_{|U} = d\bar{\omega}$.

- Antes dijimos que $[\partial_{u_i}, \partial_{u_j}] = 0$. La proposición siguiente dice que esta propiedad caracteriza a las bases de campos tangentes que localmente son bases de parciales.

Proposición: Sea $\{D_1, \dots, D_n\}$ una base de $\mathcal{D}(X)$. Si $[D_i, D_j] = 0 \ \forall i,j$, entonces para cada punto $x \in X$ existe un atlas coordenado $(U; u_1, \dots, u_n)$, entorno de x, tal que $D_i = \partial_{u_i}$ en U.

Definición: Sea $\varphi : X \longrightarrow Y$ un difeomorfismo entre variedades riemannianas, (X, g) y $(Y, \bar{g})$.

i) Se dice que φ es una isometría cuando $\forall x \in X$ $\varphi_* : (T_x X, g_x) \longrightarrow (T_{\varphi(x)} Y, \bar{g}_{\varphi(x)})$ sea isometría entre los EV euclídeos.

ii) Se dice que φ es una aplicación conforme cuando conserve ángulos: $\forall x \in X$, se cumple que

$$\measuredangle D_1, D_2 = \measuredangle \varphi_*(D_1), \varphi_*(D_2) \quad , \text{ con } D_1, D_2 \in T_x X.$$

Proposición: En las notaciones anteriores:

1) φ es isometría $\iff$ $\varphi^* \bar{g} = g$

2) φ es conforme $\iff$ $\varphi^* \bar{g}$ y g son proporcionales.

- Sea $g = dx_1^2 + \dots + dx_n^2$ la métrica estándar de $\mathbb{R}^n$; y consideremos la polaridad de g, que es isomorfismo.

$$\phi : \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \Omega(\mathbb{R}^n)$$
$$D \longmapsto \phi(D) := i_D g = g(D, \cdot).$$

Definición: Dada $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, se llama gradiente de f al único campo tangente $\operatorname{grad} f$ que se corresponde por el isomorfismo anterior con la 1-forma df, i.e., $\phi(\operatorname{grad} f) = df$, i.e., $g(\operatorname{grad} f, \cdot) = df$, i.e., $D(f) = (\operatorname{grad} f) \cdot D \quad \forall D \in \mathcal{D}(X)$.

Proposición: Sea $\mathbb{R}^3$ con su métrica estándar y consideremos la 3-forma $\omega = dx \wedge dy \wedge dz$. Entonces tenemos el siguiente isomorfismo de $C^\infty(X)$-módulos:

$$\mathcal{D}(\mathbb{R}^3) \longrightarrow \Omega^2(\mathbb{R}^3)$$
$$D \longmapsto i_D \omega_s$$

Es decir, toda 2-forma es la contracción interior por la forma de volumen $dx \wedge dy \wedge dz$.

Definición. Llamaremos rotacional de un campo $D \in \mathcal{D}(X)$ como el único campo $\text{rot}\, D$ que se corresponde por dicho isomorfismo con la 2-forma $d(i_D g)$, i.e., $i_{\text{rot}\, D}\, \omega_s = d(i_D g)$.

Proposición: $\text{rot}\, D = 0 \iff D$ es un gradiente. en $\mathbb{R}^3$.

- $D^L T(D_1 \dots D_p, \omega_1 \dots \omega_q) = D(T(D_1 \dots \omega_q)) - \sum_{i=1}^{p} T(D_1, \dots, D^L_i D_i, \dots D_p, \dots, \omega_1 \dots \omega_q) -$

$$- \sum_{i=1}^{q} T(D_1 \dots D_p, \omega_1 \dots, D^L \omega_i, \dots, \omega_q).$$

XII : INTEGRACIÓN EN VARIEDADES

• Sea X una VD de dim n.

Definición. Una variedad diferenciable X se dice orientable si existe una n-forma que no se anula en ningún pto, ie, si existe $\omega = \{\omega_x\}_{x\in X}$ tal que $\omega_x \neq 0 \ \forall x\in X$.

