INTRODUCCIÓN : GEOMETRÍA DIFERENCIAL

Definición: Una estructura diferenciable en un esp. top X es una colección de $\mathbb{R}$-álgebras

$$\{ \mathcal{C}^\infty(V) \subset \mathcal{C}(V) \quad : V \text{ abto de } X \},$$

que llamaremos funciones diferenciables, que cumplen:

i) Dados abiertos $\{V_i\}$, el abto $V = \bigcup_i V_i$ y $f: V \to \mathbb{R}$, se tiene

$$f \in \mathcal{C}^\infty(V) \iff f_{|V_i} \in \mathcal{C}^\infty(V_i) \quad \forall i.$$

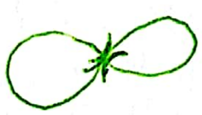
ii) Para cada punto $p \in X$ existe un entorno abto $V_p \subset X$, un abto $U \subset \mathbb{R}^n$ (para cierto $n \in \mathbb{N}$) y un homeomorfismo $H: V_p \to U$ tal que para cada abierto $V \subset V_p$ y cada función $f: V \to \mathbb{R}$ se verifica

$$f \in \mathcal{C}^\infty(H(V)) \iff f \circ H \in \mathcal{C}^\infty(V).$$

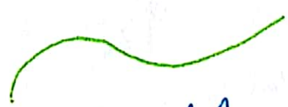
Las funciones $v_i := x_i \circ H$ son un sistema de coordenadas y $(V_p ; v_1 \dots v_n)$ es un abto coordenado.

Llamaremos variedad diferenciable a un esp. top Hausdorff y 2º contable con una estructura diferenciable.

Definición: Una aplicación diferenciable $\varphi: Y \to X$ se dice inmersión local en $y \in Y$ si $\varphi_*: T_yY \to T_{\varphi(y)}X$ es inyectiva. Se dice que φ es inmersión si es inyectiva e inmersión local en todo punto, en cuyo caso se dice que $\varphi(Y) \subseteq X$ es subvariedad inmersa. Si además, con la topología inducida por X, $\varphi: Y \longrightarrow \varphi(Y)$ es homeomorfismo, se dice que $\varphi(Y)$ es una subvariedad (regular) de X



subvariedad inmersa



subvariedad

Definición: Se dice que una curva $\sigma : I \to X$ es solución de la ecuación diferencial ordinaria (EDO) definida por el campo $D \in \mathcal{D}(X)$ cuando σ sea una curva integral de D, i.e., cuando $\sigma_*\left((\partial_t)_{t_0}\right) = D_{\sigma(t_0)}$, $\forall t_0 \in I$.

- Si en cierto abierto coordenado $D = \sum f_i \partial_i$, y $\sigma(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$, entonces

$$\begin{cases} x_1'(t) = f_1(x_1(t), \dots, x_n(t)) \\ \vdots \\ x_n'(t) = f_n(x_1(t), \dots, x_n(t)) \end{cases}$$

Definición: Se dice que $f \in \mathcal{C}^\infty(X)$ es integral primera de $D \in \mathcal{D}(X)$ si $Df = 0$.

Proposición: Toda integral primera es constante a lo largo de las curvas integrales. Es una ley de conservación.

Definición: El fibrado tangente de X es $TX := \coprod_{p \in X} T_pX = \{D_p \in T_pX : p \in X\}$. Tenemos la proyección regular $\pi : TX \to X$, $\pi(D_p) = p$. Cada sección $\pi^{-1}(p) \equiv T_pX$. Es una variedad diferenciable de dim $2n$, y si para cada $D_p \in TX$,

$$x_i(D_p) := x_i(p) \equiv \text{coord. } i\text{-ésima de } p \quad \left(x_i(D_p) \overset{\text{not}}{=} \pi^* x_i(D_p)\right)$$

$$z_i(D_p) := D_p x_i \equiv \text{'' '' '' } D_p,$$

entonces $(x_1 \dots x_n, z_1 \dots z_n)$ son coordenadas. En concreto para cada $V \subset X$ difeomorfo por (x_i) a U, tenemos

$$H = (x_i; z_i) : \pi^{-1}(V) \xrightarrow{\sim} U \times \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{2n}.$$

Definición. Una ecuación de segundo orden en X es un campo tangente $Z \in \mathcal{D}(TX)$ tal que para cada pto $D_p \in T_pX$, $\pi_*(Z_{D_p}) = D_p$

- (Expresión en coordenadas): En el abierto coordenado $(\pi^{-1}(V), (x_i; z_i))$, sea $Z = \sum f_i \partial_{x_i} + \sum g_i \partial_{z_i}$. Pero además, $f_i = z_i$, luego las curvas integrales de Z, $\sigma(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t), z_1(t), \dots, z_n(t))$ satisfacen

$$\begin{cases} x_i'(t) = z_i(t) \\ z_i'(t) = g_i(x_1(t), \dots x_n(t), z_1(t) \dots z_n(t)) \end{cases},$$

i.e., el sist. de ec. de 2º orden

$$\left\{ x_i'' = g_i(x_1(t), \dots x_n(t), x_1'(t), \dots x_n'(t)) \right.$$

Definición: Se llama fibrado cotangente a $T^*X := \coprod_{p\in X} T_p^*X = \{\omega_p \in T_p^*X : p \in X\}$.

De nuevo tenemos $\pi: T^*X \to X$ y en un abierto coordenado (V, x_i), si para cada $\omega_p \in \pi^{-1}(V)$

$$x_i(\omega_p) := x_i(p) \quad , \quad \equiv \text{coord. } i\text{-ésima de } p$$
$$z_i(\omega_p) = \omega_p\left((\partial x_i)_p\right) \quad \equiv \quad " \quad " \quad " \quad \omega_p$$

se tiene que $(x_1 .. x_n, z_1 .. z_n)$ son coordenadas. En concreto $H = (x_i, z_i) : \pi^{-1}(V) \xrightarrow{\sim} U \times \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{2n}$.

Teorema: La variedad diferenciable T^*X tiene una 1-forma canónica $\lambda \in \Omega(T^*X)$, llamada forma de Liouville, definida en cada punto $\omega_p \in T^*X$ como

$$\boxed{\lambda_{\omega_p} := \pi^*\omega_p} \quad , \qquad \begin{array}{l} \pi: T^*X \to X \quad , \quad \omega_p \mapsto p \\ \pi_*: T_{\omega_p}(T^*X) \to T_pX \\ \pi^*: T_p^*X \to T_{\omega_p}^*(T^*X) \ , \ \omega_p \mapsto \pi^*(\omega_p) = \omega_p \circ \pi_* \end{array}$$

En coord., $\lambda = \Sigma$

GRUPOS UNIPARAMÉTRICOS

Definición: Una aplicación diferenciable $\tau: \mathbb{R} \times X \to X$ es un grupo uniparamétrico o flujo simple,

i) $\tau(0,p) = p \quad \forall p \in X \qquad \equiv \tau_0 = Id$

ii) $\tau(t, \tau(s,p)) = \tau(t+s, p) \qquad \forall t,s \in \mathbb{R},\ p \in X \qquad \equiv \tau_{s+t} = \tau_s \circ \tau_t$

• Si $\overset{\tau(t,\cdot)}{\tau_t} : X \to X$, y $\tau_p := \tau(\cdot\, ; p) : \mathbb{R} \to X$, tenemos que τ_t es difeomorfismo.

• $\tau(t,p)$ es el punto de X que llega p en el tiempo t.

Ejemplos: 1) Traslaciones: $\tau(t,p) = p + te_i$

2) Homotecias $\tau(t,p) = e^t \cdot p$

Definición: Sea $W \subset \mathbb{R} \times X$ tal que $\{0\} \times X \subset W$, y para cada $p \in X$ sea $I(p) := \{t \in \mathbb{R} : (t,p) \in W\}$ que sea un intervalo abierto. Un grupo uniparamétrico local es una aplicación $\tau: W \subset \mathbb{R} \times X \to X$ tal que

i) $\tau(0,p) = p \qquad \equiv \tau_0 = Id$

ii) $s \in I(q) \Leftrightarrow t+s \in I(p)$, $t \in I(p)$, $q = \tau(t,p)$.

y $\tau(s, \tau(t,p)) = \tau(s+t, p) \qquad \equiv \tau_{s+t} = \tau_s \circ \tau_t$.

donde $V_t = \{p \in X : (t,p) \in W\}$, $\tau_t : V_t \to V_t$ y $\tau_t(p) = \tau(t,p)$.

Definición: Se llama generador infinitesimal de un grupo uniparamétrico local τ al campo tangente $D \in \mathcal{D}(X)$ tal que para cada $f \in \mathcal{C}^\infty(X)$ y $p \in X$,

$$Df(p) := \lim_{t \to 0} \frac{f(\tau_t(p)) - f(p)}{t}$$

Se sigue que τ_p es una curva integral de D que pasa por p en 0. Además τ_t deja invariante a su gen. inf., i.e., $\tau_{t*}(D) = D$.

Teorema (de Existencia y Unicidad): Sea $D \in \mathcal{D}(X)$. Para cada $p \in X$ existe una única curva integral máxima $\tau_p : I(p) \to X$, con $I(p)$ un intervalo abierto conteniendo 0, tal que $\tau_p(0) = p$.

