I: CONCEPTO DE CURVA

- Una <u>curva</u> es un subconjunto $C \subset \mathbb{R}^n$ parametrizable con un solo parámetro, mediante una aplicación $\sigma : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $t \longmapsto \sigma(t)$, tal que $C = \operatorname{Im} \sigma$.

- I denotaré un intervalo abierto.

<u>Definición</u>: Una <u>parametrización regular</u> es una aplicación $\sigma : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tal que

i) $\sigma \in C^1(I)$

ii) $\sigma'(t) \neq 0 \quad \forall t \in I$.

- Esto último dice que en todo punto hay vector tangente, i.e., no hay picos o cambios de sentido.

<u>Proposición</u>: Toda parametrización regular es localmente inyectiva.

<u>Definición</u>: Un <u>cambio admisible de parámetro</u> es una función $\theta : I \longrightarrow \mathbb{R}$ que cumple

i) $\theta \in C^1(I)$

ii) $\theta'(t) \neq 0 \quad \forall t \in I$.

<u>Proposición</u>: Todo cambio admisible de parámetro $\theta : I \longrightarrow \mathbb{R}$ establece un difeomorfismo con $\operatorname{Im} \theta$, y por tanto θ^{-1} también es un c.a.p.

- $$\begin{tikzcd} \bar{I} \arrow[r, "t"] \arrow[rr, bend left, "\bar{\sigma}"] & I \arrow[r, "\sigma"] & \mathbb{R}^n \end{tikzcd}$$
$$s \longmapsto t(s) = t \longmapsto \sigma(t) = \bar{\sigma}(s)$$
; $\bar{\sigma}(s) = (\sigma \circ t)(s) = \sigma(t(s)) = \sigma(t)$

- Si σ es regular $\Rightarrow$ $\bar{\sigma}$ es regular.

• Sea $\mathcal{P} = \{$ parametrizaciones regulares de subconjuntos $C \subset \mathbb{R}^n$ parametrizables con un solo parámetro $\}$.

Definición: Dos parametrizaciones $\sigma, \gamma \in \mathcal{P}$ se dicen equivalentes si $\exists\, \theta : I \to \bar{I}$ ... tal que $\sigma = \gamma \circ \theta$, ie,

$$\begin{tikzcd} I \arrow[rr, "\theta"] \arrow[dr, "\sigma"'] & & \bar{I} \arrow[dl, "\gamma"] \\ & \mathbb{R}^n & \end{tikzcd}$$

Definición: Una curva (regular) es una clase de equivalencia de $\mathcal{P}/\sim$.

• Sea $\sigma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ un arco de curva. Consideremos una partición del intervalo $[a,b]$, $\{a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b\}$, que define una poligonal $P = \{\sigma(t_0), \dots, \sigma(t_m)\}$, cuya longitud es $\operatorname{long}(P) = \sum_{i=1}^{m} \|\sigma(t_i) - \sigma(t_{i-1})\|$.

Definición: Se dice que un arco $[a,b] \xrightarrow{\sigma} \mathbb{R}$ es rectificable si $\exists \sup \{\log(P)\}_{P \text{ poligonal}}$, en cuyo caso llamamos longitud del arco a $\operatorname{long} \sigma = \sup \{\operatorname{long}(P)\}$.

Teorema: Toda curva de clase C^1 (no nec. regular) es rectificable.

Teorema (Longitud del arco de curva): Sea $\sigma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ una curva de clase C^1.
La longitud del arco es:

$$\boxed{\operatorname{long} \sigma = \int_a^b \|\sigma'(t)\|\, dt}$$

Proposición: La longitud del arco de una curva no depende de la parametrización elegida.

Definición: Se dice que una curva regular $\sigma : I \to \mathbb{R}^n$, $\sigma(t) = \sigma$, está parametrizada por su longitud de arco, o que es una parametrización natural, si $\|\sigma'(t)\| = 1$ $\forall t$.

- Si $\sigma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ es una param. natural, entonces $\operatorname{long} \sigma = \int_a^b \|\sigma'\| = b - a$.

Lema: Sean $\sigma = \sigma(t)$ y $\bar{\sigma} = \bar{\sigma}(s)$ dos parametrizaciones naturales de una misma curva C. Entonces $\exists \lambda \in \mathbb{R} : t = \pm s + \lambda$.

- El signo $\pm$ indica el sentido de recorrido cuando t crece.

Teorema: Toda curva regular admite parametrizaciones naturales. En particular, un c.a.p. para obtener dicha parament. es $s = \int_{t_0}^{t} \|\sigma'(u)\| \, du$, $t_0 \in I$.

II CURVATURA Y TORSIÓN

Definición: Sea $\sigma : I \to \mathbb{R}^3$ una curva parametrizada por su longitud de arco. Llamamos vector tangente unitario en el punto $\sigma(t)$ como $T_t := \sigma'(t)$.

- Notar que $\| T_t \| = 1$. Además, T_t indica la dirección de la recta tg a la curva en dicho pto.

Definición: Se llama recta tangente a la curva en un pto $\sigma(t_0)$ a la recta que pasa por el punto $\sigma(t_0)$ con dirección T_{t_0}, ie,

$$r \equiv \sigma(t_0) + \langle T_{t_0} \rangle .$$

y llamamos plano normal a la curva en el pto $\sigma(t_0)$ con el plano que pasa por $\sigma(t_0)$ y tiene la dirección normal de T_{t_0}, ie,

$$\Big(X - \sigma(t_0) \Big) \cdot T_{t_0} = 0 .$$

Definición: Sea $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ paramet. por su long. de arco. Llamamos curvatura de σ a $\kappa := \| T_t' \| = \| \sigma''(t) \|$.

- Una curva es una recta $\iff \kappa \equiv 0$.
- Una circunferencia de radio R tiene curvatura cte $\kappa = \frac{1}{R}$.

Definición: Se llama vector normal principal a la curva en el pto $\sigma(t)$, en los ptos tales que $k(t) \neq 0$, a $N_t := \dfrac{T_t'}{\|T_t'\|} = \dfrac{T_t'}{k}$.

- $N_t \perp T_t$.