Proposición: Sea $\omega \in \Omega^n(X)$.

$$\omega_x \neq 0 \ \forall x \in X \iff \omega \text{ es base de } n\text{-formas.}$$

Corolario. X es orientable $\iff \Omega^n(X)$ es un $C^\infty(X)$-módulo libre (de rango 1).

• Sea X una variedad orientable, y sea $W(X) = \{n\text{-formas que no se anulan en ningún pto}\}\ (\neq \emptyset)$.
Estas inducen una rel de eq: dadas $\omega, \overline{\omega} \in W(X)$,

$$\omega \equiv \overline{\omega} \iff \omega = f\cdot\overline{\omega} \quad \text{con } f\in C^\infty(X) \text{ y } f(x)>0 \ \forall x\in X.$$

Definición: Llamamos orientaciones de X a las clases de equivalencia de $W(X)/\equiv$. Si $\omega\in W(X)$, su clase de eq. la denotaremos como $[\omega]$, y diremos que $[-\omega]$ es la orientación opuesta a la de $[\omega]$ (pues es claro que pertenecen a clases de eq. distintas).

Definición: Llamaremos variedad orientada al par $(X,[\omega])$, donde $[\omega]$ es una orientación de X fijada.

Es claro que si X es orientable todo abierto U lo es también: basta considerar $[\omega|_U]$. ¿Si X es loc. orientable X es orientable? NO. En realidad toda VD es loc. orientable, pues para cada pto hay un entorno coordenado y estos sí son orientables: en $(U; u_1,\dots,u_n)$ basta considerar la base de n-formas $du_1\wedge\dots\wedge du_n$.

Definición. Sea X una VD, y consideremos $\{U_i\}_{i\in I}$ un recubrimiento por abtos de X. Llamaremos partición de la unidad subordinada al recubrimiento $\{U_i\}_{i\in I}$ a toda familia $\{\phi_i\}_{i\in I} \subseteq C^\infty(X)$ tal que

i) $\phi_i \geq 0$, $\text{sop}\, \phi_i \subseteq U_i$ $\forall i \in I$

ii) $\{\text{sop}\, \phi_i\}_{i\in I}$ es localmente finita: todo pto de X posee un entorno que corta a un nº finito de cerrados de la familia.

iii) $\sum_{i\in I} \phi_i \equiv 1$ (la suma siempre es finita por ii)

Teorema: Todo recubrimiento por abiertos $\{U_i\}_{i\in I}$ de una VD tiene una partición de la unidad subordinada a él.

• Con esto, respondemos a la pregunta de antes:

Teorema. Sea $\{(U_i,[\omega_i])\}_{i\in I}$ un recubrimiento de X por abtos orientados ("X loc. orientable"). Si en las intersecciones las orientaciones coinciden, entonces existe una única orientación $[\omega]$ sobre X que induce sobre cada U_i la orientación $[\omega_i]$.

Lema. Sea X una VD orientable. X es conexa $\Longleftrightarrow$ X posee exactamente 2 orientaciones.

Definición. Sea $(X,[\omega])$ una variedad orientada. Una base de $\mathcal{D}(U)$ $\{D_1,\dots,D_n\}$ sobre un abto U se dice que está orientada positivamente (o que es positiva) si $\omega(D_1,\dots,D_n)>0$ en U, y se dice que está orientada negativamente (o que es negativa) si $\omega(D_1,\dots,D_n)<0$ en U.

Lema: Sea $\{D_1\dots D_n\}$ una base de $\mathcal{D}(U)$. Si U es conexo, entonces $\{D_1\dots D_n\}$ es bien positiva o bien negativa.

• En general, una base no tiene porqué ser de alguno de los dos tipos.