Teorema: Se tiene una correspondencia biunívoca

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{grupos uniparamétricos} \\ \text{locales} \end{array} \right\} = \mathcal{D}(X)$$

$$\tau \longmapsto \text{generador infint.}$$

$$\begin{array}{c} \tau : W_D \to X \\ (t,p) \mapsto \tau_p(t) \end{array} \longleftarrow D$$

donde dado $D \in \mathcal{D}(X)$, $W_D := \{(t,p) \in \mathbb{R} \times X : t \in I(p)\}$.

Ejemplos:

1) Traslaciones: campo: $D = \partial_{x_i}$, g.u.: $\tau(t,p) = p + te_i$, int. prim.: x_j $(j \neq i)$

2) Homotecias: campo: $D = \sum x_i \partial_i$, g.u.: $\tau(t,p) = e^t \cdot p$, int. prim.: $\frac{x_i}{x_j}$

3) Giros: campo: $D = -x_j \partial_i + x_i \partial_j$, g.u.: $\tau(t,p) = \begin{pmatrix} \text{matriz de giro de} \\ \text{ángulo } t \end{pmatrix} \cdot p$, x_k, $x_i^2 + x_j^2$, $(i \neq k \neq j)$.

Definición: Sea $D \in \mathfrak{D}(X)$ de grupo uniparamétrico local τ_t. Dado $T \in \mathcal{T}^q_p(X)$, se llama derivada de Lie de T con D al tensor (p,q)

$$D^L T := \lim_{t \to 0} \frac{\tau_t^* T - T}{t} .$$

Proposición (Propiedades):

1) $D^L f = Df$
2) $D^L \bar{D} = [D, \bar{D}]$
3) $D^L(df) = d(Df)$
4) $D^L(T \otimes T') = D^L T \otimes T' + T \otimes D^L T'$
5) $(D^L \omega)(\bar{D}) = D(\omega(\bar{D})) - \omega([D,\bar{D}])$
6) $(D^L T)(D_i, \omega_j) = D(T(D_i, \omega_j)) - \sum_i T(\dots D^L D_i, \dots, \omega_j) - \sum_j T(D_i, \dots D^L \omega_j \dots)$
7) $(D + \bar{D})^L = D^L + \bar{D}^L$
8) $[D, \bar{D}]^L = [D^L, \bar{D}^L]$
9) $D^L(\omega_p \wedge \omega_q) = (D^L \omega_p) \wedge \omega_q + \omega_p \wedge (D^L \omega_q)$
10) $D^L[E,F] = [D^L E, F] + [E, D^L F]$.

Teorema: Sea $\Omega^\bullet(X) := \bigoplus_p \Omega^p(X)$ el álgebra exterior de X. Existe un único operador $\mathbb{R}$-lineal

$$d : \Omega^\bullet(X) \longrightarrow \Omega^\bullet(X)$$

llamado diferencial exterior, que cumple:

1) d es una aplicación homogénea de grado 1: $d(\Omega^p(X)) \subset \Omega^{p+1}(X)$.
2) d coincide con la diferencial ordinaria en $\mathcal{C}^\infty(X)$
3) d es una antiderivación: $d(\omega_p \wedge \omega_q) = d\omega_p \wedge \omega_q + (-1)^p \omega_p \wedge d\omega_q$.
4) $d \circ d = 0$.

Proposición (Propiedades)

1) $\boxed{D^L = d\circ i_D + i_D\circ d}$ (Fórmula de Cartan)

2) $D^L\circ d = d\circ D^L$

3) Si $\omega\in\Omega(X)$, $\boxed{d\omega(D_1,D_2) = D_1(\omega(D_2)) - D_2(\omega(D_1)) - \omega([D_1,D_2])}$

(Fórmula de Cartan para las 1-formas)

4) $\varphi^*(d\omega) = d(\varphi^*\omega)$.

Teorema: Sea la VD T^*X, y λ la forma de Liouville, $\lambda\in\Omega(T^*X)$. Su diferencial $\Lambda := d\lambda\in\Omega^2(T^*X)$ es una 2-forma que define un isomorfismo canónico

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D}(T^*X) & = & \Omega(T^*X) \\ D & \longmapsto & i_D\Lambda \\ \partial_{x_i} & \longmapsto & -dz_i \\ \partial_{z_i} & \longmapsto & dx_i \end{array}$$

En coordenadas, $\Lambda = \sum dz_i\wedge dx_i$, y si $D = \sum f_i\,\partial_{x_i} + \sum g_i\,\partial_{z_i}$, $i_D\Lambda = \sum g_i\,dx_i - \sum f_i\,dz_i$.

Definición: Se dice que $D\in\mathcal{D}(T^*X)$ es un campo Hamiltoniano si la 1-forma $i_D\Lambda$ es exacta, i.e., si $i_D\Lambda = -dh$ para alguna $h\in\mathcal{C}^\infty(T^*X)$, llamada Hamiltoniano asociado al campo D.

• Si D es Hamiltoniano, h es integral primera suya, $Dh=0$, y en coordenadas

$$D = \sum h_{z_i}\,\partial_{x_i} - \sum h_{x_i}\,\partial_{z_i}$$

y sus curvas integrales satisfacen las ecuaciones de Hamilton:

$$\left.\begin{array}{l} x_i' = h_{z_i}(x,z) \\ z_i' = -h_{x_i}(x,z) \end{array}\right\}$$

Definición: Una estructura simpléctica en una variedad dif X es una 2-forma ω_2 cerrada y no singular (sin radical). Lo anterior dice q. si X es una VD cualquiera, T^*X es una variedad simpléctica.

INTEGRACIÓN

Teorema (Stokes): Sea X una VD orientada, $\Omega \subseteq X$ una variedad orientada de dim n. Si $\omega \in \Omega^{n-1}(X)$ cumple que $\mathrm{sop}(\omega) \cap \Omega$ es compacto, entonces

$$\boxed{\int_\Omega d\omega = \int_{\partial\Omega} \omega}$$

Corolario (Teorema de Green): Sea $A \subseteq \mathbb{R}^2$ un abierto con $\partial A = \partial \bar{A}$ subvariedad de dim 1 de $\mathbb{R}^2$. Para $P, Q \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$, si $C = \bar{A}$ compacto ó P, Q de sop compacto,

$$\int_C (Q_x - P_y)\, dx\, dy = \int_{\partial C} (P\,dx + Q\,dy) .$$

Proposición: Sea (X, g) una var. riem. orientada, y $(U; u_1, \ldots, u_n)$ un abierto coord. tal que $du_1 \wedge \ldots \wedge du_n$ define la orientación. Si $g = \sum g_{ij}\, dx_i \otimes dx_j$, entonces la forma de volumen de X es

$$\omega_X = \sqrt{\det(g_{ij})}\; du_1 \wedge \cdots \wedge du_n .$$

APLICACIONES A LA FÍSICA

Definición: Sea $(X, [\omega], \omega_X)$ una var. ori. riem. La divergencia de un campo $D \in \mathcal{D}(X)$ es la función $\mathrm{div}\, D \in \mathcal{C}^\infty(X)$ tal que $D^L \omega_X = (\mathrm{div}\, D)\, \omega_X$. En $\mathbb{R}^n$, $\mathrm{div}(\sum f_i \partial_i) = \sum \frac{\partial f}{\partial x_i}$.

Definición: Dada una hipersuperficie $S = \partial\Omega$ en una VRO, con ∂_n campo normal unitario que apunta hacia fuera, se llama flujo de $D \in \mathcal{D}(X)$ a través de S a $\int_S D \cdot \partial_n \left(= \int_S (D \cdot \partial_n)\, \omega_S\right) = \int_S i_D \omega_X$, porque $(i_D \omega_X)_{|S} = f \cdot \omega_S$, y $f = \omega_X(\sum (D \cdot D_i) D_i, D_2, \ldots D_n) = D \cdot \partial_n$, , $D_1 = \partial_n$

Teorema (de la Divergencia): El flujo de un campo $D \in \mathfrak{X}(X)$ a través de S, $S = \partial \Omega$, es la integral de la divergencia del campo D en Ω:

$$\boxed{\int_S D \cdot \partial_n = \int_\Omega \operatorname{div} D}$$

Teorema (Liouville): Sea V abierto de (X, ω_X) y $D \in \mathfrak{X}(X)$ de g.u.l. τ_t. Si $V_t := \tau_t(V)$, y $V(t) := \operatorname{Vol}(V_t)$, entonces

$$V'(t) = \int_{V_t} \operatorname{div} D .$$

Definición: Se llama circulación de $D \in \mathfrak{X}(X)$ sobre una curva orientada C a $\int_C i_D g$.

Proposición: Sea $\mathbb{R}^3$ con su métrica estándar, y $\omega_3 = dx \wedge dy \wedge dz$. Tenemos el siguiente isomorfismo de $\mathcal{C}^\infty(X)$-módulos

$$\begin{aligned} \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3) &= \Omega^2(\mathbb{R}^3) \\ D &\longmapsto i_D \omega_3 \end{aligned}$$

Definición: Se llama rotacional de $D \in \mathfrak{X}(X)$ al único campo $\operatorname{rot} D \in \mathfrak{X}(X)$ que se corresponde por dicho isomorfismo con la 2-forma $d(i_D g)$, i.e., tal que $i_{\operatorname{rot} D}\, \omega_3 = d(i_D g)$. En coordenadas,

si $D = f \partial_x + g \partial_y + h \partial_z$, $\quad \operatorname{rot} D = (h_y - g_z)\partial_x + (f_z - h_x)\partial_y + (g_x - f_y)\partial_z$.