Definición: Llamaremos vector binormal al único vector B_t tal que $\{T_t, N_t, B_t\}$ es una base ortonormal positiva, ie, $B_t := T_t \times N_t$

Definición: En los ptos con $k \neq 0$, se llama triedro de Frenet a la base $\{T, N, B\}$.

Definición: Sea $\sigma = \sigma(t)$ una curva parametrizada por su long. de arco. Llamaremos torsión de la curva a $\tau := N' \cdot B$.

Proposición: Sean $\sigma = \sigma(t)$ y $\bar{\sigma} = \bar{\sigma}(s)$ dos parametrizaciones naturales de la misma curva de $\mathbb{R}^3$. Entonces ambas tienen la misma curvatura y torsión, y $\bar{T}_t = \pm T_t$, $\bar{B}_t = \pm B_t$ y $\bar{N}_t = N_t$ (ie, el triedro de Frenet está determinado salvo el sentido de recorrido de la curva).

Teorema: Sea $\sigma = \sigma(t)$ una curva no necesariamente parametrizada por la lg. de arco.

Ents

$$\boxed{T = \frac{\sigma'}{\|\sigma'\|}}, \quad \boxed{B = \frac{\sigma' \times \sigma''}{\|\sigma' \times \sigma''\|}}, \quad \boxed{N = B \times T}$$

$$\boxed{k = \frac{\|\sigma' \times \sigma''\|}{\|\sigma'\|^3}}, \quad \boxed{\tau = \frac{[\sigma', \sigma'', \sigma''']}{\|\sigma' \times \sigma''\|^2}}$$

Definición: Sea $\sigma = \sigma(t)$ una curva regular, y $t_0 \in I$ tal que $k(t_0) \neq 0$. Se llama plano osculador a la curva en el pto $\sigma(t_0)$ al plano límite cuando $t_1, t_2 \to t_0$ del plano que pasa por $\sigma(t_0), \sigma(t_1), \sigma(t_2)$.

Proposición: La ecuación del plano osculador es

$$\left(X - \sigma(t_0)\right) \cdot B_{t_0} = 0$$

es decir, $\sigma(t_0) + \langle T_{t_0}, N_{t_0} \rangle$.

- El plano osculador es el plano que mejor "besa" a la curva en t_0, i.e, el que más toca a la curva en $\sigma(t_0)$.

Definición: Si $\kappa(t_0) \neq 0$, se definen en el punto $\sigma(t_0)$

i) recta tangente: $\sigma(t_0) + \langle T_{t_0} \rangle$

ii) recta normal principal: $\sigma(t_0) + \langle N_{t_0} \rangle$

iii) recta binormal: $\sigma(t_0) + \langle B_{t_0} \rangle$

iv) plano normal: $\sigma(t_0) + \langle N_{t_0}, B_{t_0} \rangle$

v) plano rectificante: $\sigma(t_0) + \langle T_{t_0}, B_{t_0} \rangle$

vi) plano osculador: $\sigma(t_0) + \langle T_{t_0}, N_{t_0} \rangle$

Definición: Si $\kappa(t) \neq 0$, se denomina circunferencia osculatriz a la circunferencia límite que definen los puntos t_0, t_1, t_2 cuando $t_1, t_2 \to t_0$.

Proposición: La circunferencia osculatriz tiene en t_0 como centro y radio

$$\boxed{C = \sigma(t_0) + \frac{1}{\kappa(t_0)} \cdot N_{t_0}} \qquad \boxed{R = \frac{1}{\kappa(t_0)}}$$

centro de curvatura — radio de curvatura

- Interpretación geométrica de la curvatura: el inverso del radio de la circunferencia osculatriz. Otra: indica cómo varía la dirección de la recta tg a lo largo de la curva.

Lema: Sea σ una curva parametrizada por su longitud de arco. Entonces, donde $\kappa \neq 0$ se cumple

$$B' = -\tau \cdot N$$

luego $$|\tau| = \|B'\|.$$

Corolario: Sea σ con $\kappa \neq 0$ en todo pto.

$$\sigma \text{ plana} \iff \tau \equiv 0$$

- El lema dice que el valor absoluto de la torsión indica cuánto varía la dirección del vector binormal, i.e., del plano osculador.

Definición: Dada $\sigma \in C^2(I)$, se llama <u>indicatriz esférica tangente</u> a la curva $\sigma_T(t) := T_t$. Análogamente, donde esté definido, tenemos la <u>indicatriz esférica normal</u> a $\sigma_N(t) := N_t$ y indicatriz esférica binormal a $\sigma_B(t) := B_t$.

- σ_T regular $\iff \kappa \neq 0$. $\Rightarrow$ Están def σ_B y σ_N.
- Las tres curvas están sobre la esfera unidad.

III : TEORÍA DE CURVAS

Teorema (Fórmulas de Frenet) : Sea $\sigma \in C^3(I)$ param. naturalizada. Donde $k \neq 0$ se cumple

$$\left.\begin{aligned} T' &= \;\; kN \\ N' &= -kT \qquad\;\; + \tau B \\ B' &= \qquad\; -\tau N \end{aligned}\right\}$$

o en términos matriciales

$$\begin{pmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k & 0 \\ -k & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix}$$

Teorema (Fundamental de las curvas) : Sea I un intervalo abierto de $\mathbb{R}$, y supongamos que $0 \in I$. Fijemos $p \in \mathbb{R}^3$ y una base ortonormal positiva $\{u_1, u_2, u_3\}$. Dadas funciones diferenciables $k, \tau : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $k > 0$, $\exists!\ \sigma : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ parametrizada por su longitud de arco tal que

1) k es la curvatura de σ y τ su torsión

2) $\sigma(0) = p$ y en $t = 0$ $\{u_1, u_2, u_3\}$ es su triedro de Frenet.

Definición: Sean $\sigma, \bar{\sigma}$ dos curvas parametrizadas por la longitud de arco. σ y $\bar{\sigma}$ se dicen equivalentes si existe un movimiento directo φ que transforma una en la otra, i.e.