Proposición: Supongamos que existe una base global $\{D_1, \dots D_n\}$ de $\mathcal{D}(X)$. Entonces

1) X es orientable (ie, $\mathcal{D}(X)$ libre $\Rightarrow \Omega^n(X)$ libre)

2) Existe una única orientación para la cual $\{D_1, \dots D_n\}$ es positiva

3) $\omega \in \Omega^n(X)$ define dicha orientación $\Longleftrightarrow \omega(D_1, \dots, D_n) > 0$ en X.

VARIEDADES CON BORDE

Definición: Sea X una VD de dim n. Una variedad con borde en X es un cerrado $\Omega \subseteq X$ (ojo!, Ω no tiene por qué ser variedad!) que cumple

i) $\partial\Omega = \partial\mathring{\Omega}$

ii) $\partial\Omega$ bien es una SVD de dim $n-1$ bien es $\emptyset$.

A la frontera de Ω $\partial\Omega$ se le llama borde de Ω.

- $X = \mathbb{R}^n$; $\Omega \equiv x_1 \leq 0$; $\partial\Omega \equiv x_1 = 0$
- $X = \mathbb{R}^2$; $\Omega \equiv$ disco unidad ; $\partial\Omega \equiv$ esfera unidad.

Proposición: Sea Ω una variedad con borde en X, y $p \in \partial\Omega$. Entonces existe un abierto coordenado $(U; u_1, \dots u_n)$ entorno de p en X tal que $\Omega \cap U = \{x \in U : u_1(x) \leq 0\}$. Es decir, en los pts del borde, Ω es localmente un semiespacio de $\mathbb{R}^n$.

- Sea Ω una variedad con borde, $p \in \partial\Omega$ y $D_p \in T_pX$; y consideremos el abierto coordenado de la proposición anterior tal que $\Omega \cap U = \{x \in U : u_1(x) \leq 0\}$. En dicho abierto consideremos la base de T_pX $\{(\partial_{u_1})_p, \dots (\partial_{u_n})_p\}$, así que D_p se escribe como $D_p = \lambda_1 (\partial_{u_1})_p + \dots + \lambda_n (\partial_{u_n})_p$.

Definición: Se dice que D_p apunta hacia fuera si $\lambda_1 > 0$, y que apunta hacia dentro si $\lambda_1 < 0$

• La definición anterior no depende de las coordenadas elegidas. En efecto,

Proposición: Con las notaciones anteriores,

$$D_p \text{ apunta hacia fuera de } \Omega \iff \begin{cases} 1)\ D_p \notin T_p\partial\Omega \\ 2)\ \forall \sigma: I \to X : \sigma(0)=p \text{ y } \sigma_*((\partial_t)_0) = D_p \\ \quad \exists \epsilon>0 : \sigma((-\epsilon,0)) \subseteq \Omega \text{ y } \sigma((0,\epsilon)) \subseteq \Omega^c. \end{cases}$$

Lema: Dada una variedad con borde Ω, existen localmente campos tangentes que en los puntos de $\partial\Omega$ apunten hacia afuera de Ω.

Teorema (Orientación inducida en el borde): Sea $(X,[\omega])$ una variedad orientada y sea Ω una variedad con borde en X con $\partial\Omega$ una SVD de dim $n-1$ $(\partial\Omega \neq \emptyset)$. Entonces la orientación de X induce de modo natural una orientación sobre $\partial\Omega$: dado $D \in \mathcal{D}(X)$ que en los puntos de $\partial\Omega$ apunte hacia afuera, sobre $\partial\Omega$ la orientación es

$$\left[(i_D\,\omega)_{|\partial\Omega} \right]$$

En coordenadas tenemos: si la orientación de X es $[du_1 \wedge \dots \wedge du_n]$ y la variedad con borde es $\{u_1 \leq c\}$, entonces la orientación inducida en el borde es $[du_2 \wedge \dots \wedge du_n]$.

