I: ED DE PRIMER ORDEN

Definición: Una ecuación diferencial (ED) es una ecuación cuyas incógnitas son funciones y contiene derivadas de las funciones.

Definición: Una ecuación diferencial se dice ordinaria si la incógnita es una función de 1-variable. Si es de varias variables se dice que es una ecuación en derivadas parciales.

Definición. Llamamos orden de la ED al orden de la mayor derivada que aparece.

- Una ED ordinaria de primer orden es de la forma $g(t,x,x')=0$, donde $g: A\subset\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$.

Si $x'(t)$ se puede despejar, $x'(t)=f(t,x(t))$, se dice que es una ED en forma explícita, donde $f: D\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, con $\mathring{D}\neq\emptyset$.

ECUACIONES DIFERENCIALES EXPLÍCITAS

Definición (Solución). Una solución de una ED explícita es una función $x: I\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, donde I es un intervalo, que verifica que $\forall t\in I$

i) x es diferenciable en t

ii) $(t, x(t))\in D$

iii) $x'(t) = f(t,x(t))$.

- Notar que tanto i) como ii) es para que iii) tenga sentido $\forall t$.

• Sea $x : I \to \mathbb{R}$ una soluci. Sabemos que en cada pto $(t, x(t)) \in Gr\, x$ la recta tangente que pasa por dicho punto será

$$X - x(t) = \underset{\underset{f(t,x)}{\shortparallel}}{x'(t)}\ (T - t)$$

Si consideramos en cada $(t,x) \in D$ la recta que pasa por dicho punto con pendiente $f(t,x)$, entonces las soluciones son las curvas (derivables y con $Gr\,x \subset D$) tales que en cada pto de su gráfica su recta tangente tiene la pendiente que le asigna el <u>campo de pendientes</u>, que es la aplicación

$$(t, x) \in D \longrightarrow X - x = f(t,x)\ (T - t).$$

• Para dibujar el campo de pendientes se hace

1) <u>Método de la Red</u>: En cada (t,x) se dibuja el segmento con pte $f(t,x)$.

<u>Defin</u>: Una <u>isoclina</u> es una curva que une puntos a los que el campo asigna una misma pendiente, $c \in \mathbb{R}$. Luego tienen como ecuación $f(t,x) = c$.

2) <u>Método de las isoclinas</u>:

Definición (PVI): Dado $(t_0, x_0) \in D$, el problema del valor inicial consiste en determinar la existencia (y unicidad) de soluciones de $x' = f(t,x)$ tales que $x(t_0) = x_0$ (ie, cuya gráfica pasa por (t_0, x_0)), lo cual se llama condición inicial.

Teorema (Existencia y unicidad de soluciones del PVI): Si $f: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y $\frac{\partial f}{\partial x}: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, D abierto, son continuas $\Rightarrow$ para cada (t_0, x_0) $\exists!$ solución $x: I \to \mathbb{R}$ tal que

$$x'(t) = f(t, x(t)) \quad , \quad x(t_0) = x_0 .$$

ECUACIONES $x' = g(t)$

Integrando, se obtiene que $x(t) = \int g(t)\,dt + C$. Para resolver el PVI $x(t_0) = x_0$, se elige $C = x_0$ y $\int_{t_0}^{t} g(s)\,ds$ = primitiva que vale 0 en t_0.

ECUACIONES AUTÓNOMAS : $x' = f(x)$

Proposición: $x(t) \equiv x_0$ es sol de $x' = f(x) \iff f(x_0) = 0$.

Proposición: Cualquier traslación horizontal de una solución de una ED autónoma es también solución, ie, $x(t)$ sol. $\Rightarrow x(t + t_0)$ es sol $\forall t_0 \in \mathbb{R}$.

- Esta última prop. dice que sólo hace falta estudiar el PVI $x(0) = x_0$, pues si $x(t)$ es la sol de ese PVI, entonces $x(t - t_0)$ es sol de $x(t_0) = x_0$.

• Sea $x' = f(x)$. Los ceros de f son sol. Sea $x(t)$ otra sol. Ents por TEU $f(x(t)) \neq 0$ $\forall t \in I$. Luego podemos dividir: $\frac{x'}{f(x)} = 1$.

<u>Lema</u>: $H(x) = \int \frac{1}{f(x)}\, dx \Rightarrow H(x(t)) = \int \frac{x'(t)}{f(x(t))}\, dt$.

• Integrando, y por el lema, $\int \frac{x'(t)}{f(x(t))}\, dt = H(x(t)) = t + C \Rightarrow \boxed{x(t) = H^{-1}(t+C)}$

• Para resolver el PVI $x(0) = x_0$, se elige $C = H(x_0)$.

<u>Otra forma</u>: Para resolver el PVI $x(0) = x_0$, se puede integrar entre 0 y t: se hace

$$\int_0^t \frac{x'(s)}{f(x(s))}\, ds \underset{\substack{x = x(s) \\ dx = x'(s)\, ds}}{\overset{TCV}{=\!=}} \int_{x(0)}^{x(t)} \frac{1}{f(x)}\, dx = \int_0^t 1\, ds.$$

Ents si $H(x) = \int_{x(0)}^{x(t)} \frac{1}{f(x)}\, dx$, $H(x(t)) = t \Rightarrow x(t) = H^{-1}(t)$.

$(-\infty, \bar{t}]$

<u>Proposición</u>: Si $x : [\bar{t}, \infty) \to \mathbb{R}$ es monótona creciente (decreciente), y acotada superiormente (inferiormente) $\Rightarrow \exists \lim_{\substack{t \to \infty \\ -\infty}} x(t)$.