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "\sigma"] \arrow[dr, "\bar{\sigma}"'] & \mathbb{R}^3 \arrow[d, "\varphi"] \\ & \mathbb{R}^3 \end{tikzcd} \qquad \bar{\sigma} = \varphi \circ \sigma .$$

Teorema (de Clasificación): Sean $\sigma, \bar{\sigma}$ param. por la lg. de arco y con curvatura no nula.

$$\sigma \equiv \bar{\sigma} \iff \begin{cases} k(\sigma) = k(\bar{\sigma}) \\ \tau(\sigma) = \tau(\bar{\sigma}) \end{cases}$$

- σ circunferencia $\iff \begin{cases} k = cte > 0 \\ \tau = 0 \end{cases}$

- σ hélice circular $\iff \begin{cases} k = cte \\ \tau \neq 0 \end{cases}$.

- Interpretación geométrica del signo de la torsión: El plano osculador $B_{t_0} \cdot X = \lambda$ divide (donde apunta el vector binormal), $B \cdot X = \lambda$ (el plano), y a $\mathbb{R}^3$ en 3 regiones: $B_{t_0} \cdot X > \lambda$ (donde apunta el vector binormal), $B_t \cdot X < \lambda$ (donde apunta $-B_t$). Así.

$-\tau(t_0) > 0 \Rightarrow$ cuando t crece, la curva atraviesa el plano osculador pasando de la región $B \cdot X < \lambda$ a $B \cdot X > \lambda$, i.e., en el sentido de B_t.

$-\tau(t_0) < 0 \Rightarrow$ cuando t crece, la atraviesa en el sentido de $-B_t$.

CURVAS DE PTE CTE

Definición: Una curva de pendiente constante (o hélice general) es una curva σ tal que $\exists\, e \in \mathbb{R}^3$ y $\alpha \in (0, \pi)$: $\alpha = \measuredangle(e, \sigma'(t))\ \forall t$, i.e., que la curva y el vector forman un ángulo cte. A el vector e se le llama eje de la hélice.

Proposición: Toda curva de pte cte admite, aplicable un movimiento directo si fuera necesario, una parametrización de la forma

$$\sigma(t) = (\sigma_1(t), \sigma_2(t), t\cos\alpha)$$

para algún $\alpha \in (0, \pi)$.

Teorema (Lancret): Sea $\sigma \in C^3$, con $\kappa \neq 0$.

$$\sigma \text{ es de pte cte} \iff \frac{\tau}{\kappa} = cte.$$

CURVAS ESFÉRICAS

Definición: Dado $t_0 \in I$ con $\kappa(t_0) \neq 0$ y $\tau(t_0) \neq 0$, llamamos esfera osculatriz a la curva en el pto $\sigma(t_0)$ a la esfera límite que pasa por $\sigma(t_0), \dots, \sigma(t_3)$ cuando $t_1, t_2, t_3 \to t_0$.

Def: Diremos que una curva σ es esférica si yace sobre una esfera.

Teorema: Sea σ cvo arts. El centro y radio de la esfera osculatriz en t_0 son

$$\boxed{C = \sigma + \frac{1}{k} N + \left(\frac{1}{k}\right)' \frac{1}{\tau} B} \; ; \; \boxed{R = \sqrt{\frac{1}{k^2} + \left[\left(\frac{1}{k}\right)' \cdot \frac{1}{\tau}\right]^2}}$$

Lema: Sea σ esférica y $R > 0$ el radio de la esfera en la que yace.

1) $k(t) \geq \frac{1}{R} > 0 \quad \forall t$

2) $k = cte \implies \sigma$ es una circunferencia (de radio $\leq R$).

Teorema: Sea σ parametr. por su long. de arco, y $k, \tau \neq 0$.

$$\sigma \text{ esférica} \iff \frac{\tau}{k} + \left[\left(\frac{1}{k}\right)' \cdot \frac{1}{\tau}\right]' = 0 .$$

Definición: Se llama desarrollable tangencial a la familia de rectas tangentes de una curva σ.
Además, se dice que una curva φ es evolvente o involuta de σ si está sobre la desarrollable tangencial y corta perpendicularmente a las rectas tg de σ.

Proposición: Para cada $a \in \mathbb{R}$, las involutas tienen como ecuación

$$\varphi_a(t) = \sigma(t) + (a - t) T_t .$$

Definición: Sea σ una curva regular. Se dice que $\varphi : I \to \mathbb{R}^3$ es una evoluta de σ si σ es una involuta de φ, ie, si σ corta perpendicularmente a las rectas tangentes de φ.

Proposición: Para cada $b \in \mathbb{R}$, las evolutas de una curva σ tienen como ecuación

$$\varphi_b = \sigma + \frac{1}{\kappa} N + \frac{1}{\kappa} \operatorname{cotg}\left(\int \tau \, dt + b \right) \cdot B .$$

Corolario: Si σ es plana, entonces la familia de evolutas tienen como ecuación

$$\varphi_c = \sigma + \frac{1}{\kappa} N + \frac{c}{\kappa} B .$$

Definición: Dos curvas σ, σ^* se dicen de Bertrand si pueden ponerse en correspondencia biunívoca de modo que en puntos correspondientes ambas curvas tengan la misma recta normal principal. En general, una curva σ se dice de Bertrand si existe otra curva σ^* tal que σ y σ^* sean de Bertrand.

Proposición: Sean σ, σ^* de Bertrand

1) $\sigma^* = \sigma + \lambda \cdot N$, $\lambda \in \mathbb{R}$

2) $d(\sigma^*, \sigma) = cte$ en puntos correspondientes

IV: CONCEPTO DE SUPERFICIE

- Intuitivamente, una superficie en $\mathbb{R}^3$ es un subconjunto $S \subset \mathbb{R}^3$ que localmente es la imagen de un abierto de $\mathbb{R}^2$.

Definición: Una parametrización regular de clase C^m es una aplicación $\varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, U abierto conexo, de clase C^m tal que $\varphi_u \times \varphi_v \neq 0$ en todo pto. Se dice que $S = \text{Im } \varphi$ es una superficie parametrizada por φ.

Lema: Toda parametrización regular es localmente inyectiva.

Definición: Un cambio de coordenadas de clase C^m es un difeomorfismo $U \subset \mathbb{R}^2 \to V \subset \mathbb{R}^2$ de clase C^m entre dos abiertos conexos del plano.

Lema: $U \xrightarrow{(v_1, v_2)} V$ es un cambio de coordenadas $\iff \det\left(\frac{\partial v_i}{\partial u_j}\right) \neq 0$.