INTEGRALES DE FORMAS

• Si $f: \overline{U} \to \mathbb{R}$ es Lebesgue-integrable, si $\mathrm{Sop}\, f = \overline{\{x \in U : f(x) \neq 0\}} \subseteq V$, entonces es claro que

$$\int_V f\, dm_n = \int_U f\, dm_n.$$

Además, si f cont. y $\mathrm{Sop}(f)$ es compacto $\Rightarrow f$ integrable.

• Sea $(U; u_1, \dots u_n)$ un abierto coordenado en X, tenemos $U \xrightarrow{\varphi=(u_1,\dots u_n)} \overline{U} \subseteq \mathbb{R}^n$. Entonces, la medida de Lebesgue de $\mathbb{R}^n$ nos la podemos llevar a $U \subseteq X$ por dicho difeomorfismo, con el Th de la medida imagen: si μ es la medida en U, entonces $\mu(V) = m(\varphi(V))$.

• Si $f \in C^\infty(U)$, entonces, si es integrable resp. μ (si $Sop(f)$ es compacto, p.ej.), entonces tenemos $\int_U f \, d\mu \overset{NOT}{=} \int_U f \, du_1 \dots du_n$, y si $Sop f \subseteq V \subseteq U$, $\int_V f \, du_1 \dots du_n = \int_U f \, du_1 \dots du_n$.

• En particular, dada dada $f \in C^\infty(U)$ $\exists! \, F \in C^\infty(\bar{U})$: $f = F \circ \varphi = \varphi^* F$, y entonces

$$\int_U f(u_1 \dots u_n) \, du_1 \dots du_n = \int_{\bar{U}} F(x_1 \dots x_n) \, dx_1 \dots dx_n .$$

• Si $\omega \in \Omega^n(X)$ (con X variedad orientada de dim n), ¿cómo definir $\int_X \omega$? (con sop ω compacto)

– sop ω $\subseteq (U; u_1 \dots u_n)$ abierto coordenado: Podemos suponer que en dicho abierto la n-forma $du_1 \wedge \dots \wedge du_n$ define la orientación en U inducida por X. Así que $\omega = f \cdot du_1 \wedge \dots \wedge du_n$ $(f = \omega(\partial_{u_1}, \dots, \partial_{u_n}))$, y además sop ω = sop f. Luego definimos

$$\boxed{\int_X \omega := \int_U f(u_1 \dots u_n) \, du_1 \dots du_n .}$$

Proposición. La anterior definición no depende del abierto coordenado que contenga al soporte.

– CASO GENERAL: Se considera $\{U_i\}$ un recubrimiento de X por abiertos coordenados, y $\{f_i\}_{i \in I} \subseteq C^\infty(X)$ una partición de la unidad subordinada. Se cumple que sop ω corta a un número finito de cerrados $\{sop f_i\}_{i \in I}$, pongamos a un subconjunto $J = \{1, \dots, r\} \subseteq I$. Entonces $\omega = \sum_{i=1}^r f_i \omega$, y cada uno de ellos está en el caso anterior. Total:

$$\boxed{\int_X \omega = \int_X f_1 \cdot \omega + \dots + \int_X f_n \omega}$$

Proposición: La definición dada no depende del recubrimiento ó partición de la unidad.

Proposic: $\omega, \bar{\omega}$ n-formas son sop compto, $\lambda, \bar{\lambda} \in \mathbb{R}$, $\int_X (\lambda\omega + \bar{\lambda}\bar{\omega}) = \lambda\int_X \omega + \bar{\lambda}\int_X \bar{\omega}$.

Definición: Sean X, Y variedades orientadas, y $\varphi : X \longrightarrow Y$ un difeomorfismo. Si ω_n es una n-forma sobre Y que define su orientación, se dice que φ conserva la orientación si $\varphi^*\omega_n$ define la orientación de X.