<u>Proposición</u>: Si $x : [\bar{t}, \infty) \to \mathbb{R}$ es sol de $x' = f(x)$, $\exists \lim_{t \to \infty} x(t) = x_0$ $\Rightarrow x_0$ es un cero de f.

<u>Proposición</u>: Sea $x' = f(x)$, y $f \in C^1$.

1) $x : [\bar{t}, \beta) \to \mathbb{R}$ es una sol acotada superiormente $\forall t \Rightarrow \beta = \infty$

2) $x : (\alpha, \bar{t}] \to \mathbb{R}$ es una sol acotada inferiormente $\forall t \Rightarrow \alpha = -\infty$.

<u>Corolario</u>: Si $x : I \to \mathbb{R}$ es una sol acotada sup. e inferiormente $\Rightarrow I = \mathbb{R}$.

ECUACIONES DE VARIABLES SEPARADAS : $x' = g(t) f(x)$

<u>Proposición</u>: $x(t) \equiv x_0$ es sol de $x' = g(t) f(x)$ $\iff f(x_0) = 0$.

- El método de integración es exactamente igual al de las ED Autónomas, salvo que queda el término $g(t)$. Al integrar queda $G(t) =$ primitiva de $g(t)$; y la solución será $x(t) = H^{-1}(G(t) + C)$. Para resolver el PVI $x(t_0) = x_0$, se elige $G(t) = \int_{t_0}^{t} g(s)\, ds =$ primitiva que vale 0 en t_0, y se elige $C = H(x_0)$ (si se elige $H = \int_{x_0}^{x} \cdots$, $C = 0$, claro).

- Análogo si se integra entre 0 y t.

ECUACIONES LINEALES : $x' = a(t) x + b(t)$

- Se llama <u>homogénea</u> si $b(t) = 0$. En este caso la ED es de variables separadas.

- Para resolver la ED Lineal se resuelve primero el caso homogéneo, buscando una función $\mu(t) \neq 0$ tal que $(\mu(x) \cdot x(t))' = \mu(t)\left(x'(t) - a(t) x(t)\right)$. Tal función se llama <u>factor integrante</u>. Operando se tiene que $\mu'(t) = -a(t)\mu(t)$, luego $\mu(t) = e^{-A(t)}$, luego $x(t) = C e^{A(t)}$ es sol de la ED homogénea (que es un SEV unidimensional de $C^1(I)$).

- Para resolver el caso no homogéneo $x' - a \cdot x = b$, se multiplica por $\mu(t)$ y se usa la solución del caso homogéneo para obtener

$$\boxed{x(t) = C e^{A(t)} + e^{A(t)} \left(\int b(t)\, e^{-A(t)}\, dt \right)}$$

que es un subespacio afín de $C^1(I)$.

- Para resolver el PVI $x(t_0) = x_0$, se elige $A(t) = \int_{t_0}^{t} a(s)\, ds$, y $\int_{t_0}^{t} b(s) e^{-A(s)}\, ds$, y se ~~despeja~~ tiene $C = x_0$.

ECUACIÓN DE BERNOULLI : $x' = a(t)\, x^m + b(t)\, x$.

- El cambio de variable $y(t) := x(t)^{1-m}$ convierte la ED anterior en $y' = \bar{a} y + \bar{b}$, que es lineal.
- Para deshacer el cambio una vez conocida $y(t)$, basta hacer $x(t) = y(t)^{\frac{1}{1-m}}$.

ECUACIÓN DE RICATTI : $x' = a(t)\, x^2 + b(t)\, x + c(t)$

- En general no hay soluciones en términos de funciones elementales.
- Supongamos que conocemos una solución x_1. Entonces el cambio de variable $x = x_1 + y$ nos conduce a $y' = a y^2 + \bar{b} y$, que es una ED de Bernoulli.
- Si conocemos dos soluciones x_1, x_2, entonces el cambio de variable $u = \frac{x - x_1}{x - x_2}$ nos lleva a $u' = \bar{a} u$, que es de variables separadas.
- Si se conocen tres soluciones x_1, x_2, x_3, entonces se tiene $\bar{u} = \frac{x_3 - x_1}{x_3 - x_2}$ y se tiene $\bar{u} = K \cdot u$, de donde se despeja $x(t)$, ¡Y FIN!

ECUACIONES HOMOGÉNEAS : $x' = f\left(\frac{x}{t}\right)$.

- Si se hace $u = \frac{x}{t}$, se tiene $u' = \frac{1}{t}\left(f(u) - u\right)$, de var. separadas.

- Si se hace $\begin{cases} t = r\cos\theta \\ x = r\sin\theta \end{cases}$, se tiene $r'(\theta) = r(\theta)\cdot g(\theta)$, " " .

ECUACIONES DIFERENCIALES IMPLÍCITAS

- Una ED ordinaria de primer orden de forma implícita es una expresión del tipo $g(t,x,x') = 0$, donde la x' no está despejada. ($g: A \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $\mathring{A} \neq \emptyset$).

Definición: Una solución de una ED implícita es una función $x: I \to \mathbb{R}$, I intervalo, tal que $\forall t \in I$

i) x es derivable en t

ii) $(t, x(t), x'(t)) \in A$

iii) $g(t, x(t), x'(t)) = 0$.

- Notar que al igual que antes i) y ii) es para que iii) tenga sentido.