Proposición: Si $\varphi : V \to S$ es una parametrización regular, y $U \to V$ es un cambio de coordenadas (ambos C^m) $\Rightarrow$ mediante el cambio de coordenadas $U \to V \to S$ se obtiene otra parametrización regular de S.

- $$\left.\begin{aligned} x &= r \cos\theta \cos\varphi \\ y &= r \operatorname{sen}\theta \cos\varphi \\ z &= r \operatorname{sen}\varphi \end{aligned}\right\}$$ COORDENADAS ESFÉRICAS

$\theta \in \mathbb{R}$; $\varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

$$\left.\begin{aligned} x &= r \cos\theta \\ y &= r \operatorname{sen}\theta \\ z &= z \end{aligned}\right\}$$ COORDENADAS CILÍNDRICAS

$\theta \in \mathbb{R}$

• Las superficies $\{ax+by+cz=d\}$ ó $\{x^2+y^2+z^2=r^2\}$, despejando, se pueden poner como los ceros de una función $F(x,y,z)$ diferenciable, y son superficies parametrizadas. Entonces surge la pregunta: ¿cuándo los ceros de una función es una sup. paramet.?

<u>Definición</u>: Se llama <u>gradiente</u> de una función diferenciable $F: W \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ a

$$\nabla F = \text{grad}\, F = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z} \right).$$

<u>Proposición</u>: Sea $F: W \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ diferenciable, y $Z = \{F=0\}$, y $p_0 \in Z$. Si $\nabla F(p_0) \neq 0$,
$\Rightarrow Z$ admite una parametrización regular en un entorno abto S de p_0.

<u>Definición</u>: Sea $\varphi: U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ una parametrización de S, $\varphi = \varphi(u,v)$. Se llaman <u>curvas paramétricas</u> a las dos familias de curvas sobre S

$$\{\sigma(u) := \varphi(u, v_0)\}_{v_0 \in \pi_2(U)} \quad ; \quad \{\bar{\sigma}(v) := \varphi(u_0, v)\}_{u_0 \in \pi_1(U)}.$$

• Nota que si φ es regular entonces en $p_0 = \varphi(u_0, v_0)$ los vectores tg de estas curvas son L.I.

• Si S es la gráfica de una función f, la primera familia son cortes con planos paralelos al XZ, y la segunda son cortes paralelos al plano YZ. En ambos casos son curvas planas.

• Las curvas paramétricas de la esfera se llaman <u>meridianos</u> con $\theta = \theta_0$ y paralelos con $\varphi = \varphi_0$.

<u>Definición</u>: Se llama <u>espacio vectorial tangente</u> a S en $p_0 = \varphi(u_0,v_0) \in S$ a

$$T_{p_0} S := \langle \varphi_u(u_0,v_0) , \varphi_v(u_0,v_0) \rangle .$$

• Puesto que φ regular, $\varphi_u \times \varphi_v \neq 0$ y $T_{p_0} S$ tiene dim 2, $T_{p_0} S = \langle \varphi_u \times \varphi_v \rangle^{\perp}$.

<u>Lema</u>: El espacio vectorial tangente no depende de la parametrización elegida.

<u>Proposición</u>: Dado $0 \neq e \in T_{p_0} S$, $\exists\ \bar{\sigma} : I \to S$ de clase C^m que pase por p_0 y cuyo vector tangente en p_0 es e.

<u>Definición</u>: Se llama <u>plano tangente</u> a S en $p_0 = \varphi(u_0,v_0)$ al plano que pasa por p_0 con dirección $T_{p_0} S$:

$$\Pi \equiv p_0 + T_{p_0} S \quad \equiv (\varphi_u(u_0,v_0) \times \varphi_v(u_0,v_0))(X - p_0) = 0$$

y se llama <u>recta normal</u> a S en p_0 a la que pasa por p_0 con dirección $\varphi_u(u_0,v_0) \times \varphi_v(u_0,v_0)$.

<u>Proposición</u>: Si $S \equiv \{F = 0\}$, $F \in C^m(W)$, entonces

$$T_{p_0} S = \langle \nabla F(p_0) \rangle^{\perp}$$

Definición: Una superficie $S \subset \mathbb{R}^3$ se dice de revolución si se obtiene al girar una curva plana C (llamada curva perfil o generatriz) alrededor de una recta L que no la corta (a la cual se le llama eje). Las diferentes posiciones de C se llaman meridianos, y las circunferencias descritas por cada pto de C paralelos.

- Si $\sigma(t) = (f(t), 0, g(t)) \equiv$ curva plana en el plano X^+Z, y se toma el eje Z como eje, esta una parametrización es

$$\begin{aligned} \varphi : I \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (t, \theta) &\longmapsto (f(t)\cos\theta,\ f(t)\,\text{sen}\,\theta,\ g(t)). \end{aligned}$$

Definición: Una superficie S se dice reglada si admite una parametrización φ para la cual una de las dos familias de curvas paramétricas está compuesta por segmentos de rectas (afines), en cuyo caso S es la unión de sus rectas.

- Si S es reglada, admite una parametrización $\varphi(u,v) = \sigma(u) + v\,g(u)$: σ es una curva y g da el vector director de la recta.

Definición: Un cilindro es una superficie generada por una recta l que se mueve paralelamente sobre los pts de una recta C.

Definición: Un cono de vértice p_0 y curva directriz C es la superficie unión de la familia de rectas que se obtienen al proyectar desde p_0 los pts de C.

Def: Un conoide de eje una recta l y directriz la curva C es la superficie unión de la familia de rectas que se apoyan en C y cortan perpendicularmente a l.

V: 1ª Y 2ª FORMAS FUNDAMENTALES

• Sea $\varphi: U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ una parametr. de clase C^∞ de S. En cada pto $p_0 = \varphi(u_0, v_0) \in S$ consideremos T_pS, y sobre él la base $\{\varphi_u(u_0,v_0), \varphi_v(u_0,v_0)\}$. Entonces la matriz del producto interior usual en esta base es

$$g_p \equiv \begin{pmatrix} \varphi_u(u_0,v_0)\cdot\varphi_u(u_0,v_0) & \varphi_v(u_0,v_0)\cdot\varphi_u(u_0,v_0) \\ \varphi_u(u_0,v_0)\cdot\varphi_v(u_0,v_0) & \varphi_v(u_0,v_0)\cdot\varphi_v(u_0,v_0) \end{pmatrix}$$

Definición: Llamamos primera forma fundamental de S al conjunto de métricas euclídeas

$g := \{g_p\}_{p \in S}$.