Proposición: La integral de n-formas se conserva por imágenes inversas de difeomorfismos que conservan la orientación: Con precisión, si $\varphi : X \to Y$ conserva la orientación, para toda n-forma sobre Y ω_n con sop ω_n compto se cumple

$$\int_Y \omega_n = \int_X \varphi^*\omega_n .$$

• Sea Ω una variedad con borde, y $\omega \in \Omega^n(X)$. La n-forma $I_\Omega \cdot \omega$, donde I_Ω es la función característica de Ω, ω es dif en $\partial\Omega$, pero al ser un conjunto de medida nula, podemos dar su integral.

Definición: En las hipótesis anteriores, si $\text{sop}(I_\Omega \cdot \omega) = \text{sop}(\omega) \cap \Omega$ es compacto, se llama integral de ω sobre Ω a

$$\boxed{\int_\Omega \omega := \int_X I_\Omega \omega}$$

Proposición: Si $\varphi : X \to Y$ es un difeomorfismo entre variedades orientadas que conserva la orientación, dada una n-forma $\omega \in \Omega^n(Y)$ y $\Omega \subseteq Y$ variedad con borde, si $\text{sop}(\omega) \cap \Omega$ es compacto, se cumple

$$\int_\Omega \omega = \int_{\varphi^{-1}(\Omega)} \varphi^*\omega .$$

TEOREMA DE STOKES

• Sea X una variedad orientada de dim n y Ω una variedad con borde en X.

Lema. Si $\omega \in \Omega^{n-1}(X) \Rightarrow d\omega \in \Omega^n(X)$ cumple $sop(d\omega) \subseteq sop(\omega)$.

• Si para $\omega \in \Omega^{n-1}(X)$ se cumple que $sop(\omega) \cap \Omega$ es compacto, entonces $sop(d\omega) \cap \Omega \overset{\text{Lema}}{\subseteq}$ $\subseteq sop(\omega) \cap \Omega$ es un cerrado en un compacto $\xrightarrow{\text{Topología}}$ compacto luego $\exists \int_\Omega d\omega$. Para $\partial\Omega \neq \emptyset$, $\omega_{|\partial\Omega} \in \Omega^{n-1}(\partial\Omega)$ que cumple que $sop(\omega_{|\partial\Omega}) \subseteq sop(\omega) \cap \Omega$ es compacto (por lo mismo que antes), luego $\exists \int_{\partial\Omega} \omega_{|\partial\Omega} \overset{NOT}{=} \int_{\partial\Omega} \omega$. Entonces estamos en disposición de enunciar el siguiente

Teorema (Stokes): Sea X una VD orientada de dim n, y Ω una variedad con borde en X. Si $\omega \in \Omega^{n-1}(X)$ que cumple que $sop(\omega) \cap \Omega$ es compacto, entonces se cumple

$$\boxed{\int_\Omega d\omega = \int_{\partial\Omega} \omega}$$

donde $\int_{\partial\Omega} \omega = \int_{\partial\Omega} \omega_{|\partial\Omega}$. Cuando $\partial\Omega = \emptyset$, la igualdad se entiende como $\int_\Omega d\omega = 0$.

FORMA DE VOLUMEN

Lema: En toda variedad riemanniana existen localmente bases ortonormales positivas de campos tangentes. Con precisión: todo punto tiene un entorno abierto U en el que existe una base de $\mathfrak{X}(U)$ $\{D_1 \dots D_n\}$ ortonormal.

Lema. Sea U un abierto coordenado conexo de una variedad riemanniana orientada (X, g), y sea $n = \dim X$. Entonces existe una única n-forma $\omega_U \in \Omega^n(U)$ que cumple que para toda base ortonormal positiva $\{D_1 \dots D_n\}$ de $\mathfrak{X}(U)$ cumple $\omega_U(D_1 \dots D_n) = 1$.

Teorema: Sobre una variedad riemanniana orientada (X, g) de dim n existe una única n-forma ω_X que toma valor igual a 1 sobre las bases ortonormales positivas de campos tangentes (en abiertos coordenados).

A dicha $\omega_X \in \Omega^n(X)$ se le llama forma de volumen de (X, g).