- Si S es una sup. orientada en $\mathbb{R}^3$, de borde una curva C, por Stokes la circulación es

$$\int_C i_D g = \int_S d(i_D g) = \int_S i_{\operatorname{rot} D}\, \omega_3$$

Este es el

Teorema (del Rotacional): En el espacio $\mathbb{R}^3$, la circulación a lo largo de una curva cerrada C, frontera de una superficie S, es igual al flujo del rotacional a través de S.

$\circ$ (Interpretación física de la integral compleja). Sea $f = u + iv$, con $u, v \in \mathcal{C}^\infty(U)$, $U \subseteq \mathbb{R}^2$.

Para $z = x + iy$, definimos $dz := dx + i\,dy$, y sea $D := u\partial_x - v\partial_y \in \mathcal{D}(U)$ el campo tangente asociado a f. Si $\underset{\partial\Omega = C}{C}$ es una curva bien orientada, y $\omega_2 = dx \wedge dy$, entonces

$$\int_C f(z)\,dz = \int_\Omega \operatorname{rot} D\ \omega_2 + i\int_\Omega \operatorname{div} D\ \omega_2 = \int_a^b f(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t)\,dt ,$$

donde $D = u\partial_x - v\partial_y$, $\operatorname{div} D = u_x - v_y$; y $\underset{\in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)}{\operatorname{rot} D} \overset{\text{not}}{=}$ componente no nula del rotacional $\operatorname{rot} D \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$

porque $\operatorname{rot} D = (-v_x - u_y)\,\partial_z$, así que $\operatorname{rot} D := -v_x - u_y$. Total, se tiene que

$$f \text{ holomorfa} \iff \exists \lim_{w \to 0} \frac{f(z+w) - f(z)}{w} \iff \begin{matrix} u, v \in \mathcal{C}^1(U) \\ + \\ \underbrace{\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases}}_{\text{Ecs. Cauchy-Riemann}} \end{matrix} \iff \begin{matrix} u, v \in \mathcal{C}^1(U) \\ + \\ \begin{cases} \operatorname{div} D = 0 \\ \operatorname{rot} D = 0 \end{cases} \end{matrix} .$$

y además se tiene el Teorema de Cauchy: $\int_C f(z)\,dz = 0$ para f holomorfa y C curva cerrada borde de una cierta variedad con borde.

Definición: Sea (X, g) v. riem., así que tenemos el isomorfismo

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(X) &= \Omega(X) \\ D &\longmapsto g(D, \cdot) \end{aligned}$$

Se llama gradiente de una función $f \in \mathcal{C}^\infty(X)$ al único campo $\operatorname{grad} f \in \mathcal{D}(X)$ que se corresponde con $df \in \Omega(X)$, i.e., tal que $\forall D \in \mathcal{D}(X)$ $(\operatorname{grad} f) \cdot D = df(D) = Df$.

En $(\mathbb{R}^n, g_{\text{euclid.}})$, $\operatorname{grad} f = \sum \frac{\partial f}{\partial x_i}\partial_{x_i}$.

Definición: Se llama laplaciano de $f \in \mathcal{C}^\infty(X)$ a $\Delta f := \operatorname{div} \operatorname{grad} f$. En $\mathbb{R}^n$, $\Delta f = \sum \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$.

I : LA ECUACIÓN DE LAPLACE

Definición: En $\mathbb{R}^n$, llamaremos operador de Laplace ó laplaciano a $\Delta := \sum_{i=1}^{n} \partial_{x_i x_i}$. Diremos que una función $u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ es armónica si verifica la ecuación de Laplace:

$$\boxed{\Delta u = 0}$$

- (Expresión en coordenadas): En un abto coordenado $(U; r, u_2, \ldots, u_n)$, donde $r = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$, tenemos que $\Delta = \partial_{rr} + \frac{n-1}{r}\partial_r + (\text{operador que depende de } u_2, \ldots u_n)$.

1) $(\mathbb{R}^2; r, \theta)$: $\boxed{\Delta = \partial_{rr} + \frac{1}{r}\partial_r + \frac{1}{r^2}\partial_{\theta\theta}.}$, y $\Delta\theta = 0$

2) $(\mathbb{R}^3; r, \theta, \varphi)$: $\boxed{\Delta = \partial_{rr} + \frac{2}{r}\partial_r + \frac{1}{r^2}\left(\partial_{\theta\theta} + \frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta}\partial_{\varphi\varphi} + \frac{1}{\operatorname{tg}\theta}\partial_\theta\right)}$, y $\Delta\varphi = 0$

¡OJO! El ángulo no es el de siempre: $\begin{cases} x = r \operatorname{sen}\theta \cos\varphi \\ y = r \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$.

- $u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ armónica $\Leftrightarrow u'' = 0 \Rightarrow u(x) = ax + b$.
- $u = u(r) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ armónica $\overset{(n \neq 1)}{\Leftrightarrow} u(r) = \begin{cases} A \ln r + B, & n = 2 \\ \frac{A}{r^{n-2}} + B, & n > 2 \end{cases}$
- Si $f = u + iv$ holomorfa en $\mathbb{C}$, $f'(z) = u_x + iv_x = v_y - iu_y$ y así $\Delta u = 0 = \Delta v$.

Definición: Si $u, v \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$ tal que sea $f = u + iv \in H(\mathbb{C})$, se llaman conjugadas armónicas.

Por lo de antes estas son armónicas $e^x \cos y$, $e^x \operatorname{sen} y$ (de e^z), $r^n \cos n\theta$, $r^n \operatorname{sen} n\theta$ (de z^n)... $\ln r$, $\frac{y}{x}$ (de $\ln z$)...

• Entonces si u es la parte real o im. de una fn. holomf., es armónica. ¿Y el recíproco? También:

Teorema: Una función $u \in \mathcal{C}^{\infty}(\mathcal{U})$, $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^2$ simplemente conexo, es armónica $\Leftrightarrow$ u es la parte real o imaginaria de una función holomorfa en $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$.

TRANSFORMACIONES CONFORMES

Definición: Dados abiertos $\mathcal{U}, \mathcal{V} \subset \mathbb{R}^n$, se dice que un difeomorfismo $F: \overset{\omega, g}{\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n} \longrightarrow \overset{\omega', g'}{\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^n}$ es una transformación conforme si conserva la orientación y los ángulos, i.e, cuando

i) $[F^* \omega_n'] = [\omega_n]$

ii) $F^* g'$ y g son proporcionales

Lema: Una aplicación lineal $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ conserva ángulos $\Leftrightarrow$ sus columnas son ortogonales y de igual módulo.

Proposición: Sea $F = (u, v) : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathcal{V} \subset \mathbb{R}^2$.

$$F \text{ es conforme} \Leftrightarrow F \text{ es difeomorfismo y } f := u + iv \text{ holomorfa}$$

En tal caso, F lleva (vía F^* y F^{*-1}) funciones armónicas en funciones armónicas.

TRANSFORMACIONES EN $\mathbb{R}^n$

• *Ejemplos*: Traslaciones, giros, dilataciones, ...

Teorema: Sea F una auto-afinidad en el $\mathbb{R}^n$, $F(x) = Ax + b$. Son equivalentes:

1) g armónica $\Rightarrow F^* g$ armónica.

2) F es una semejanza (i.e, $F(x) \cdot F(y) = \lambda^2 x \cdot y$, i.e, $|F(x)| = \lambda \cdot |x|$, $\lambda > 0$

3) $A A^t = \lambda^2 I d$

4) F conserva los ángulos.

Teorema (Caracterización de los difeom. que conservan funciones armónicas): Sea $F=(u_i)$ un difeomorfismo. Son equivalentes:

1) F conserva las funciones armónicas.

2) $u_1,\dots,u_n$ son armónicas y F_{*_p} es una semejanza $\forall p$.

3) $\sum_{i=1}^{n} \partial_{x_i x_i} = \lambda^2(x) \sum_{i=1}^{n} \partial_{u_i u_i}$

4) Si $n \neq 2$, F es una semejanza; y si $n=2$, es una transformación conforme (quizás compuesta con una reflexión resp. al eje x).

POTENCIALES GRAVITATORIO Y ELÉCTRICO

Definición: Sea $F \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$, que llamaremos fuerza. Se llama trabajo realizado a lo largo de una curva orientada C a

$$\int_C \omega_F \quad , \quad \omega_F := i_F g \quad , \quad g = \sum dx_i \otimes dx_i ,$$

es decir, a la circulación de F a lo largo de C.

• En coordenadas, si $F = \sum f_i \partial_{x_i}$ y $\sigma : [0,r] \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $\sigma(0)=p$, $\sigma(r)=q$ es una parametrización de C, t es coordenada sobre C, así que si $T = \sigma_*(\partial_t)$, en lo que $\partial_t = T$ y

$$\int_C \omega_F = \int_0^r F_{\sigma(t)} \cdot T_{\sigma(t)} \, dt = \int_0^r \sum_{i=1}^{n} f_i[\sigma(t)] \cdot x_i'(t) \, dt .$$

Definición: Se dice que una fuerza $F \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ es conservativa si el trabajo realizado a lo largo de una curva que une dos puntos no depende de la curva.