¡OJO!: Notar que en ningún momento estamos cambiando el producto usual de $\mathbb{R}^3$, sino las bases, y por tanto las matrices.

• La 1ª F.F. no varía al hacer cambios de parámetros.

Proposición: Sea $\varphi: U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, y $V \subseteq U$ que se corresponde biyectivamente a una región $\Omega \subseteq S$. Entonces

$$\boxed{\begin{aligned} \text{Área}(\Omega) &= \iint_V \|\varphi_u \times \varphi_v\| \, du\, dv \quad , \text{ ó} \\ \text{Área}(\Omega) &= \iint_V \sqrt{g_{11}\cdot g_{22} - (g_{12})^2} \, du\, dv \end{aligned}}$$

(Id. Lagrange)

Proposición: El área de $\Omega \subseteq S$ no depende de la paramt. elegida.

DERIVADA COVARIANTE EN $\mathbb{R}^n$

Definición: Sea $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $p \in A$ y $e \in \mathbb{R}^n$. Se llama derivada direccional de f según el vector e en p a

$$D_p^e f := \lim_{t \to 0} \frac{f(p+te) - f(p)}{t}$$

Lema: Si f diferenciable, y $e = (a_1, \dots, a_n) \Rightarrow \boxed{D_p^e f = a_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(p) + \dots + a_n \frac{\partial f}{\partial x_n}(p)}$, i.e.,

$D^e f = a_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \dots + a_n \frac{\partial f}{\partial x_n}$, como función, ó $D^e = a_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + a_n \frac{\partial}{\partial x_n}$, como operador.

· Dado $e \in \mathbb{R}^n$, tenemos un operador diferencial, una derivación:

$$D^e : C^m(A) \longrightarrow C^{m-1}(A)$$
$$f \longmapsto D^e f$$

y en efecto verifica las propiedades de toda derivación: $D_p^e(f+g) = D_p^e f + D_p^e g$;

$D_p^e(f \cdot g) = D_p^e f \cdot g(p) + f(p) \cdot D_p^e g$; $D_p^{\lambda e + \mu e'} f = \lambda \cdot D_p^e f + \mu D_p^{e'} f$.

Lema: Si $\sigma : I \to \mathbb{R}^n$ es una curva regular tal que para algún t_0, $\sigma(t_0) = p$ y $\sigma'(t_0) = e$, entonces $D_p^e f = (f \circ \sigma)'(t_0)$.

Definición: Un campo de vectores sobre $U \subseteq \mathbb{R}^n$ es una aplicación $D = (f_1, \dots, f_n) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, que a cada pto le asigna un vector. El campo D se dice dif ó C^m si f_i son dif ó C^m.

Definición: Dado un campo D, tenemos una manera de derivar funciones $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ respecto al campo:

$$Dg(p) := D_p^{D_p} g \left(= f_1(p) \cdot \frac{\partial g}{\partial x_1}(p) + \dots + f_n(p) \cdot \frac{\partial g}{\partial x_n}(p) \right).$$

- Esto dice que tenemos un operador diferencial $\boxed{D = f_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + f_n \frac{\partial}{\partial x_n}}$ donde $(f_1 \dots f_n) = D$ campo, y entonces tenemos el operador

$$\begin{aligned} D : C^m(U) &\longrightarrow C^{m-1}(U) \\ f &\longmapsto Df \end{aligned}.$$

¡OJO! No confundir la D de derivada direccional, del campo y del operador diferencial.

- Notar que derivar una función resp. un campo es, en cada pto, derivar direccionalmente la función según el vector que indique el campo en el pto.

- Denotamos $D^m(U) = \{$campos de vectores sobre U de clase $C^m\}$, que es un $C^m(U)$-módulo.

Definición: Sea D un campo de vectores, y $\overline{D} = (f_1, \dots, f_n)$ diferenciable. Llamamos derivada covariante de $\overline{D}$ respecto D al campo

$$\nabla_D \overline{D} = D^{\nabla} \overline{D} := (Df_1, \dots, Df_n).$$

que es un campo de clase 1 menos que la de $\overline{D}$.

• Entonces se tiene el operador derivada covariante, fijo D

$$\nabla_D : \mathcal{D}^m(U) \longrightarrow \mathcal{D}^{m-1}(U)$$
$$\overline{D} \longmapsto \nabla_D \overline{D} ,$$

que verifica $\nabla_D(\overline{D}_1+\overline{D}_2) = \nabla_D \overline{D}_1 + \nabla_D \overline{D}_2$; $\nabla_{D_1+D_2}\overline{D} = \nabla_{D_1}\overline{D} + \nabla_{D_2}\overline{D}$,

$$\nabla_D(f\overline{D}) = (Df)\cdot\overline{D} + f\cdot\nabla_D\overline{D} \quad , \quad \nabla_{fD}\overline{D} = f\,\nabla_D\overline{D} .$$

• Dados dos campos $D=(f_1,\dots,f_n)$ y $\overline{D}=(\overline{f}_1,\dots,\overline{f}_n)$, podemos hacer su producto escalar

$$D\cdot\overline{D} := f_1\cdot\overline{f}_1 + \dots + f_n\overline{f}_n \quad , \quad \text{que es una función } \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} .$$

<u>Lema</u>: Sean D, D_1, D_2 campos ; Ent. $D(D_1\cdot D_2) = (\nabla_D D_1)\cdot D_2 + D_1(\nabla_D D_2)$.

<u>Lema</u>: Dados dos campos $D, \overline{D}$ sobre $U\subseteq\mathbb{R}^n$, y $p\in U$, el vector $(\nabla_D\overline{D})(p)$ depende sólo del valor del campo $\overline{D}$ a lo largo de una curva regular σ que pase por p y cuyo vector tg en p sea D_p .