Proposición: Sea $(U; u_1 .. u_n)$ un abierto coordenado de X ; $du_1 \wedge ... \wedge du_n$ define la orientación sobre U; y sea $g = (g_{ij})$ en esas coordenadas (i.e., $g = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}\, du_i \otimes du_j$). Entonces las coordenadas de ω_X son

$$\boxed{\omega_X = \sqrt{\det(g_{ij})} \cdot du_1 \wedge \cdots \wedge du_n}$$

Definición: Sea Ω una variedad con borde en la variedad riemanniana X, y ω_X su forma de volumen. Si Ω es compacto, se llama volumen de Ω a

$$Vol(\Omega) := \int_\Omega \omega_X .$$

(longitud en dim 1, area en dim 2, ...), y se define la integral de $f \in C^\infty(X)$ sobre Ω como

$$\int_\Omega f := \int_\Omega f \cdot \omega_X$$

Definición: Sean X, Y variedades riemannianas orientadas, y ω_X, ω_Y sus formas de volumen. Se dice que un difeomorfismo $f: X \to Y$ conserva volúmenes si para cualquier variedad con borde compacta se tiene

$$Vol(\Omega) = \int_\Omega \omega_X = \int_{f(\Omega)} \omega_Y = Vol(f(\Omega)).$$

Proposición: Sea $f: X \to Y$ un difeomorfismo que conserva la orientación. Entonces

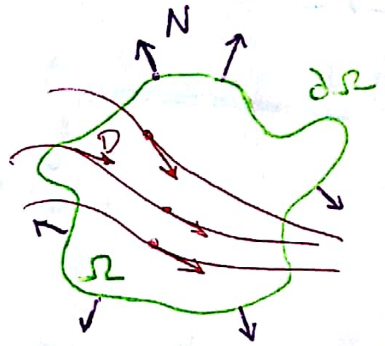
$$f \text{ conserva volúmenes} \iff f^* \omega_Y = \omega_X$$

TEOREMA DE LA DIVERGENCIA

Definición: Sea X una variedad orientada, y ω_X su forma de volumen. Dado $D \in \mathfrak{D}(X)$, se llama **divergencia de D** a la coordenada de la n-forma $D^L \omega_X$ en la base $\{\omega_X\}$ de $\Omega^n(X)$; $\operatorname{div} D$ es la única función de $C^\infty(X)$ tal que $D^L \omega_X = (\operatorname{div} D) \cdot \omega_X$.

- En $\mathbb{R}^n$, $\omega_{\mathbb{R}^n} = dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$, dado $D = \sum f_i \partial x_i = (f_1 \dots f_n)$, tenemos que

$$\boxed{\operatorname{div} D = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}}$$



- Sea Ω una variedad con borde compacta, y sea N el campo normal unitario a $\partial\Omega$ que apunte hacia afuera. Con la orientación que se induce en $\partial\Omega$, ésta es una variedad riemanniana orientada de dim $n-1$, y tiene la forma de volumen $\omega_{\partial\Omega}$.

Definición. Dado un campo tangente $D \in \mathfrak{D}(X)$, se llama **flujo de D a través de $\partial\Omega$** a la integral $\int_{\partial\Omega} D \cdot N = \int_{\partial\Omega} g(D,N) \left(= \int_{\partial\Omega} (D\cdot N)\, \omega_{\partial\Omega} \right) = \int_{\partial\Omega} i_D \omega_X$

- Si tenemos un fluido cuyas partículas describen las trayectorias de D (curvas integrales máximas), la integral anterior representa la cantidad de fluido que atraviesa.

Teorema (de la divergencia): Sea X una VD orientada, Ω una variedad con borde compacta y N el campo normal unitario a $\partial\Omega$ que apunte hacia fuera. Entonces se cumple

$$\boxed{\int_{\partial\Omega} D \cdot N = \int_{\Omega} \operatorname{div} D}$$