Teorema: Un campo F es conservativo $\iff$ F es un gradiente.

Corolario: En $\mathbb{R}^3$, son equivalentes:

1) $F \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3)$ conservativo
2) F es un gradiente
3) $\operatorname{rot} F = 0$.

Definición: Dada una fuerza conservativa $F \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$, será $F = -\text{grad}\, u$ para cierta $u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$, que diremos que es el potencial asociado a F. En tal caso, el trabajo a lo largo de dos puntos p y q es $\int_p^q \omega_F = u(q) - u(p)$, así que si u se anula en el infinito, el potencial se interpreta como "el trabajo que se realiza al desplazar una masa unitaria desde un punto $x \in \mathbb{R}^n$ al infinito.

• En la mecánica Newtoniana, una masa M situada en el origen de coordenadas produce en cada $x \in \mathbb{R}^3$ una fuerza (por u. de masa)

$$F_x = -G\frac{M}{r^2}\left(\sum \frac{x_i}{r}\partial_{x_i}\right) \left[= -G\frac{M}{r^3}\vec{x} \quad \left(\vec{x} = \sum x_i \partial_i\right)\right] = \text{grad}\, \frac{GM}{\sqrt{\sum x_i^2}} = -\text{grad}\, u, \text{ para}$$

$u = -G\frac{M}{r}$, y $r = \sqrt{\sum x_i^2}$. En general será $G = 1$.

Fuera de la masa el potencial Newtoniano es una función armónica, $\Delta u = 0$, y $\text{div}\, F = 0$.

Para masas $m_1 \dots m_r$ en puntos $p_1, \dots, p_r$, será $u = -\sum \frac{m_i}{r_i}$ y $F_x = \sum m_i \frac{p_i - x}{r_i^3}$, y $r_i = \|p_i - x\|$ y se tiene que

$$\Delta u = 0 \text{ en } \mathbb{R}^3 - \{p_1 \dots p_r\}, \quad \lim_{x \to p_i} u = \infty, \quad \lim_{x \to \infty} u = 0.$$

• En la ley de Coulomb, una carga q (positiva o negativa) situada en un punto $p \in \mathbb{R}^3$, produce en cada $x \in \mathbb{R}^3$ una fuerza por u. de carga $E_x = K\frac{q}{\|x-p\|^2} \cdot \frac{x-p}{\|x-p\|}$. A tal campo $E \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3)$ se le denomina campo electrostático. El potencial electrostático es la función $u = K\frac{q}{r}$, con $r = \|x-p\|$, para la que se tiene que $E = -\text{grad}\, u$. En general será $K = 1$.

Para un n° finito de cargas $q_1 \dots q_r$ en ptos $p_1 \dots p_r$, será $E_x = \sum q_i \frac{x - p_i}{r_i^3}$, $r_i = \|x - p_i\|$, y se cumple que $E = -\text{grad}\, u$, con $u = \sum \frac{q_i}{r_i}$.
Como antes fuera de las cargas $\Delta u = 0$ y $\text{div}\, E = 0$.

• (Flujo de un campo electrostático a través de una superficie): Una carga en el origen produce $E_x = \frac{q}{\|x\|^2} N$, donde $N = \frac{H}{|H|}$, H homotecia. Así que el flujo a través de una esfera S_r es $\int_{S_r} E \cdot \partial_n = 4\pi q$, y no depende del radio.
Para una superficie S cualquiera; $S = \partial \Omega$
- Si $0 \in \Omega$, el flujo es $4\pi q$
- Si $0 \notin \Omega$, el flujo es 0.

Potencial de una densidad (distribución continua) de carga: Si en lugar de un nº finito de cargas tenemos una densidad de carga $\rho \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3)$, tenemos el potencial $u(x) := \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho(y)}{\|x-y\|}\, dy$ y el campo electrostático $E := \sum e_i \partial_{x_i}$, con $e_i(x) := \int_{\mathbb{R}^3} \rho(y) \frac{x_i - y_i}{\|x-y\|^3}\, dy$. Veremos que se satisface la ecuación de Gauss $\operatorname{div} E = 4\pi\rho$ y la ecuación de Poisson $\Delta u = -4\pi\rho$, y la fórmula integral de Gauss $\int_\Omega \operatorname{div} E = \int_S \partial_n \cdot E = 4\pi \int_\Omega \rho$.

Lema: Sea K un cerrado y ρ integrable en K resp. una medida μ. Si $r(x,y) := \|x-y\|$, entonces las funciones

$$w_1(x) := \int_K \frac{\rho}{r}\, d\mu, \qquad w_2(x) := \int_K \frac{\rho}{r^2}\, d\mu, \qquad w_3(x) := \int_K \frac{(x_i - y_i)\rho}{r^3}\, d\mu$$

son $\mathcal{C}^\infty(K^c)$ y se pueden derivar bajo el signo integral en K^c; y w_1 es armónica en K^c.

Corolario: Si $\rho \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^3) \Rightarrow$ su potencial electrostático $u \in \mathcal{C}^\infty(K^c)$, con $K := \operatorname{sop} \rho$, y en K^c

$$u_{x_i}(x) = -\int \rho \frac{x_i - y_i}{\|x-y\|^3}\, dy, \qquad \Delta u = 0,$$

luego en K^c $E = -\operatorname{grad} u$ y u es armónica. También es cierto si se integra en una superficie o en una curva.

POTENCIAL DE CAPA SIMPLE

Definición: Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie, de campo normal exterior ∂_n y $\rho \in \mathcal{C}^\infty(S)$. Se llama potencial superficial de capa simple de densidad de carga ρ a $u(x) := \int_S \frac{\rho(s)}{\|x-s\|}\, ds$, $ds = i_{\partial_n} \omega_3 = \omega_S$.

Teorema: Si ρ es integrable y acotada, el potencial simple es continuo en $\mathbb{R}^3$ y fuera de S es una función $\mathcal{C}^\infty$ y armónica:

$$u \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^3), \qquad u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3 - S), \qquad \Delta u = 0 \text{ en } \mathbb{R}^3 - S.$$

DIPOLO

• Sean una carga q situada en el origen y $-q$ situada en $v\in\mathbb{R}^3$, con $\|v\|$ muy pequeño y q grande en módulo, de modo que $p := qv$ sea cte (que llamaremos momento del dipolo) si movemos la carga $-q$ ó acercamos las cargas. En tal caso $u(x) \approx \frac{p\cdot x}{\|x\|^3}$, lo que justifica la siguiente

Definición: Se llama función potencial de un dipolo eléctrico de momento p a $u(x) := \frac{p\cdot x}{\|x\|^3}$ ($p\cdot x$ es producto escalar).

Lema: $\Delta u = 0$ en $\mathbb{R}^3 - 0$.

ECUACIÓN DE POISSON: $\boxed{\Delta u = -4\pi\rho}$

Lema: Si $r=\sqrt{\sum x_i^2}$, y $B[0,L] = \{r\le L\}$, entonces

$$\int_{B[0,L)} \frac{1}{r^n}\, dy_1 dy_2 dy_3 = \begin{cases} 2\pi L^2, & n=1 \\ 4\pi L, & n=2 \\ \infty, & n\geq 3. \end{cases}$$

Proposición: Si ρ es integrable y acotada en los compactos, y f es una de las siguientes funciones:

$$\frac{1}{\|x-y\|}, \quad \frac{1}{\|x-y\|^2}, \quad \frac{x_i-y_i}{\|x-y\|^3},$$

entonces la función $u(x) := \int f(x,y)\rho(y)\,dy$ es continua

Teorema: Si ρ es integrable y acotada en los compactos, la función potencial

$$u(x) := \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho(y)}{\|x-y\|}\,dy$$

es de clase $\mathcal{C}^1$ y $E = -\text{grad}\, u$ (las derivadas entran en la integral).

* **Teorema** (Ecuación de Poisson): Si ρ es integrable, acotada en los compactos y en un abierto es de clase $\mathcal{C}^1$, entonces en tal abierto $u \in \mathcal{C}^2$ y se verifica

$$\boxed{\Delta u = -4\pi\rho} \qquad \text{(Ecuación de Poisson)}$$

Corolario I: Si $\rho \in \mathcal{C}^1_c(\mathbb{R}^3) \Rightarrow u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^3)$, en todo punto se tiene que $\Delta u = -4\pi\rho$ y el potencial de ρ_{yi} es $u_{xi} = \int \frac{\rho_{yi}}{\|x-y\|}\, dy$.

Corolario II: Si $\rho \in \mathcal{C}^k_c(\mathbb{R}^3) \Rightarrow u \in \mathcal{C}^{k+1}(\mathbb{R}^3)$ y $\Delta u = -4\pi\rho$.

Corolario III: Si $\rho \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}^3)$ y es integrable $\Rightarrow u \in \mathcal{C}^{k+1}(\mathbb{R}^3)$ y $\Delta u = -4\pi\rho$.

Teorema: Si ρ es integrable, acotada en los compactos y se anula en el ∞ $\Rightarrow$ u se anula en el ∞.