• También podemos definir la derivada covariante de un campo $\overline{D}^{=(f_1\dots f_n)}$ resp. un vector $e\in\mathbb{R}^n$:

$$(\nabla_e\overline{D})(p) := (D_p^e f_1,\dots,D_p^e f_n)$$

y la derivada covariante de $\overline{D}$ resp. otro D sería

$$(\nabla_D\overline{D})(p) := (\nabla_{D_p}\overline{D})(p)$$

y coincide con la def dada.

DERIVADA COVARIANTE DE UNA SUPERFICIE

• Problema! En una superficie S no tenemos estructura diferenciable!

Definición: Se dice que una función $f: S \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ es diferenciable (ó C^n) cuando si

$U \xrightarrow{\varphi} S \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, $f \circ \varphi \overset{NOT}{=} f = f(u,v)$ sea diferenciable (ó C^n).

• La definición anterior no depende de la paramet. elegida.

Definición: Una función $f: W \subset S \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ se dice diferenciable cuando lo sea

$f \circ \varphi$, $\varphi^{-1}(W) \subset \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\varphi} S \subset \mathbb{R}^3 \xrightarrow{f} \mathbb{R}$.

Definición: Sea $f: W \subset S \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, W entorno abierto de $p \in S$ y $e \in T_pS$. Llamamos derivada direccional de f en p siguiendo el vector e a

$$D_p^e f := (f \circ \sigma)'(t_0),$$

donde $\sigma: I \to S$ es una curva sobre S con $\sigma(t_0) = p$ y $\sigma'(t_0) = e$.

Proposición: $D_p^e f$ no depende de la curva σ. En particular, si $e = (a,b)$ en la base $\{\varphi_u, \varphi_v\}$,

$$\boxed{D_p^e f = a \cdot \frac{\partial f}{\partial u}(p) + b\frac{\partial f}{\partial v}(p)}$$

• $D_p^e f$ tampoco depende de la paramet. elegida.

• $D^e: C^n(S) \to C^{n-1}(S)$, $f \mapsto D^e f$ es una derivación (cumple las mismas prop. que en $\mathbb{R}^n$).

Definición: Un campo de vectores sobre S es una aplicación $D=(f_1,f_2,f_3): S \longrightarrow \mathbb{R}^3$ que asigna a cada pto de S un vector. D se dice diferenciable (C^∞) si f_i's lo son.

¡OJO!: Los vectores de dicho campo no tienen por qué ser tg a la superficie. En particular, $D = \varphi_u \times \varphi_v \equiv$ vector normal a la sup. en cada pto es un campo de vectores normales.

Definición: Un campo de vectores se dice tangente si $D_p \in T_pS \ \forall p \in S$.

- Los campos $D = \varphi_u$, $D = \varphi_v$ son tg.

Proposición: Sea D un campo tangente a S. Entonces $\exists h_1, h_2 : S \longrightarrow \mathbb{R}$ tales que

$$\boxed{D = h_1 \varphi_u + h_2 \varphi_v}$$ como campo tangente.

Definición: Dado un campo tangente D sobre S, tenemos una manera de derivar funciones resp. D:

$$Df(p) := D_p^{D_p} f \left(= h_1(p)\frac{\partial f}{\partial u}(p) + h_2(p)\frac{\partial f}{\partial v}(p)\right)$$

- Luego tenemos el operador $$\boxed{D = h_1 \frac{\partial}{\partial u} + h_2 \frac{\partial}{\partial v}}$$ como operador.

y cumple las reglas de derivación.

Definición: Sea D un campo tangente y $\overline{D} = (f_1, f_2, f_3)$ diferenciable, ambos campos sobre S.

Llamamos derivada covariante de $\overline{D}$ respecto D a

$$\nabla_D \overline{D} := (Df_1, Df_2, Df_3)$$

• El cpo resultante $\nabla_D \overline{D}$ no tiene por qué ser tgte a S.

• El campo $D = \varphi_u$ define el operador $\frac{\partial}{\partial u} \equiv$ derivada parcial, que se suele denotar como ∂_u : $Df = \partial_u f = \frac{\partial f}{\partial u}$. Entonces derivar un cpo $D = (f_1, f_2, f_3)$ resp. ∂_u resulta

$$\nabla_{\partial_u} D = (f_{1u}, f_{2u}, f_{3u})$$

e ídem con $D = \varphi_v$: se tiene $\partial_v \equiv D$; $\partial_v f = f_v$.

• La derivación covariante de cpos sobre superficies es, en efecto, una derivación.

• Al igual que antes, podemos extender el producto escalar a los cpos : si $D_1 = (f_1, f_2, f_3)$ y $D_2 = (g_1, g_2, g_3)$, entonces

$$D_1 \cdot D_2 := f_1 g_1 + f_2 g_2 + f_3 g_3 : S \longrightarrow \mathbb{R} \text{ es una función.}$$

y $$D(D_1 \cdot D_2) = (\nabla_D D_1) \cdot D_2 + D_1 \cdot (\nabla_D D_2).$$

• Y también podemos extender la derivada covariante resp. un vector : dado $e \in T_p S$, $p \in S$, $\overline{D}$ campo.

$$(\nabla_e \overline{D})(p) := (D_p^e f_1, D_p^e f_2, D_p^e f_3)$$

y entonces la derivada covariante de cpos es, siendo D tangente,

$$(\nabla_D \overline{D})(p) := (\nabla_{D_p} \overline{D})(p).$$

SEGUNDA FORMA FUNDAMENTAL

- Sea $\varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ una parametr. C^∞ de S.

Definición: Llamaremos campo normal unitario al campo de vectores sobre S $N := \frac{\varphi_u \times \varphi_v}{\|\varphi_u \times \varphi_v\|}$.

- N está determinado salvo el signo (depende de la parametr.

Lema: Dado $e \in T_pS$, existe un campo tangente diferenciable D sobre S tal que $D_p = e$.

Definición: Llamaremos endomorfismo de Weingarten de S en p a la aplicación

$$\begin{aligned} \phi_p : T_pS &\longrightarrow T_pS \\ e &\longmapsto \phi_p(e) := -(\nabla_e N)(p) \end{aligned}$$

Proposición: El endomf. de Weingarten ϕ_p está bien definido: es lineal y valora en T_pS.