Definición: Una integral primera es una función $u: D' \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que

i) $u \in C^1(D')$

ii) $\left(\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial x}\right) \neq (0,0)$ $\forall (t,x) \in D'$

iii) Si $x: I \to \mathbb{R}$ es una solución tal que $(t, x(t)) \in D'$ $\forall t \in I \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists c \in \mathbb{R} : u(t, x(t)) = c$ $\forall t \in I$.

- iii) dice que las curvas de nivel $\{(t,x) \in D' : u(t,x) = c\}_{c \in \mathbb{R}}$ contienen a las gráficas de las funciones, luego las soluciones están definidas implícitamente en $u(t,x) = c$.

• En términos más comprensibles, que $u(t,x(t)) = cte$ dice (TVM) que $u'(t,x(t)) = 0$ $= g(t,x,x') \Rightarrow u(t,x)$ "es una primitiva" de g respecto de t.

Definición: Una ED $M(t,x) + N(t,x)\cdot x' = 0$ se dice exacta si $\exists u(t,x)$, $u \in C^1(D)$: $\frac{\partial u}{\partial t} = u_t = M$, $\frac{\partial u}{\partial x} = u_x = N$, y $(u_t, u_x) \neq (0,0)$ $\forall (t,x) \in D$.

Teorema (Condición de Exactitud): Sea $M(t,x) + N(t,x)\, x' = 0$ una ED, donde M y $N \in C^1(R)$, $R = /a,b/ \times /c,d/$ $(/ = ($ ó $[)$. Entonces

$$\exists u(t,x) : u_t = M,\ u_x = N \iff \frac{\partial M}{\partial x} = \frac{\partial N}{\partial t}.$$

Corolario: $\frac{\partial M}{\partial x} = \frac{\partial N}{\partial t}$, y $(M,N) \neq (0,0)$ en R $\Rightarrow$ la ED es exacta, la función $u(t,x)$ del Teorema es una integral primera, y se obtiene una única solución (implícita) del PVI.

• Para obtener la $u(t,x)$, se integra primero M resp. t, y se deriva resp. de x, con lo que se puede igualar a N, para obtener la expresión total.

• Si $M + Nx' = 0$ no es exacta, se trata de buscar un factor integrante μ tal que $\mu M + \mu N x' = 0$ sí sea exacta. Además en ese caso se prueba que si $u(t,x)$ es una integral primera para $\mu M + \mu N x' = 0$, también lo es para $M + Nx' = 0$. Entonces,

$$\underbrace{\mu_x M + \mu M_x = \mu_t N + \mu N_t}_{\text{ED en derivadas parciales.}} \iff \mu \text{ es un factor integrante.}$$

II: ED LINEALES

ED DE SEGUNDO ORDEN

- Una ecuación dif. de orden 2 tiene la forma $g(t, x^0, x', x'') = 0$, donde $g: D \subset \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$, $\mathring{D} \neq \emptyset$.

Definición: Se dice que una función $x: I \to \mathbb{R}$, I intervalo, es solución de una ED de orden 2 si $\forall t \in I$

i) x es dos veces derivable

ii) $(t, x(t), x'(t), x''(t)) \in A$

iii) $g(t, x(t), x'(t), x''(t)) = 0$.

Definición. El problema del valor inicial en ED de orden 2 consiste en encontrar soluciones (existencia y unicidad) de $x'' = f(t, x, x')$ tal que $x(t_0) = x_0$, $x'(t_0) = x_0'$; i.e., que pasen por $(t_0, x_0, x_0') \in D$, $f: D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$.

Teorema (de Existencia y Unicidad de Sols del PVI, orden 2): Sean f, $\frac{\partial f}{\partial x_1}$, $\frac{\partial f}{\partial x_2}$ continuas en $\mathring{D}$. Entonces para cada condición inicial (t_0, x_0, x_0') $\exists!$ solución $x: I \to \mathbb{R}$ tal que $x(t_0) = x_0$, $x'(t_0) = x_0'$.

- Trabajaremos con estas ED de la forma $A(t)\, x''(t) + B(t)\, x'(t) + C(t)\, x(t) = D(t)$, o de otro modo, $x'' + a x' + b x = c$, donde $a, b, c: I \to \mathbb{R}$. Entonces

Corolario: Sea la ED $x''+ax'+bx=c$. Si a,b,c son continuas en $I \Rightarrow$ para cada condición inicial $\exists!$ solución $x: I \to \mathbb{R}$ del PVI.

- Notar que la solución está definida donde lo están a,b,c.
- Si $c \equiv 0$, se dice que la ED es homogénea.

Proposición: Sea $Z := \{$ soluciones de $x''+ax'+bx=0 \}$, y x_p una sol de $x''+ax'+bx=c$.

1) Z es un subesp. vect. de $C^2(I)$

2) $x_p + Z$ es el subespacio afín de todas las soluciones de la ecuación no homogénea.

Proposición: Sean x,y dos soluciones de la ec. homogénea, y $t_0 \in I$.

$$x,y \in Z \text{ son L.I.} \iff (x(t_0), x'(t_0)),\ (y(t_0), y'(t_0)) \in \mathbb{R}^2 \text{ son L.I.}$$

Proposición: $\dim Z = 2$.

- Esto dice que si encontramos 2 soluciones L.I. en Z, ya tenemos todas, pues son base. Y si encontramos una particular x_p de la no homog., tenemos todas las de la ec. no hom.