Corolario: Si $\rho \in \mathcal{C}^1_c(\mathbb{R}^3)$, su campo de fuerzas Newtoniano-Electrostático asociado E se anula en el ∞.

- En el infinito, el potencial de una densidad con sop compacto es $u(x) \approx \frac{q}{\|x\|}$, $q = \int_K \rho$, i.e., como si fuera una carga puntual con esa carga. En concreto:

Teorema: Si ρ es acotada y de soporte compacto K, y $q := \int_K \rho$, entonces el potencial cumple que

$$\lim_{\|x\| \to \infty} \|x\| \cdot u(x) = q.$$

PROBLEMAS DE DIRICHLET

- $\Delta u = 0$ puede entenderse como el estado estacionario de una placa, varilla, ... con temperaturas ctes en los bordes. A los distintos problemas (dependiendo de las condiciones frontera) se les llaman:

  - Condición frontera de Dirichlet: $u(x) = f(x)$, $x \in \partial U$
  - Condición frontera de Neumann: $\partial_n u(x) = f(x)$, $x \in \partial U$
  - Condición frontera mixta: $[f_1 u + f_2 \partial_n u](x) = f(x)$, $x \in \partial U$

donde u está definida en $\overline{U} = U \cup \partial U$.

<u>Teorema</u> (Principio del Máximo): Si $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ es un abierto acotado y $u \in \mathcal{C}(\overline{\mathcal{U}})$, y $\Delta u = 0$ en $\mathcal{U}$, entonces implica que

$$M_1 \le u \le M_2 \quad \text{en } \partial\mathcal{U} \quad \Longrightarrow \quad M_1 \le u \le M_2 \quad \text{en } \overline{\mathcal{U}}.$$

• Esto dice que una membrana tensa estática no puede estar abultada ni hacia arriba ni hacia abajo, o que un objeto con una temperatura invariante en el tiempo tiene las temperaturas extremas en su borde.

<u>Teorema</u> (Unicidad del Problema de Dirichlet): Si existe solución $u \in \mathcal{C}(\overline{\mathcal{U}}) \cap \mathcal{C}^2(\mathcal{U})$, $\mathcal{U}$ abierto y $\overline{\mathcal{U}}$ compacto, del problema

$$\begin{cases} \Delta u = F, & x \in \mathcal{U} \\ u(x) = f(x), & x \in \partial\mathcal{U} \end{cases}$$

entonces es <u>única</u>.

<u>Teorema</u> (Unicidad de Solución de la Ecuación de Poisson): El potencial $u(x) := \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho(y)}{\|x-y\|}\,dy$ de una densidad de masa o carga ρ de clase $\mathcal{C}^1$, integrable, y que se anula en el ∞, es la <u>única</u> función que satisface la ec. de Poisson y se anula en el ∞.

<u>Corolario</u>: Si $u \in \mathcal{C}_c^\infty$, entonces u es el potencial de la densidad $\rho := -\frac{\Delta u}{4\pi}$.

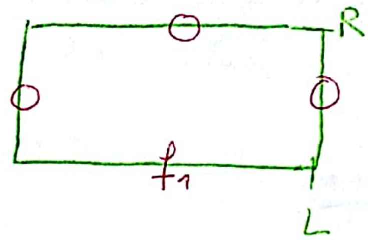
<u>Teorema</u>: El campo $E = -\operatorname{grad} u$ de densidad de carga $\rho \in \mathcal{C}_c^1(\mathbb{R}^3)$ y potencial u es el único que satisface las propiedades

1) $\operatorname{rot} E = 0$
2) E se anula en el ∞
3) $\operatorname{div} E = 4\pi\rho$.

SOLUCIONES AL PROBLEMA DE DIRICHLET

Teorema (Problema de Dirichlet en un rectángulo) : Sea el rectángulo $[0,L]\times[0,R] \subset \mathbb{R}^2$, y el problema de Dirichlet

$$\left.\begin{array}{ll} \Delta u = 0 & \\ u(x,0) = f_1 & \\ u(x,R) = 0 & 0<x<L \\ u(0,y) = 0 & \\ u(L,y) = 0 & 0<y<R \end{array}\right\} (*)$$



con f_1 integrable y $\mathcal{C}^1$

Entonces la función

$$\boxed{u(x,y) := \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{\operatorname{senh}[\lambda_n(R-y)]}{\operatorname{senh}(\lambda_n R)} \operatorname{sen}(\lambda_n x)}$$

converge y verifica el problema de Dirichlet $(*)$ anterior, donde los b_n son los coef de Fourier de la extensión $2L$-periódica de f

Teorema (Problema de Dirichlet en un disco) : Sea el problema

$$\left.\begin{array}{lll} \Delta u = 0 & \text{en} & x^2+y^2<R^2 \\ u(x,y) = f & \text{en} & x^2+y^2 = R \end{array}\right\}$$

con f integrable y $\mathcal{C}^1$. Entonces la función

$$\boxed{u(\rho,\theta) := \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \operatorname{sen} n\theta)}$$

con a_n y b_n los respectivos coef de la serie de Fourier de la extensión $2L$-periódica de f, converge, verifica el problema y es continua.

Teorema (del valor medio): El valor de una función armónica en el centro de un círculo de $\mathbb{R}^2$ es el promedio de sus valores en la circunferencia.

Teorema (Fórmula Integral de Poisson): Consideremos el P. Dirich. en el disco, con f integrable. Dados un ρ y θ fijos, entonces el valor de u en (ρ,θ) es

$$u(\rho,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\frac{R^2-\rho^2}{\rho^2+R^2-2R\rho\cos(\theta-x)}}_{(*)} f(x)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\,d\mu$$

con $\frac{d\mu}{dm} = (*)$.

Teorema (Liouville): Si una función armónica en el $\mathbb{R}^n$ está acotada superiormente ó inferiormente, entonces debe ser constante. Es decir: una función armónica $\overbrace{\text{def}}^{\text{no cte}}$ en $\mathbb{R}^n$ tiene que irse a $+\infty$ y $-\infty$.

Teorema (Identidades de Green): Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abto variedad con borde (en las cond. del Th de Stokes), y sean $u, v \in \mathcal{C}^2(U)$, $\Omega \subset \bar{\Omega} \subset U$. Entonces se tienen:

$$\boxed{\int_\Omega (\text{grad } v)\cdot(\text{grad } u) + v\Delta u = \int_{\partial\Omega} v(\partial_n u)}$$ (Primera identidad de Green)

$$\boxed{\int_\Omega v\Delta u - u\Delta v = \int_{\partial\Omega} v(\partial_n u) - u(\partial_n v)}$$ (Segunda identidad de Green)

Teorema (Gauss): Si $u \in \mathcal{C}^1(U)$ armónica en Ω, $\bar{\Omega} \subset U$, entonces

$$\int_{\partial\Omega} \partial_n u = 0.$$

Teorema (del Valor Medio I): El valor de una función armónica de un abto U, en un pto p, es el valor medio de la función en $S(p,R) \subset U$.

Teorema (del Valor Medio II): El valor de una función armónica de un abto $\mathcal{U}$, en un pto p, es el valor medio de la función en $B(x,R) \subset \mathcal{U}$.

Teorema (Liouville): Toda función armónica $u \geq 0$ en el $\mathbb{R}^n$ es cte.

II: ECUACIÓN DE ONDAS

SERIES DE FOURIER

Teorema: Las funciones

$$\left\{ \phi_0(x) := \frac{1}{\sqrt{2}} \;,\; \phi_n(x) := \cos \frac{n\pi x}{L} \;,\; \psi_n(x) := \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \right\}_{n \in \mathbb{N}}$$

forman una base ortonormal de $L_2[-L,L]$, con el producto escalar $\langle f,g\rangle := \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} fg$.

- Así, dada $u \in L_2[-L,L]$, será $u = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \phi_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \psi_n$, donde $a_n = \langle u, \phi_n\rangle$ y $b_n = \langle u, \psi_n$

- La igualdad de Parseval aquí dice que $\|u\|^2 = \langle u,u\rangle = \sum a_n^2 + \sum b_n^2$.

Teorema (Dirichlet): Sea $u: [-L,L] \to \mathbb{R}$

1) acotada
2) $u(L) = u(-L)$
3) continua salvo en una colección finita de puntos en los que existen los límites laterales y son finitos
4) diferenciable salvo en una colección finita de puntos en los que tiene derivadas laterales finitas

Entonces se cumple que su serie de Fourier converge puntualmente a

$$\lim_{N\to\infty} \frac{a_0}{\sqrt{2}} + \sum_{n=1}^{N} (a_n \cos \lambda_n x + b_n \operatorname{sen} \lambda_n x) = \frac{u(x^+) - u(x^-)}{2}.$$

Además, si u es continua y de clase $\mathcal{C}^1$ salvo en una colección finita de puntos $\Rightarrow$ la convergencia es uniforme.

• En particular, si u es impar, entonces $a_n = 0$ y $u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}$

• En el caso de que u sea par, $b_n = 0$ y $u(x) = \frac{a_0}{\sqrt{2}} + \sum a_n \cos \frac{n\pi x}{L}$.