- Denotamos $\mathcal{D}^r(S) := \{$campos de vectores tangentes sobre S de clase $C^r\}$ es un $C^r(S)$-ev de $\dim_{C^r(S)} 2$.

Lema: Si $D \in \mathcal{D}^r(S)$, $\nabla_D N$ es un campo tangente sobre S.

Definición: Llamaremos operador de Weingarten de la superficie S a

$$\begin{aligned} \phi : \mathcal{D}^r(S) &\longrightarrow \mathcal{D}^{r-1}(S) \\ D &\longmapsto \phi(D) := -\nabla_D N \end{aligned}$$

- ϕ es $C^r(S)$-lineal
- Notar que ϕ_p está determinado salvo signo. Además, $\phi_p(e)$ es la derivada de N resp. e, ie, ϕ_p mide cómo varía N (la dirección del plano tg), ie, ϕ_p mide cómo se curva la superficie S en p.

o Como $\dim_{\mathbb{R}} T_pS = 2$, y una base es $\{\varphi_u, \varphi_v\}$; $\dim_{C^\infty(S)} \mathcal{D}^m(S) = 2$, y una base es $\{\partial_u, \partial_v\}$. Entonces la matriz de ϕ_2 es

$$(\phi_2) \overset{NOT}{=} (L_{ij}) = \begin{pmatrix} \phi_2(\partial_u, \partial_u) \overset{NOT}{=} L_{11} & \phi_2(\partial_u, \partial_v) = L_{12} \\ \phi_2(\partial_v, \partial_u) = L_{21} & \phi_2(\partial_v, \partial_v) = L_{22} \end{pmatrix}.$$

Proposición: Sean $D_1, D_2 \in \mathcal{D}^m(S)$. Entonces $\boxed{\phi_2(D_1, D_2) = (\overline{\nabla}_{D_1} D_2) \cdot N}$, y además $\phi_2(\partial_i, \partial_j) = -\varphi_i \cdot N_u$ $(i,j = u,v)$. Entonces la expresión de la 2ª FF es

$$\boxed{(L_{ij}) = (\phi_2) = \begin{pmatrix} -\varphi_u \cdot N_u & -\varphi_v \cdot N_u \\ -\varphi_u \cdot N_v & -\varphi_v \cdot N_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_{uu} \cdot N & \varphi_{vu} \cdot N \\ \varphi_{uv} N & \varphi_{vv} \cdot N \end{pmatrix}}$$

Definición: Sea $p \in S$.

i) $p \in S$ se dice elíptico si $\phi_{2,p}$ tiene signo definido ($+$ ó $-$).

ii) $p \in S$ se dice hiperbólico si $\phi_{2,p}$ es no singular y no tiene signo definido

iii) $p \in S$ se dice parabólico si $\phi_{2,p}$ es singular y no nula

iv) $p \in S$ se dice plano si $\phi_{2,p} = 0$.

- superficie parametrizada $=$ (localmente) ceros de una función $=$ (localmente) gráfica de una func.

- Si $S = Gr\, f$, $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, y $\varphi(u,v) = (u, v, f(u,v))$, se tiene que

$$(\phi_2) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{i,j=u,v} = \text{hessiana de } f$$

Luego un pto $p = \varphi(u_0, v_0)$ es un máx de $f \Leftrightarrow$ el plano T_p deja a un lado a $S \Leftrightarrow \phi_{2,p}$ tiene sgn definido.

<u>Definición</u>: Un punto $p \in S$ se dice <u>umbílico</u> cuando las curvaturas principales de S en p coinciden. (p es elíptico o plano)

- <u>Interp. geom. de pto umbílico</u>: Por la fórmula de Euler, que p sea umbílico significa que la curvatura de la sección plana en cualquier dirección es la misma.

<u>Teorema</u>: Sea $p \in S$.

$$p \in S \text{ es umbílico} \Longleftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} : \quad \phi_{2,p} = \lambda \cdot g_p \quad (\text{son proporc.})$$

<u>Definic.</u>: Llamamos <u>curvatura media</u> de S a $K_m := \frac{k_1 + k_2}{2}$, donde k_1 y k_2 son las curvaturas principales. Si $K_m \equiv 0$, S se dice que es una <u>superficie mínima</u>.

Definición: Una curva sobre S se dice <u>línea de curvatura</u> si T_t es una dirección principal en cada pto.

- Como todo pto de la esfera es umbílico, toda curva esférica es línea de curvatura.

Proposición: Si $p \in S$ no es umbílico $\Rightarrow$ en un entorno de p existen dos familias ortogonales de líneas de curvatura.

Proposición: Sea $\sigma(t) = \varphi(u(t), v(t))$ una curva sobre S, i.e. $\sigma' = \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix}$

$$\sigma \text{ línea de curvatura} \iff \left[K_i(g) - (\phi_2) \right] \sigma' = 0 .$$

Definición: Una superficie se dice <u>desarrollable</u> si $K_g \equiv 0$.

- Toda sup. desarroll. es reglada.
- Las únicas sup. desarrollables son los cilindros, conos y desarrollables tangenciales.

VI : TEORÍA DE SUPERFICIES

- Al igual que para las curvas, en cada pto teníamos una base de $\mathbb{R}^3$, su triedro de Frenet $\{T, N, B\}$, con las superficies también tenemos un triedro móvil: $\{\varphi_u, \varphi_v, N\}$.

- Si para las curvas teníamos las Fórmulas de Frenet que expresan las derivadas del triedro en la base, aquí tenemos:

$$\left.\begin{aligned} \varphi_{uu} &= \Gamma_{11}^{1}\varphi_u + \Gamma_{11}^{2}\varphi_v + \alpha_{11}N \\ \varphi_{uv} &= \Gamma_{12}^{1}\varphi_u + \Gamma_{12}^{2}\varphi_v + \alpha_{12}N \\ \varphi_{vv} &= \Gamma_{22}^{1}\varphi_u + \Gamma_{22}^{2}\varphi_v + \alpha_{22}N \end{aligned}\right\} \text{ ECUACIONES DE GAUSS}$$

$$\left.\begin{aligned} N_u &= \beta_1^{1}\varphi_u + \beta_1^{2}\varphi_v + \gamma_1 N \\ N_v &= \beta_2^{1}\varphi_u + \beta_2^{2}\varphi_v + \gamma_2 N \end{aligned}\right\} \text{ ECUACIONES DE WEINGARTEN}$$

donde Γ_{ij}^{k}, α_{ij}, β_i^{j}, γ_i, $ij \equiv 1,2 \equiv u,v$ son funcs $U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

- Las ec. de Weingarten determinan el operador de Weingarten, pues $N_u = -\phi(\partial_u)$ y $N_v = -\phi(\partial_v)$.