Definición: Sean $x,y: I \to \mathbb{R}$ dos soluciones de la ec. homog. Llamamos Wronskiano de x e y a

$$W(x,y)(t) := \begin{vmatrix} x(t) & y(t) \\ x'(t) & y'(t) \end{vmatrix}$$

Lema: Sea x, y dos sol. de la ec. homg. , y $t_0 \in I$. Ents

$$W(x,y)(t) = W(x,y)(t_0)\, e^{-\int_{t_0}^{t} a(s)\, ds}.$$

Teorema: Sean x, y dos sol de la ec. hom y $t_0 \in I$. Son equivalents:

1) x e $y \in C^2(I)$ son L.I.

2) $(x(t_0), x'(t_0))$, $(y(t_0), y'(t_0)) \in \mathbb{R}^2$ son L.I.

3) $W(x,y)(t) \neq 0 \quad \forall t \in I$.

4) $W(x,y)(t_0) \neq 0$.

• Sea $x(t)$ una sol de la EC. HOM. ¿Como encontrar una sol. L.I.? (y así todo Z).

Derivando $\left(\frac{y}{x}\right)(t)$, y eligiendo $y(t_0) = 0$, $y'(t_0) = \frac{1}{x(t_0)}$, se tiene

Proposición: Sea $x(t)$ sol de la ec. hom. Entons

$$y(t) := x(t) \cdot \int_{t_0}^{t} \frac{e^{-\int_{t_0}^{s} a(\tau)\, d\tau}}{x^2(s)}\, ds$$

es una sol L.I. con $x(t)$, y por tanto $Z = \langle x(t), y(t) \rangle$.

• Entonces, ya conocemos Z. ¿Como encontrar x_p para tener $x_p + Z \equiv$ sol. gen. afín de sol de la ec. no homog.? Se trata de encontrar una solución de la forma $x_p = \lambda(t)\, x(t) + \mu(t) \cdot y(t)$, donde se trata de encontrar $\lambda(t)$ y $\mu(t)$.

Proposición (Método de Variación de Parámetros): Sean $x(t), y(t)$ base de Z. Una solución particular de la ecuación no homogénea $x'' + ax' + bx = c$ es

$$x_p(t) = \left(\int \frac{-c \cdot y}{W(x,y)}\right) x(t) + \left(\int \frac{-c \cdot x}{W(x,y)}\right) \cdot y(t)$$

y por tanto $x_p + Z$ son todas las soluciones de la ec. no hom.

- En lo que sigue podrá ser $x : I \longrightarrow \underline{\underline{\mathbb{C}}}$, y $x(t) = (\mathrm{Re}\, x)(t) + i(\mathrm{Im}\, x)(t)$.

Proposición: Sea $x'' + ax' + bx = c$, donde $a, b : I \to \mathbb{R}$ y $c : I \longrightarrow \mathbb{C}$, y $x : I \to \mathbb{C}$

$$x(t) \text{ es sol. de } x'' + ax' + bx = c \iff \begin{cases} \mathrm{Re}\, x \text{ es sol de } x'' + ax' + bx = \mathrm{Re}\, c \\ \mathrm{Im}\, x \text{ es sol de } x'' + ax' + bx = \mathrm{Im}\, c. \end{cases}$$

ECUACIONES LINEALES CON COEF. CONSTANTES

- Se trata de resolver $x'' + ax' + bx = 0$ (CASO HOMOGÉNEO), con $a, b \in \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$.

Proposición: Sea la ED $x'' + ax' + bx = 0$, con $a, b \in \mathbb{C}$, y $\lambda \in \mathbb{C}$.

$$x(t) = e^{\lambda t} \text{ es solución} \iff \lambda^2 + a\lambda + b = 0.$$

Definición: Llamaremos ecuación característica a $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$.

- ¿Cuáles son las soluciones?

- CASO COMPLEJO: $a, b \in \mathbb{C}$, $x : I \to \mathbb{C}$.

- $a^2 - 4b \neq 0$: Hay dos raíces distintas $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$, luego $e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}$ son dos sol L.I.

- $a^2 - 4b = 0$: Hay una raíz doble $\lambda = \frac{-a}{2}$, luego $e^{\frac{-at}{2}}$ es sol. Otra L.I. con ésta es $te^{\frac{-at}{2}}$.

• **CASO REAL** $a, b \in \mathbb{R}$; $x: I \to \mathbb{R}$.

- $\underline{a^2-4b>0}$: Hay dos ~~soluciones~~ raíces reales λ_1, λ_2, luego $e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}$ son dos sol L.I.

- $\underline{a^2-4b=0}$: Hay una raíz doble $\lambda = \frac{-a}{2}$, luego $e^{\frac{-at}{2}}$ es una solución. Para buscar otra L.I. con ella se aplica la prop. de la pag 11, que resulta $te^{\frac{-at}{2}}$.

- $\underline{a^2-4b<0}$: Hay dos raíces conjugadas. Sea $\lambda = \alpha + i\beta$ $(\beta \neq 0)$ una de ellas. Entonces por una prop. vista $Re\, e^{\lambda t} = e^{\alpha t}\cos(\beta t)$ y $Im\, e^{\lambda t} = e^{\alpha t}\operatorname{sen}(\beta t)$ son soluciones, y además L.I.