ECUACIÓN DE ONDAS

Teorema (Problema de c.i. y c.f): La solución al problema

$$(*) \begin{cases} a^2 u_{xx} = u_{tt} & \\ u(t,0) = u(t,L) = 0 & \text{Condición frontera} \\ \left.\begin{array}{l} u(0,x) = f(x) \\ u_t(0,x) = 0 \end{array}\right\} & \text{Condiciones iniciales} \end{cases}$$

con $f \in C^2_0[0,L]$ (verificando necesariamente $u(0) = u(L) = 0$) es

$$u(t,x) = \frac{\tilde{f}(x+ta) + \tilde{f}(x-ta)}{2}$$

para $\tilde{f}$ la extensión impar $2L$-periódica de f

• Consideremos ahora el problema

$$(**) \begin{cases} a^2 u_{xx} = u_{tt} \\ u(t,0) = u(t,L) = 0 \\ u(0,x) = 0 \\ u_t(0,x) = g(x) \end{cases}$$

• Notar que si u es sol de $(**)$, $\Rightarrow u_t$ es sol de $(*)$, y "$\Leftarrow$" también para cierta primitiva

Corolario: Si $z(t,x)$ es sol de $(*)$, $z(t,x) = \frac{g(x+ta) + g(x-ta)}{2}$ (para $u=v$, claro), entonces

$$u(t,x) = \int_0^t z(\alpha, x)\, d\alpha = \frac{G(x+at) - G(x-at)}{2a}$$, con $G(x) = \int_0^x g(\alpha)\, d\alpha$, es sol de $(**)$.

• La fue será sol al problema con $u(0,x) = f$; $u_t(0,x) = g$

UNICIDAD DE SOLUCIONES

Definición: Sea $u(t,x)$ la forma de una cuerda de tensión cte T. Se llama energía potencial de la cuerda a $\int_0^L \frac{1}{2} T u_x^2$, y llamaremos energía de la cuerda en el tiempo t como la suma de la cinética y potencial:

$$E(t) := \int_0^L \left(\frac{\rho}{2} u_t^2(t,x) + \frac{T}{2} u_x^2(t,x) \right) dx .$$

Proposición: $E'(t) = 0$, i.e., $E(t) = \text{cte} \ \forall t$.

Corolario: Existe una única solución al problema

$$\left.\begin{array}{l} a^2 u_{xx} = u_{tt} \\ u(t,0) = u(t,L) = 0 \\ u(0,x) = f(x) \\ u_t(0,x) = g(x) \end{array}\right\} .$$

ECUACIÓN DE ONDAS n-DIM

• Ahora será el problema $\left.\begin{array}{ll} \Delta u = u_{tt} & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{array}\right\}$, con Ω abto. var. con borde de $\mathbb{R}^n$.

• Si $u(t,x) = f(x) g(t)$, deberá ser $\left.\begin{array}{l} \Delta f = \lambda f \\ g'' = \lambda g \end{array}\right\}$. A tal λ se le llama autovalor de Δ en Ω

y las correspondientes sol. f autofunciones, con $f|_{\partial\Omega} = 0$. En tales condiciones:

Teorema: Se stfce:

1) $\lambda = -\dfrac{\int_\Omega |Df|^2}{\int_\Omega f^2} < 0 \quad \forall f$ autofunc., $Df = \text{grad} f$

2) f_1, f_2 autofunciones de autovalores distintos λ_1 y $\lambda_2 \Rightarrow \langle f_1, f_2 \rangle = 0$.

3) $\{\lambda\}$ es numerable y se pueden ordenar tal que $0 > \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \ldots \to -\infty$

4) Cada auto-valor tiene un nº finito de autofuns l.i.

5) Cada autofunción es analítica en Ω y se extiende con continuidad a todo $\overline{\Omega}$.

Teorema (de expansión de autofunciones): Sea $f \in \mathcal{C}^2(U)$, $\overline{\Omega} \subset U$ abierto, con $f|_{\partial\Omega}=0$. Entonces $f = \sum a_n f_n$ que converge abs. y unif. a f en $\overline{\Omega}$, y los coef. son $a_n := \dfrac{\langle f, f_n\rangle}{\langle f_n, f_n\rangle}$.

Definición: Sea $\mathcal{F} = \{ f \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}) \cap \mathcal{C}^2(\Omega) : f|_{\partial\Omega}=0 \}$, y tomamos la función $\mu : \mathcal{F} \to (0,\infty)$, llamada coeficiente de Rayleigh,

$$\mu(f) := \frac{\int_\Omega |Df|^2}{\int_\Omega f^2} = \frac{\int_\Omega \sum f_{x_i}^2}{\int_\Omega f^2}.$$

Teorema: Si existe $f \in \mathcal{F}$ que de un valor mínimo a μ, entonces es una autofunción y $\lambda_1 := -\mu(f)$ el primer autovalor.

· Por inducción sobre n, supongamos que $\exists\, \lambda_n \leq \ldots \lambda_1 < 0$: $-\lambda_n = \inf\{\mu(f) : f \in \mathcal{F},\ \langle f, f_i\rangle = 0,\ i=1,\ldots,n-1\}$

Si $\mathcal{F}_n = \langle f_1, \ldots, f_n\rangle^\perp$ en $\mathcal{F}$, entonces

Teorema. Si existe $f \in \mathcal{F}_n$ que de un valor mínimo a $\mu|_{\mathcal{F}_n}$, entonces $f = f_{n+1}$ es una autofunción y $\lambda_{n+1} := -\mu(f_{n+1})$ es el autovalor n+1.

Teorema (Solución de la membrana vibrante): Sea el problema de un tambor,

$$\left.\begin{array}{ll} \Delta u = u_{tt} & \text{en } B(0,1) \\ u = 0 & \text{en } S(0,1) \\ u_t(0,x) = 0 & \\ u(0,x) = k(\rho) & \end{array}\right\}.$$

Entonces tiene como solución $u(t,\rho,\theta) = \sum c_n J_0(\alpha_n \rho)\cos(\alpha_n t)$, donde J_0 es la función de Bessel 0 y $\{\alpha_n\}$ los infinitos ceros de J_0.

Lema: Sea u solución de la ec. de ondas en un abierto $A \subset \mathbb{R}^{n+1}$ con $\Omega \subset A$ una v. con borde.

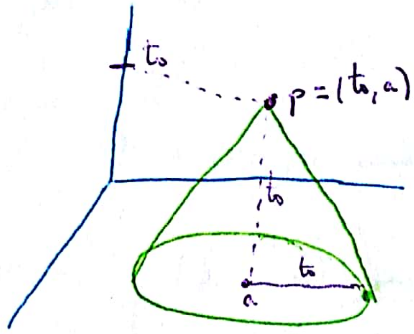
Entonces si $e(t,x) := \frac{1}{2}\left(u_t^2 + \sum u_{x_i}^2\right)$, el campo $D = e\,\partial_t - \sum u_t u_{x_i} \partial_{x_i}$ tiene div nula y por tanto el flujo de D a lo largo de $\partial\Omega$ es nulo,

$$\int_{\partial\Omega} D\cdot\partial_n \; i_{\partial_n}\omega = 0$$

¿Consideremos para cada $p=(t_0,a)\in\mathbb{R}^{n+1}$, $t_0>0$, la parte inferior y positiva del cono de vértice p:

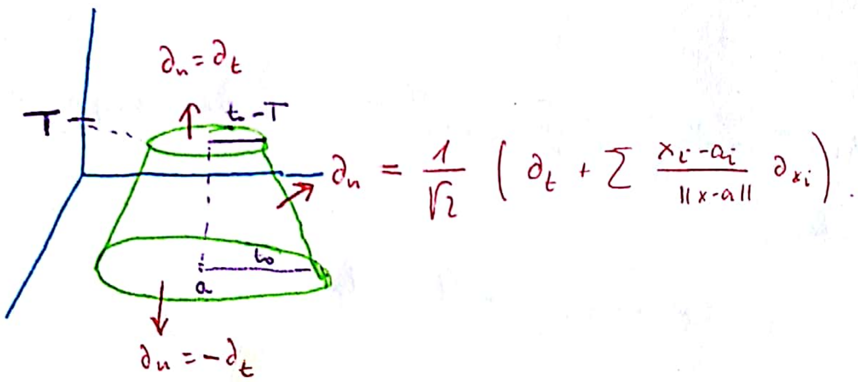
$S_p := \{(t,x)\in[0,t_0)\times\mathbb{R}^n : \sum(x_i-a_i)^2 = (t-t_0)^2\}$

$C_p := \{ \qquad\qquad \le \qquad \}$



Cono característico.

Si $T\le t_0$, $C_p\cap\{t=T\} = B[a,t_0-T]$; y el cono de debajo es $C := C_p\cap\{t\le T\}$.



Teorema (desigualdad del dominio de dependencia): Sea $p=(t_0,a)\in\mathbb{R}^{n+1}$, $t_0>0$ y $C_p\subset \overset{\text{abto}}{A}\subset\mathbb{R}^{n+1}$.
Si $u\in C^2(A)$ es sol de la ec. de ondas en C_p, para cada $T\in[0,t_0]$ se cumple

$$0\le\int_{B[a,t_0-T]} e(T,x)\,dx \le \int_{B[a,t_0]} e(0,x)\,dx.$$

Teorema. : En las condiciones del Th anterior, si en la base inferior de C_P

$$u(0,x) = u_t(0,x) = 0 \quad \text{en} \quad B[x_0, t_0] \subset C_P$$

$\Rightarrow u = 0$ en C_P.