<u>Proposición</u>: $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$, $(-\beta_j^{i}) = (\phi) = (g)^{-1}(\phi_2)$, luego los β_i^{j} dependen sólo de la 1ª y 2ª F.F.

Corolario: Sea $\sigma(t) = \varphi(u(t), v(t))$ sobre S, luego $\sigma' = (u', v')$.

$$\sigma \text{ línea asintótica} \iff L_{11}(u')^2 + 2L_{12}u'v' + L_{22}(v')^2 = 0.$$

campo tg con soporte en una curva

Definición: Un campo a soporte de una curva σ es una aplicación $D=(f_1,f_2,f_3): I \to \mathbb{R}^3$, que a cada pto de la curva le asigna un vector. D se dice diferenciable si f_i's son dif. (T, B, N son campos a soporte). Se dice que el campo es tangente si D_t es tg a la curva en $\sigma(t)$.

• Vamos a derivar campos a soporte de σ resp. un vector $e \in T_pS$. Dada $\alpha=\alpha(t)$ una curva con $\operatorname{Im}\alpha \subseteq \operatorname{Im}\sigma$ tal que $\alpha(t_0)=p$ y $\alpha'(t_0)=e$, si $D=(f_1,f_2,f_3)$,

$$(\nabla_e D)(p) := \left((f_1\circ\alpha)'(t_0), (f_2\circ\alpha)'(t_0), (f_3\circ\alpha)'(t_0)\right).$$

En particular $\boxed{\nabla_{\sigma'} D = D'}$, y dado otro campo tg a σ, será un $\lambda\sigma'$.

Moraleja: Derivar covariantemente campos a soporte resp. σ' es derivar el campo resp. t.

∘ Notar que $T' = \nabla_T T$, $N' = \nabla_T N$, $B' = \nabla_T B$ en las fórm. de Frenet.

• Sean D_1, D_2 dos campos tangentes a S. Denotaremos como $\overline{\nabla}_{D_1} D_2$ a la componente tangencial de $\nabla_{D_1} D_2$, y la normal será $h \cdot N$, de modo que $\nabla_{D_1} D_2 = \overline{\nabla}_{D_1} D_2 + hN$.

__Lema__: $\phi_2(D_1, D_2) = h$.

__Proposición__:

$$\boxed{\nabla_{D_1} D_2 = \overline{\nabla}_{D_1} D_2 + \phi_2(D_1, D_2) \cdot N}$$

• En particular $\sigma'' = \overline{\nabla}_{\sigma'} \sigma' + \phi_2(\sigma', \sigma') N$

• $\overline{\nabla}_{\sigma'} \sigma'$ es la aceleración que vería un ser bidimensional que habitara en S. Es una propiedad intrínseca a la superficie: depende sólo de la 1ª FF. En particular

$$\overline{\nabla}_{\sigma'} \sigma' = \left(u'' + (u')^2 \Gamma_{11}^1 + 2u'v' \Gamma_{12}^1 + (v')^2 \Gamma_{22}^1\right) \varphi_u + \left(v'' + (u')^2 \Gamma_{11}^2 + 2u'v' \Gamma_{12}^2 + (v')^2 \Gamma_{22}^2\right) \varphi_v.$$

__Definición__: Una curva σ sobre S se dice __geodésica__ si $\overline{\nabla}_{\sigma'} \sigma' = 0$, i.e., σ'' es normal a S a lo largo de la curva. Son las trayectorias inerciales propias de las superficies.

__Proposición__: Sea $\sigma(t) = \varphi(u(t), v(t))$ una curva sobre S.

$$\sigma \text{ es geodésica} \iff \left.\begin{array}{l} u'' + (u')^2 \Gamma_{11}^1 + 2u'v' \Gamma_{12}^1 + (v')^2 \Gamma_{22}^1 = 0 \\ v'' + (u')^2 \Gamma_{11}^2 + 2u'v' \Gamma_{12}^2 + (v')^2 \Gamma_{22}^2 = 0 \end{array}\right\}.$$

• __¡OJO!__ Ser geodésica depende de la parametrización. Con una puede serlo y con otra no.

Proposición: Sea σ una geodésica sobre S. Entonces

1) $\|\sigma'\| = cte$

2) Si $\sigma(s)$ es otra parametrización tal que $\left\|\frac{d\sigma}{ds}\right\| = cte \Rightarrow \sigma(s)$ también es geodésica.

Corolario: σ es geodésica (ie, tiene una parant. con la que es geodésica) $\Longleftrightarrow$ al parametrizarla por su long. de arco es geodésica.

- Las únicas geodésicas de un plano son las rectas
- Las geodésicas de una esfera son sus círculos máximos.

- Sea σ una parant. natural. Entonces $\nabla_T T = \overline{\nabla}_T T + K_n N$. $\|\nabla_T T\| = \kappa$ es la curvatura de σ como curva en $\mathbb{R}^3$, y $\|\overline{\nabla}_T T\| =: K_g \equiv$ curvatura geodésica, es la curvatura de σ que vería un habitante de S. Entonces

$$\boxed{\kappa^2 = K_g^2 + K_n^2}$$

Proposición: σ es geodésica $\Longleftrightarrow K_g \equiv 0$.

SUPERFICIES DE CURVATURA CTE

- Las superficies con $K_g \equiv 0$ son las superficies desarrollables.

Teorema (Liebmann): Las únicas superficies compactas y conexas de $\mathbb{R}^3$ de curvatura cte positiva son las esferas.

<u>Teorema</u>: Sea S convexa. Si todos los pts son umbílicos $\Rightarrow$ S es bien un abto de un plano bien un abto de una esfera.

<u>Teorema</u> (Hilbert): No existe en $\mathbb{R}^3$ ninguna superficie cerrada de curvatura cte negativa.