• Ahora queremos resolver el caso no homogéneo $x''+ax'+bx = e^{\mu t}\cdot c(t)$, $\mu \in \mathbb{C}$ y $c(t)$ un polinomio de grado m. Se trata de buscar una solución de la forma $x(t) = e^{\mu(t)}\cdot(C_0+\dots+C_m t^m)$. Si $\mu=0$, se obtiene un sist. de ec. para obtener los C_i. Si $b=0$, se busca una sol del tipo $x(t) = (e^{\mu t})t\,(C_0+\dots+C_m t^m)$. Si $\mu \neq 0$, se hace el cambio $x(t) = e^{\mu t}\cdot y(t)$, y se obtiene una con la $\mu=0$.

<u>Proposición</u> (Método de los coeficientes indeterminados). Sea la ED $x''+ax'+bx = e^{\mu t}\cdot c(t)$, $\mu \in \mathbb{C}$ y $c(t)$ un polinomio. Entonces

$\boxed{\mu=0}$

$x(t) = \cdot(C_0+\dots+C_m t^m)$ es solución $\iff b \neq 0$

$x(t) = \cdot t\cdot(C_0+\dots+C_m t^m)$ es solución $\iff a \neq 0$.

$\boxed{\mu \neq 0}$

$x(t) = e^{\mu t}(C_0+\dots+C_m t^m)$ es solución $\iff \mu^2+a\mu+b \neq 0$.

$x(t) = e^{\mu t}\cdot t\cdot(C_0+\dots+C_m t^m)$ es solución $\iff 2\mu+a \neq 0$.

SOLUCIONES EN SERIES DE POTENCIAS

- Una <u>serie de potencias</u> (centrada en 0) es una sucesión de sumas parciales $\sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k$. Dicha serie tiene un radio de convergencia R tal que en $(-R,R)$ converge absolutamente y en $|t|>R$ diverge ($|t|=R$ es un caso dudoso).
- $R = \left(\overline{\lim} \sqrt[n]{|c_n|} \right)^{-1} = \left(\lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| \right)^{-1} \equiv$ <u>radio de convergencia</u>.
- Dentro del intervalo de convergencia se deriva término a término y se integra igual.
- Se dice que $x(t) = \sum c_k t^k$ es <u>analítica</u> en $t=0$, i.e., si admite un desarrollo en forma de serie de potencias.

<u>Teorema</u>: Sea la ED $x'' + a(t)x' + b(t)x = 0$, con $a(t)$ y $b(t)$ analíticas en $t=0$, de radio de convergencia R. Entonces la ED admite una solución $x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k$ analítica cuyo radio de convergencia es $\geq R$. Los $\{c_k\}$ se obtienen de una relación de recurrencia al sustituir $x(t)$ en la ED.

- Los coeficientes c_0 y c_1 se dejan indicados y se toman valores $1,0$ y $0,1$ para tener sol. L.I.

<u>Definición</u>: Consideremos la ED $A(t)x'' + B(t)x' + C(t)x = 0$. Un pto t_0 se dice <u>singular</u> si $A(t_0) = 0$ pero $B(t_0)$ y $C(t_0)$ no sean 0 simultáneamente. Además, t_0 se dice <u>singular regular</u> si además $(t-t_0)\frac{B(t)}{A(t)}$ y $(t-t_0)^2 \cdot \frac{C(t)}{A(t)}$ son analíticas en t_0.

- Si t_0 es un pto singular, para $t \neq t_0$ se aplica el Th anterior dividiendo entre $A(t)$ y se obtiene la serie de potencias centrada en el pto. Para $t = t_0$, no se puede aplicar pues $\frac{B(t)}{A(t)}$ y $\frac{C(t)}{A(t)}$ no son analíticas en t_0. Si en t_0 son singulares regulares sí se puede obtener una solución (decimos que son "singularidades débiles") centrada en t_0.

• Sea t_0 un punto singular regular de $A(t)x''+B(t)x'+C(t)x=0$. Mediante una traslación podemos suponer $t_0=0$ y expresarla de la forma $t^2x''+t\,a(t)\,x'+b(t)\,x=0$.

Definición: Se llama ecuación indicial de la ED anterior a $F(z):=z(z-1)+a_0z+b_0=0$, donde $a(t)=\sum a_it^i$, $b(t)=\sum b_it^i$ analíticas en $t=0$.

Teorema (Método de Fröbenius): Sea la ED $t^2x''+t\,a(t)\,x'+b(t)x=0$, donde $a(t),b(t)$ analíticas en $t=0$, $a(t)=\sum a_it^i$, $b(t)=\sum b_it^i$ con radio de convergencia R. Sean z_1,z_2 las raíces de la ecuación indicial, con $\operatorname{Re} z_1 \geq \operatorname{Re} z_2$. Entonces hay una solución de la forma $x_1(t)=|t|^{z_1}\sum_{k=0}^{\infty}c_kt^k$, $c_0=1$ en $(-R,R)$; y si $z_1-z_2\notin\mathbb{Z}$, hay una segunda solución de la forma $x_2(t)=|t|^{z_2}\sum_{k=0}^{\infty}\bar{c}_kt^k$, $\bar{c}_0=1$.

• ¿Qué pasa si $z_1=z_2$ ó $z_1-z_2\in\mathbb{N}$?