Corolario: Si u_1, u_2 son soluciones de la ec. de ondas, tales que

$$\left.\begin{aligned} u_1(0,x) &= u_2(0,x) \\ u_{1_t}(0,x) &= u_{2_t}(0,x) \end{aligned}\right\} \quad \text{en } B[x_0, t_0] \quad (\text{base del cono})$$

entonces $u_1 = u_2$ en C_P.

Teorema (Unicidad). Si $u_1, u_2 \in \mathcal{C}^2(A)$, $A \subset \mathbb{R}^{n+1}$ abto que contiene a $[0,\infty) \times \mathbb{R}^n$ y son soluciones de la ec. de ondas satisfaciendo

$$\left.\begin{aligned} u(0,x) &= f(x) \\ u_t(0,x) &= g(x) \end{aligned}\right\} \quad x \in \mathbb{R}^n$$

entonces $u_1 = u_2$.

Definición: Sea $A \subset \mathbb{R}^{n+1}$ un abto tal que $[0,\infty) \times \mathbb{R}^n \subset A$. Se llama energía en $t \geq 0$, de $u \in \mathcal{C}^2(A)$ sol de la ec. de ondas, a

$$E(t) := \int_{\mathbb{R}^n} e(t,x)\, dx.$$

Teorema (de Conservación de la Energía): Sea $u \in \mathcal{C}^2(A)$, $[0,\infty) \times \mathbb{R}^n \subset A \subset \mathbb{R}^{n+1}$ abto, sol de la ec. de ondas, que fuera de una bola $B(0, r_0) \subset \mathbb{R}^n$ cumpla que

$$u(0,x) = u_t(0,x) = 0.$$

Entonces se cumple que la energía es cte, $E(t) = \text{cte}$.

Scanned by CamScanner

EC DE ONDAS EN REGIONES CON FRONTERA

• Sea $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un abto y consideremos

$$\left.\begin{array}{l} \Delta u = u_{tt} \\ u(t,x)=0 \text{ en } \partial U \times [0,\infty) \end{array}\right\} \quad , \text{ ó}$$

$$\left.\begin{array}{l} \Delta u = u_{tt} \\ \partial_n u(t,x)=0 \text{ en } \partial U \times [0,\infty) \end{array}\right\}.$$

Teorema (de Conservación de la Energía): Si $u \in \mathcal{C}^2$ en un abto de $\mathbb{R}^{n+1}$ que contiene a $[0,\infty) \times \overline{U}$, y es solución de $\Delta u = u_{tt}$, satisfaciendo uno de los dos problemas anteriores, entonces para $T \geq 0$,

$$\int_U e(T,x)\, dx = \int_U e(0,x)\, dx$$

Teorema (Unicidad): Si $u_1, u_2 \in \mathcal{C}^2(A)$, $[0,\infty) \times \overline{U} \subset \overset{\text{abto}}{A} \subset \mathbb{R}^{n+1}$, satisfaciendo

$$\left.\begin{array}{ll} \Delta u = u_{tt} & \\ u(0,x) = f(x) & \\ u_t(0,x) = g(x) & , x \in \overline{U} \\ u(t,x) = 0 & , x \in \partial U \end{array}\right\} \quad \text{ó} \quad \left.\begin{array}{ll} \Delta u = u_{tt} & \\ u(0,x) = f(x) & \\ u_t(0,x) = g(x) & , x \in \overline{U} \\ \partial_n u(t,x) = 0 & , x \in \partial U \end{array}\right\}$$

entonces $u_1 = u_2$.

FÓRMULA DE KIRCHHOFF

• Queremos resolver la ecuación de ondas en $\mathbb{R}^3$:

$$\left.\begin{array}{l} u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = u_{tt} \\ u(0,x) = \phi(x) \in \mathcal{C}^3(\mathbb{R}^3) \\ u_t(0,x) = \psi(x) \in \mathcal{C}^3(\mathbb{R}^3) \end{array}\right\} (*).$$

Lema (Regla de Stokes): Si $u \in \mathcal{C}^3$ y es sol del "segundo problema" $\left.\begin{array}{l} \Delta u = u_{tt} \\ u(0,x)=0 \\ u_t(0,x) = f(x) \end{array}\right\}$, entonces $v := u_t$ es $\mathcal{C}^2$ y es sol del "1er problema" $\left.\begin{array}{l} \Delta v = v_{tt} \\ v(0,x) = f \\ v_t(0,x) = 0 \end{array}\right\}.$

Por tanto, si u^f denota la sol al 2º problema, la sol a $(*)$ será $u := u^\varphi + u^\phi_t$.

Lema: Sea $p \in \mathbb{R}^3$ y $t \in \mathbb{R}$ arbitrarios, y consideremos N el campo normal y exterior a $S(p,t)$ y H el de las homotecias. Si $F(x) := p + tx$, entonces:

1) $F^* dx_i = t\, dx_i$

2) $F_* H = tN$

3) $F^* \omega = t^3 \omega \qquad (\omega = dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3)$

4) $F^*(i_N \omega) = t^2 i_H \omega$.

Lema: $\partial_t \left(\int_{B(x,t)} f\omega \right) = \int_{S(x,t)} f\, i_N \omega$.

Definición: Sea f una función medible en $\mathbb{R}^3$ y acotada en los acotados, $x \in \mathbb{R}^3$ y $t > 0$. Se llama valor medio de f en $S(x,t)$ a

$$M^f(t,x) := \frac{1}{4\pi t^2} \int_{S(x,t)} f\, d\sigma ,$$

donde σ es la medida de área de la esfera, ie, $d\sigma = i_N \omega$.

- Desarrollando, $M^f(t,x) = \int_{S(0,1)} f(x+ty)\, d\mu(y)$, donde μ es la probabilidad que define σ en $S(0,1)$.
- Esto permite definir $M^f(t,x)$ $\forall t \in \mathbb{R}$, y para $M^f(0,x) = f(x)$.
- M^f es par, ie, $M^f(t,x) = M^f(-t,x)$.
- Si f es continua, M^f es cont; y si $f \in \mathcal{C}^k$, $M^f \in \mathcal{C}^k$ y $M^f_t(t,x) = \frac{1}{4\pi t^2} \int_{B(x,t)} \Delta f \cdot \omega$.

Además, M^f_t es impar, ie, $M^f_t(t,x) = -M^f_t(-t,x)$, y $M^f_t(0,x) = 0$.

- $M^f_{tt}(t,x) = M^f_{tt}(-t,x)$, es par, y en particular, $M^f_{tt}(t,x) = -\frac{1}{2\pi t^3} \int_{B(x,t)} \Delta f\, \omega + \frac{1}{4\pi t^2} \int_{S(x,t)} \Delta f \cdot i_N \omega$.

Teorema (Fórmula de Kirchhoff): Si $f \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}^3)$, con $k \geq 2$, entonces

$$u(t,x) := t\, M^f(t,x) = t \int_{S(0,1)} f(x+ty)\, d\mu(y)$$

es $\mathcal{C}^k(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3)$, y es sol al problema

$$\left.\begin{array}{l} \Delta u = u_{tt} \\ u(0,x) = 0 \\ u_t(0,x) = f(x) \end{array}\right\}.$$

Corolario (Método del Descenso):

1) La solución al problema bidimensional

$$\left.\begin{array}{l} \Delta u = u_{tt} \\ u(0,x) = \phi(x) \\ u_t(0,x) = \psi(x) \end{array}\right\}$$

es

$$u(t,x) = \frac{t}{2\pi} \int_{\{y_1^2+y_2^2 \leq 1\}} \frac{\psi(x+ty)}{\sqrt{1-y_1^2-y_2^2}}\, dy_1\, dy_2 + \partial_t \left(\frac{t}{2\pi} \int_{\{y_1^2+y_2^2 \leq 1\}} \frac{\phi(x+ty)}{\sqrt{1-y_1^2-y_2^2}}\, dy_1\, dy_2 \right).$$

2) La solución al problema unidimensional

$$\left.\begin{array}{l} u_{xx} = u_{tt} \\ u(0,x) = \phi(x) \\ u_t(0,x) = \psi(x) \end{array}\right\}$$

es

$$u(t,x) = \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} \psi(\xi)\, d\xi + \frac{1}{2} \left(\phi(x+t) + \phi(x-t) \right).$$

ECUACIÓN DE POISSON D'ALAMBERTIANA

Definición: En el $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3$, llamamos D'Alembertiano al operador

$$\square := \partial_{tt} - \partial_{x_1x_1} - \partial_{x_2x_2} - \partial_{x_3x_3}.$$

• Queremos plantear la ecuación de ondas no homogénea:

$$\left.\begin{aligned} \square z(t,x) &= \rho(t,x) \\ z(0,x) &= f(x) \\ z_t(0,x) &= g(x) \end{aligned}\right\}.$$

Tal solución puede obtenerse como $z = v + w$, con $v = u^g + u_t^f$, y w una sol particular de

$$\left.\begin{aligned} \square z(t,x) &= \rho(t,x) \\ z(0,x) = z_t(0,x) &= 0 \end{aligned}\right\} (\Delta).$$

• Denotemos por $u^s := u^{\rho(s,\cdot)}$, y $v^s(t,x) := u^s(t-s,x)$, ie, v^s sol. de $\left.\begin{aligned} \square v^s(t,x) &= 0 \\ v^s(s,x) &= 0 \\ v_t^s(s,x) &= \rho(s,x) \end{aligned}\right\}$

Entonces

Teorema (Principio de Duhamel): La función

$$w(t,x) := \int_0^t v^s(t,x)\, ds$$

es solución de (Δ).