Teorema (Método de Fröbenius, casos excepcionales): Con las mismas hipótesis que antes, si $z_1=z_2$, hay dos sol. l.i.

$$x_1(t)=|t|^{z_1}\sum_{k=0}^{\infty}c_kt^k \quad , \quad c_0=1 \quad ;$$

$$x_2(t)=x_1(t)\cdot\ln|t|+|t|^{z_1+1}\left(\sum d_kt^k\right)$$

en $(-R,R)$, y los c_k,d_k se obtienen por sustitución. Si $z_1-z_2\in\mathbb{N}$, hay dos sol. l.i.

$$x_1(t)=|t|^{z_1}\sum_{k=0}^{\infty}c_kt^k \quad , \quad c_0=1 \quad ;$$

$$x_2(t)=a\,x_1(t)\ln|t|+|t|^{z_2}\left(\sum_{k=0}^{\infty}d_kt^k\right)$$

en $(-R,R)$; y los c_k,d_k se obtienen por sustitución.

ECUACIONES DIFERENCIALES DE ORDEN SUPERIOR

Definición: Una ecuación diferencial lineal de orden n es una ED de la forma

$$x^{(n)} + a_{n-1}(t)x^{(n-1)} + \dots + a_1(t)x' + a_0(t)x = b(t) \quad ,$$

con $a_i, b : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Definición: Se dice que $x : I \to K$ ($K = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$) es solución de la ED anterior si x es n veces derivable en t $\forall t$ y $x^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)x^{(n-1)}(t) + \dots + a_0(t) = b(t)$.

Teorema (Existencia y Unicidad de Solución del PVI): Sea $a_0(t), \dots, a_{n-1}(t), b(t)$ continuas en $I \subset \mathbb{R}$. Entonces, para cada condición inicial $(t_0, x_0, x_{0_1}, \dots, x_{0_{n-1}})$ existe una única solución $x : I \to K$ tal que $x(t_0) = x_0$, $x^{(i)}(t_0) = x_{0_i}$.

Proposición: Sea $Z = \{$ soluciones de $x^{(n)} + \dots + a_0(t)x = 0 \}$.

1) Z es un SEV de $C^n(I)$, de dim n.

2) $S = x_p(x) + Z$ (x_p sol particular del caso no homog) es el espacio afín n-dimensional de soluciones del caso no homogéneo.

Proposición: Sea $t_0 \in I$

$$x_1(t), \dots, x_n(t) \in Z \text{ son L.I} \iff \begin{pmatrix} x_1(t_0) \\ \vdots \\ x_1^{(n-1)}(t_0) \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} x_n(t_0) \\ \vdots \\ x_n^{(n-1)}(t_0) \end{pmatrix} \in K^n \text{ son L.I.}$$

<u>Teorema</u> (Coeficientes Constantes): Sea la ED $x^{(n)} + a_{n-1} x^{(n-1)} + \ldots + a_1 x' + a_0 x = 0$, $a_i \in K$. Sean $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ las raíces distintas de la ecuación característica $\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1 \lambda + a_0 = 0$, de multiplicidades $m_1, \ldots, m_r$ ($\sum m_i = n$). Entonces una base de soluciones es

$$\left\{ \begin{array}{llll} e^{\lambda_1 t}, & t e^{\lambda_1 t}, & \ldots, & t^{m_1 - 1} e^{t\lambda_1}, \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ e^{\lambda_r t}, & t e^{\lambda_r t}, & \ldots, & t^{m_r - 1} e^{t\lambda_r} \end{array} \right\}.$$

SISTEMAS DIFERENCIALES LINEALES.

<u>Definición</u>: Un <u>sistema de ecuaciones diferenciales</u> lineal de n ecuaciones y n incógnitas $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ es

$$\left.\begin{array}{l} x_1'(t) = a_{11}(t) x_1(t) + \ldots + a_{1n}(t) x_n(t) + b_1(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) = a_{n1}(t) x_1(t) + \ldots + a_{nn}(t) x_n(t) + b_n(t) \end{array}\right\} \equiv \begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \equiv$$

$$\equiv \quad \underline{\underline{x'(t) = A(t)\, x(t) + b(t)}}$$

donde $x = (x_1, \ldots, x_n) : I \longrightarrow K^n$, $a_{ij}, b_i : I \longrightarrow K$.

<u>Definición</u>: $x : I \longrightarrow K^n$ se dice solución de $x' = Ax + b$ si $\forall t$ x es derivable en t y

$$x_i'(t) = \sum_j a_{ij}(t)\, x_j(t) + b_i(t).$$

Teorema (Existencia y Unicidad de Soluciones): Sea $x' = Ax + b$ y supongamos que $a_{ij}(t), b_i(t)$ sean continuas en I. Entonces, para cada condición inicial $(t_0, x_{0_1}, \dots, x_{0_n}) \in I \times K^n$ existe una única solución $x : I \longrightarrow K^n$ tal que $x_i(t_0) = x_{0_i}$.

Proposición: Sea $Z = \{$ soluciones de $x' = Ax \}$

1) Z es un espacio vectorial de dim n

2) $S = x_p + Z$ es el espacio afín n-dimensional de sol de la ec. no homogénea, donde x_p es una sol. particular.

Proposición: Sea $t_0 \in I$

$$x^1(t), \dots, x^n(t) \in Z \text{ son L.I.} \iff \begin{pmatrix} x_1^1(t_0) \\ \vdots \\ x_n^1(t_0) \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} x_1^n(t_0) \\ \vdots \\ x_n^n(t_0) \end{pmatrix} \in K^n \text{ son L.I.}$$

Teorema (Coef. ctes, caso diagonalizable): Sea la ED $x' = Ax$, donde los $a_{ij} \in K$. Si A es diagonalizable, de autovalores $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ de autovectores $p_1, \dots, p_n$, entonces una base de soluciones es

$$\{ e^{\lambda_1 t} p_1, \dots, e^{\lambda_n t} p_n \}.$$

III : ED EN DERIVADAS PARCIALES

Definición: Un problema de contorno ó de valores frontera consiste en determinar las soluciones de una cierta ED $g(t,x,x',x'')=0$ en $[0,\ell]$ que además verifiquen unas ciertas ecuaciones en 0 y ℓ: $f_1(x''(0),x'(0),x(0))=0$, $f_2(x''(\ell),x'(\ell),x(\ell))=0$.

Proposición: Consideremos la ED $x''(t)+\lambda x(t)=0$, $\lambda\in\mathbb{R}$. Las soluciones a los siguientes problemas de contorno son:

1) $\left.\begin{aligned} x(0)&=0\\ x(\ell)&=0\end{aligned}\right\}$ Para cada $n\in\mathbb{N}$ se obtiene una solución para $\lambda_n=\lambda=\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2$, que es

$$x_n(t)=\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi t}{\ell}\right).$$

2) $\left.\begin{aligned} x'(0)&=0\\ x'(\ell)&=0\end{aligned}\right\}$ Para cada $n\in\mathbb{N}$ se obtiene una solución para $\lambda_n=\lambda=\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2$, que es

$$x_n(t)=\cos\left(\frac{n\pi t}{\ell}\right).$$

Y las sol. $x\equiv 0$ son en otros casos también sol.

- El caso general es

Teorema: El problema de contorno $x''+\lambda x=0$, $\left.\begin{aligned} a\,x(0)+b\,x'(0)&=0\\ c\,x(\ell)+d\,x'(\ell)&=0\end{aligned}\right\}$ tiene soluciones no triviales $x_n(t)$ sólo para un conjunto numerable de valores $\lambda_1\leq\lambda_2\leq\ldots$ tal que $\lim\lambda_n=\infty$.

A los λ_n se les llama autovalores y a las $x_n(t)$ corresp. autofunciones. El conjunto de soluciones del anterior problema es además un EV.

• El espectro de estudiar se debe a que si $L(x(t)) := -x''(t)$, entonces $x(t)$ es sol $\Leftrightarrow$
$\Rightarrow x''+\lambda x = 0 \Leftrightarrow \lambda$ es autovalor de L (de autovector x).

SERIES DE FOURIER

Definición: Sea $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función $2l$-periódica, $l>0$. Se llama serie de Fourier de F a

$$\frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\right).$$

donde

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} F(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx \quad , n=0,1,\dots$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} F(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx \quad , n=1,2,\dots$$

• ¿Cuándo la serie de Fourier de F converge a F?

Definición: Se dice que una función $g:[-l,l]$ es continua a trozos si es continua salvo en un nº finito de pts y son de salto finito ($\exists \lim_{x\to x_0^+} g(x) \overset{\text{NOT}}{=} g(x_0^+)$, $\exists \lim_{x\to x_0^-} g(x) = g(x_0^-)$).

Teorema (Dirichlet, convergencia de la serie de Fourier): Sea $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $2l$-periódica, tal que F y F' sean continuas a trozos en $[-l,l]$. Entonces para cada $x \in [-l,l]$ su serie de Fourier converge puntualmente a $\dfrac{F(x^+)+F(x^-)}{2}$, por lo que si F es continua, entonces su serie de Fourier converge a ~~F~~ F absolutamente, i.e., $F =$ serie de Fourier de F, i.e., F admite un desarrollo en serie de Fourier.

Corolario: Si F es impar, entonces $a_n = 0 \ \forall n$ y $F(x) = \sum b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right)$.

Si F es par, $b_n = 0 \ \forall n$ y $F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_n a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right)$.

Teorema (Unicidad de la Serie de Fourier): Si F admite un desarrollo en serie de Fourier $\Rightarrow$ la serie de Fourier es única.
(Fcont.)

ECUACIÓN DEL CALOR: $\boxed{\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}$, $t \geq 0$, $x \in [0,\ell]$
$u(x,t)$

• Queremos resolverla con las condiciones iniciales - frontera $\begin{cases} u(0,t) = u(\ell,t) = 0 & \forall t \geq 0 \text{ CF} \\ u(x,0) = f(x) & , x \in [0,\ell] \text{ CI} \end{cases}$

• El método de separación de variables consiste en buscar soluciones de la forma $u(x,t) = X(x)T(t)$.

Por sustitución se llega a que para cada $n \in \mathbb{N}$ hay una solución $u(x,t) = e^{-t\left(\frac{n\pi a}{\ell}\right)^2} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right)$, que verifica la ED y la cond. frontera.

Proposición: Si $u_1, u_2, \dots$ son sol de la ED y de la cond. frontera, cualquier CL también es solución.

Definición: Sea $f: [0,\ell] \to \mathbb{R}$. Se llama extensión 2ℓ-periódica impar de f a la función $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$F(x) := \begin{cases} f(x), & x \in (0,\ell] \cup (2\ell, 3\ell] \cup (-2\ell, -\ell] \cup \dots \\ -f(-x), & x \in (\ell, 2\ell] \cup (3\ell, 4\ell] \cup (-\ell, 0] \cup \dots \end{cases}$$

• Volvemos a la ecuación del calor. Consideremos la extensión 2ℓ-periódica de la $f(x)$ de la CI. Su serie de Fourier es $F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right)$ (no hay a's pues F impar). Entonces una combinación lineal de las $u_n(x,t)$ cuando con coef. los b_n es solución, pues por ser una CL cumple la ED y cond. front. y ahora además, en $t=0$ vale $f(x)$:

$$\boxed{u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) e^{-\left(\frac{n\pi a}{\ell}\right)^2 t}}$$ SOLUCIÓN DE LA EC. DEL CALOR.

donde $b_n = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) dx$.