Proposición: La solución de (Δ) vale

$$w(t,x) := \begin{cases} \dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int_{B[x,t)} \dfrac{\rho(t-\|z-x\|, z)}{\|z-x\|}\, dm, & t>0 \\ 0 & t=0 \\ \dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int_{B[x,-t)} \dfrac{\rho(t+\|x-z\|, z)}{\|z-x\|}\, dm, & t<0. \end{cases}$$

Definición: Se llama potencial retardado definido por ρ a

$$u(t,x) := \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho(t - \|z-x\|, z)}{\|z-x\|}\, dz$$

Corolario (Ecuación de Poisson-D'Alembertiana): Si $\rho(t,x) = 0$ para $t < K$, entonces el potencial retardado satisface

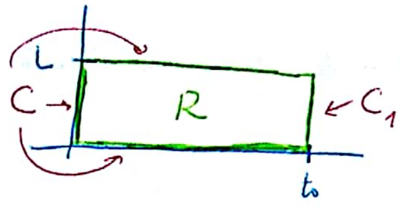
$$\boxed{\Box u(t,x) = 4\pi \rho(t,x)}.$$

III: ECUACIÓN DEL CALOR

- Queremos resolver $\boxed{k u_{xx} = u_t}$

VARILLA FINITA

- Consideremos el problema en un rectángulo.



$R = [0,t_0] \times [0,L] = C \amalg \mathring{R} \amalg C_1$.

Teorema (Principio del Máximo): Sea $u \in \mathcal{C}(R)$ solución de la ec. del calor en $\mathring{R} \amalg C_1$ (en tal recinto existen las derivadas implicadas).

$$M_1 \le u \le M_2 \text{ en } C \implies M_1 \le u \le M_2 \text{ en } R.$$

Teorema (Unicidad): Dadas funciones $h(t), g(t) : I = [0,t_0]$ (ó $[0,\infty)$) $\to \mathbb{R}$ y $f(x) : [0,L] \to \mathbb{R}$, si existe una solución $u \in \mathcal{C}(R = [0,t_0] \times [0,L])$ del problema

$$\left.\begin{array}{l} k u_{xx} = u_t \\ u(0,x) = f(x) \\ u(t,0) = h(t) \\ u(t,L) = g(t) \end{array}\right\} (*)$$

es única.

Teorema (dependencia continua): Si existe solución $u \in \mathcal{C}(R)$ de $(*)$, depende continuamente de los datos f, g y h: si u_1, u_2 son sol con las c.i. f_1, g_1, h_1 y f_2, g_2, h_2; y cumplen que

$$\|f_1 - f_2\|_\infty < \varepsilon,\ \|g_1 - g_2\|_\infty < \varepsilon,\ \|h_1 - h_2\|_\infty < \varepsilon \implies \|u_1 - u_2\|_\infty < \varepsilon.$$

- La conducción del calor es un proceso irreversible.

SOLUCIÓN EN VARIABLES SEPARADAS

• Si $u(t) = h(x)\cdot g(t)$, debe ser $\begin{cases} h(x) = A\cos(\alpha x) + B \operatorname{sen}(\alpha x) \\ g(t) = C e^{-K\alpha^2 t} \end{cases}$.

1. CONDICIONES EN LA FRONTERA HOMOGÉNEAS

Teorema: Si $f \in \mathcal{L}[0,L]$ (p. ej. si es continua) la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-K\alpha_n^2 t} \operatorname{sen}(\alpha_n x)$, con $\alpha_n = \frac{n\pi}{L}$ y b_n los coeficientes de Fourier de la extensión impar de f a $[-L,L]$, converge puntualmente en $(0,\infty)\times\mathbb{R}$ a una función $u \in \mathcal{C}^{\infty}((0,\infty)\times\mathbb{R})$, y uniformemente en $[t_0,\infty)\times\mathbb{R}$ $\forall t_0>0$, que satisface

$$\left.\begin{array}{l} K u_{xx} = u_{tt} \\ u(t,0) = u(t,L) = 0 \end{array}\right\}.$$

Si además $f:[0,L]\to\mathbb{R}$ cumple $f(0)=f(L)=0$ y es continua, y de clase $\mathcal{C}^1$ salvo en una colección finita de ptos en los que tiene derivadas laterales finitas, entonces la serie converge uniformemente en $[0,\infty)\times\mathbb{R}$ a una función u continua tal que $u(0,x)=f(x)$.

Teorema (Existencia y Unicidad): Sea $f:[0,L]\to\mathbb{R}$ continua, de clase $\mathcal{C}^1$ salvo en una colección finita de puntos en los que tiene derivadas finitas y cumple $f(0)=f(L)=0$, entonces existe una solución u de la ec. del calor

$$\left.\begin{array}{l} K u_{xx} = u_{tt} \\ u(t,0) = u(t,L) = 0 \\ u(0,x) = f(x) \end{array}\right\}$$

dada por

$$\boxed{u(t,x) := \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-K\alpha_n^2 t} \operatorname{sen}(\alpha_n x)}$$

que converge en $[0,\infty)\times[0,L]$ uniformemente, b_n los coef...., y u es cont. en $[0,\infty)\times[0,L]$ y $\mathcal{C}^{\infty}$ en $(0,\infty)\times(0,L)$.

Corolario. La solución del teorema anterior puede expresarse como un operador integral, o una función de densidad resp. una medida dotada normal:

$$u(t,x) = \int_0^L f(\xi) K(t,x,\xi)\, d\xi \quad , \text{ con } K(t,x,\xi) = \frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-k\alpha_n^2 t} \operatorname{sen}(\alpha_n \xi)\operatorname{sen}(\alpha_n x)$$

$$u(t,x) = \int_0^L f(\xi)\, d\mu_{(t,x)} \quad , \text{ donde } \frac{d\mu_{(t,x)}}{dm}(\xi) = K(t,x,\xi).$$

2. CONDICIONES EN LA FRONTERA NO HOMOGÉNEAS

• Para resolver
$$\left.\begin{array}{l} k u_{xx} = u_t \\ u(0,x) = f(x) \\ u(t,0) = h(t) \\ u(t,L) = g(t) \end{array}\right\}$$

se divide en $u = u_1 + u_2$, donde u_1 es una sol al problema sin condición inicial (sub frontera), y u_2 es homogénea con $u_2(0,x) = f - u_1(0,x)$. Se hacen como particulares.

3. EXTREMOS DE LA VARILLA AISLADOS

• Queremos resolver
$$\left.\begin{array}{ll} k u_{xx} = u_t & \\ u(0,x) = f(x) & , x \in [0,L] \\ u_x(t,0) = u_x(t,L) = 0 & , t > 0 \end{array}\right\} \quad (\mathcal{X})$$

Teorema: Si $u \in \mathcal{C}^2$ en un abto que contiene a $[0,T] \times [0,L]$, $0 < T \leq \infty$, y cumple la ec. del calor y
$$\underset{L}{u(t,0)} = 0 \quad \text{ó} \quad \underset{L}{u_x(t,0)} = 0 \quad , t \in [0,T)$$

entonces la función $E(t) := \int_0^L u^2(t,x)\, dx$ es decreciente.

Teorema (Unicidad): Si existe una función $u \in \mathcal{C}^2$ en un abierto que contenga a $[0,T) \times [0,L]$, que satisfaga la ec. del calor y una de las siguientes condiciones frontera

$u(t,0)=g(t)$	$u(t,L)=h(t)$	(4 posibilidades)
u	u_x	
u_x	u	$t \in [0,T)$
u_x	u_x	

entonces es única.

- La única sol al problema $(\mathcal{X})$ es

$$u(t,x) = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)\,dx + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-k\alpha_n^2 t} \cos(\alpha_n x).$$

VARILLA INFINITA

- Ahora consideremos el problema $\left.\begin{array}{l} k u_{xx} = u_t \\ u(0,x) = f(x) \end{array}\right\}$, $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$.

Teorema (del Valor Extremo): Si u es sol de la ec. del calor continua y acotada en $[0,\infty) \times \mathbb{R}$, entonces

$$M_1 \le u(0,x) \le M_2, \quad x \in \mathbb{R} \implies M_1 \le u(t,x) \le M_2, \quad (t,x) \in [0,\infty) \times \mathbb{R}.$$

- Se sigue de modo obvio el Th de Unicidad y el Th de Dependencia continua del dato inicial

Teorema (de Existencia, integral de Poisson): Sea f una función acotada en $\mathbb{R}$. Entonces la función

$$u(t,x) := \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{\pi k t}} \displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(z)\, e^{-\frac{(x-z)^2}{4kt}}\, dz = \int f\, dN(x, 2kt), & t > 0 \\ f(x), & t = 0 \end{cases}$$

es sol de la ec del calor, acotada en $[0,\infty) \times \mathbb{R}$, $\mathcal{C}^\infty((0,\infty) \times \mathbb{R})$ y continua en el pto $(0,x) \in \mathbb{R}^2$ si f es cont. en x.