• ¿Bajo que condiciones es solución? ¿Cuando $u(x,t)$ es continua en $[0,\ell]\times[0,\infty)$, de clase ?, ..?

<u>Teorema</u>: Si $\exists C \in \mathbb{R} : b_n \leq C \ \forall n$, entonces $\sum b_n \operatorname{sen}(\ ) e^{\cdots}$ converge a una función $u \in C^\infty(\mathbb{R}\times(0,\infty))$ que satisface la ec. del calor y las cond. frontera. Si además $f:[0,\ell] \to \mathbb{R}$ es continua y derivable con continuidad a otros, y $f(0) = f(\ell) = 0$ y los b_n son los coef. de Fourier de extensión impar, entonces la serie converge uniformente en $\mathbb{R}\times(0,\infty)$ a una función u continua que verifica la condición inicial.

<u>ECUACIÓN DE ONDAS</u>: $$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}$$

• Queremos resolverla con las condiciones iniciales-frontera
$$\begin{cases} u(0,t) = u(\ell,t) = 0 & \text{C.F} \\ \left.\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0 \\ &u(x,0) = f(x) \end{aligned}\right\} & \text{C.I.} \end{cases}$$

• Se resuelve análogamente a la ec. del calor. Por el método de separación de variables se llega a que para cada $n \in \mathbb{N}$ y $a_n, b_n \in \mathbb{R}$, $u_n(x,t) = \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right)\left[a_n \cos\left(\frac{n\pi c t}{\ell}\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi c t}{\ell}\right)\right]$ es solución de la ED y las condiciones frontera.

• Para que también cumpla las cond. iniciales, se llega a que $b_n = 0 \ \forall n$ y que tomando los coeficientes a_n como los de la serie de Fourier de la extensión 2ℓ-periódica impar de f, se obtiene una sol que también verifica la c.i.

Scanned by CamScanner

$$\boxed{u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) \cos\left(\frac{n\pi c t}{\ell}\right)}$$ SOLUCIÓN DE LA EC. DE ONDAS.

donde $a_n = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) dx$.

• ¿Bajo qué condiciones es la solución? Notar que si F es la ext. impar de f, $u(x,t) = \frac{1}{2}\left(F(x-ct) + F(x+ct)\right)$.

<u>Teorema</u>: Si $f \in C^2[0,\ell] \Rightarrow u(x,t) = \sum \ldots$ es solución de la ec. de ondas.

<u>Definición</u>: Llamamos <u>energía total de la cuerda</u> a $E(t) := \int_0^{\ell} \Big(\underbrace{\frac{1}{2}\mu u_t^2}_{\text{E. cinética}} + \underbrace{\frac{T}{2} u_x^2}_{\text{E. potencial elástica}}\Big) dx$.

<u>Lema</u>: Si $u(x,t)$ es sol de la ec. de ondas, $E(t) = cte$, ie, el sistema es conservativo.

<u>Teorema</u> (Unicidad de la solución): Existe una única solución de la ecuación de ondas que satisfaga unas determinadas condiciones iniciales - frontera.

<u>ECUACIÓN DE LAPLACE</u>: $$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0}$$

<u>Definición</u>: Sea $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Se llama <u>laplaciano de f</u> a la función $\Delta f := \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}$.

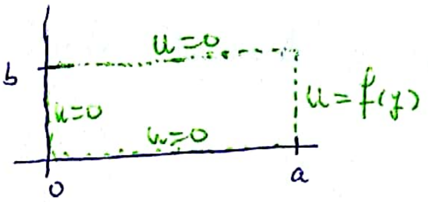
Si $\nabla f = \operatorname{grad} f$, entonces $\Delta f = \nabla f \cdot \nabla f \overset{\text{NOT}}{=} \nabla^2 f$.

• Entonces la ec. de Laplace es $\boxed{\Delta u = 0}$.

• El problema de resolver la ec. de Laplace que tiene unos valores conocidos sobre la frontera de una región R se llama <u>problema de Dirichlet</u>. Se puede resolver por el mét. de separación de variables si R es un rectángulo.

• Sea $R=(0,a)\times(0,b)$. Queremos resolver la ec. de Laplace bajo las condiciones de frontera

$$\begin{cases} u(x,0)=u(0,y)=u(x,b)=0 & \text{(i)} \\ u(a,y)=f(y) & \text{(ii)} \end{cases}$$



• Mediante el método de variables separadas se obtiene que $u_n(x,y)=\operatorname{senh}\left(\frac{n\pi x}{b}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$ son sol. de la ED y de (i) $\forall n\in\mathbb{N}$. De nuevo, cualquier CL de estas también es solución. En particular, tomando una CL con los coef. $\frac{1}{\operatorname{senh}\left(\frac{n\pi a}{b}\right)}\cdot c_n$, c_n coef. de Fourier de la ext. impar de f, cumple todas las condiciones, esto es:

$$\boxed{u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi x}{b}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right)}$$

SOLUCIÓN DE LA EC. DE LAPLACE,

donde $$b_n=\frac{2}{b\operatorname{senh}\left(\frac{n\pi a}{b}\right)}\cdot\int_0^{\ell} f(y)\cdot\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right)dy.$$