I: INTEGRACIÓN EN VARIAS VARIABLES

MEDIDA DE LEBESGUE

<u>Definición</u>: Sea $X \neq \emptyset$. Se dice que $\mathcal{A} \in \mathcal{P}(X)$ es una <u>σ-álgebra</u> si:

i) $\emptyset, X \in \mathcal{A}$

ii) $B \in \mathcal{A} \Rightarrow B^c \in \mathcal{A}$ (cerrada resp. paso al complementario)

iii) $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \in \mathcal{A}$. (cerrada resp. uniones num.)

<u>Lema</u>: Toda σ-álgebra es cerrada respecto a intersecciones num. y a la diferencia de conjuntos. Además la intersección de σ-alg. sigue siendo.

<u>Definición</u>: Dado $\mathcal{F} \in \mathcal{P}(X)$, llamamos <u>$\sigma$-álgebra generada por $\mathcal{F}$</u>; <u>$\sigma(\mathcal{F})$</u>, a la menor σ-alg. que contiene a $\mathcal{F}$, i.e., $\sigma(\mathcal{F}) = \bigcap_{\mathcal{F} \subset \mathcal{A}_i \ \sigma\text{-alg.}} \mathcal{A}_i$. En particular, si (X, τ) E.T., denominamos <u>σ-álgebra de Borel</u> a <u>$\mathcal{B}(X) := \sigma(\tau)$</u>, y llamamos a sus elementos <u>borelianos</u>.

* Son borelianos las uniones num. de cerrados ($= \underline{F_\sigma}$) y las intersecciones numerables de abiertos ($= \underline{G_\delta}$).

Proposición: $X, Y \in T$, $T: X \longrightarrow Y$ continua $\Longrightarrow T^{-1}(\mathcal{B}(Y)) \subset \mathcal{B}(X)$.

Corolario: $B_1 \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, $B_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^p) \Longrightarrow B_1 \times B_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p)$.

Definición: Se dice que una aplicación $\mu: \mathcal{A} \longrightarrow [0, +\infty]$ es una medida si satisface:

i) $\mu(\emptyset) = 0$

ii) μ es σ-aditiva (ó num. aditiva, i.e., $\mu(\dot{\bigcup}_{num} A_i) = \sum_{num} \mu(A_i)$).

Llamaremos espacio de medida a la terna $(X, \mathcal{A}, \mu)$.

Proposición (Propiedades de la medida)

1) MONOTONÍA: $B_1 \subseteq B_2 \Rightarrow \mu(B_1) \leq \mu(B_2)$

2) $B_1 \subseteq B_2$, $\mu(B_1) < +\infty \longrightarrow \mu(B_2 \setminus B_1) = \mu(B_2) - \mu(B_1)$.

3) σ-SUBADITIVIDAD: $\mu(\bigcup_{num} B_p) \leq \sum \mu(B_p)$.

4) $\mu(B_1 \cup B_2) + \mu(B_1 \cap B_2) = \mu(B_1) + \mu(B_2)$.

5) $B_1 \subset B_2 \subset \ldots \subset B_k \subset \ldots \Longrightarrow \mu(\bigcup B_k) = \lim_{k \to \infty} \mu(B_k)$.

6) $B_1 \supset B_2 \supset \ldots \supset B_k \supset \ldots \Longrightarrow \mu(\bigcap B_k) = \lim_{k \to \infty} \mu(B_k)$.

$\mu(B_k) < +\infty$.

Definición: Diremos que un semintervalo de $\mathbb{R}^n$ es $I = \prod_{i=1}^{n} (a_i, b_i]$, o $\emptyset$.

Diremos que la medida del semintervalo, o su n-volumen, es $m(I) := \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i)$.

Proposición (Propiedades de los Semintervalos)

1) I, J semintervalos $\Rightarrow I \cap J$ semintervalo.

2) $I \setminus J$ no es en general un semintervalo, pero se puede escribir como unión finita de semintervalos.

Definición: Sea $A \subset \mathbb{R}^n$. Llamaremos medida exterior de A a

$$m^*(A) := \inf \left\{ \sum_{num} m(I_k) \; : \; A \subset \bigcup_{num} I_k \right\}$$

Lema:

1) $\dot{\bigcup} I_k \subseteq I \Rightarrow \sum m(I_k) \leq m(I)$, y si se da "$=$" $\Rightarrow$ se da "$=$".

2) $I \subset \bigcup_{num} I_k \Rightarrow m(I) \leq \sum m(I_k)$.

Proposición: $m^*(I) = m(I)$, I semintervalo.

Proposición (Propiedades de m^*):

1) MONOTONÍA : $A \subset B \Rightarrow m^*(A) \leq m^*(B)$

2) σ-SUBADITIVIDAD : $m^*\left(\bigcup_k A_k\right) \leq \sum_n m^*(A_n)$

3) INVAR. POR TRASL. : $m^*(c + A) = m^*(A)$, $c \in \mathbb{R}^n$.

Teorema (Vitali): No existe ninguna medida sobre $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ que sea invariante por traslaciones y asigne a cada semintervalo su longitud.

Definición (Caratheodory): Un conjunto $B \subset \mathbb{R}^n$ se dice Lebesgue-medible o L-medible si verifica que

$$m^*(A) = m^*(A \cap B) + m^*(A \setminus B) \qquad \forall A \subset \mathbb{R}^n.$$

Lema: Basta probar la Id. de Caratheodory con semintervalos para ver si un conjunto es medible.

* $\mathcal{M}_n := \{\text{medibles de } \mathbb{R}^n\} \overset{NOT}{=} \mathcal{M}$.

Proposición:

1) Todo semintervalo es medible
2) Todo conjunto de medida nula es medible

Teorema: $\mathcal{M}$ es una σ-álgebra, y $m := m^*|_{\mathcal{M}}$ es una medida (también es σ-aditiva), con lo que $(\mathbb{R}^n, \mathcal{M}, m)$ es un espacio de medida. (Sin Dem)

Proposición: Cada abto de $\mathbb{R}^n$ puede expresarse como una unión numerable de n-semintervalos disjuntos con adherencia en él.

Corolario I: Todo abto es medible

Corolario II: $\mathcal{B} \subset \mathcal{M}$.

Proposición: $A \in \mathcal{M} \iff \exists B \in \mathcal{B}$, $A \subset B$: $m^*(B \setminus A) = 0$ $(\Rightarrow m^*(A) = m^*(B))$.

Corolario: $\mathcal{M} = \{ B \cup Z \}$, $B \in \mathcal{B}$, $m^*(Z) = 0$.

Proposición: La medida de Lebesgue es la única medida sobre $\mathcal{B}$ (y sobre $\mathcal{M}$) que asigne a cada n-semicubo su n-volumen. (n-cubos $\Rightarrow$ abiertos $\Rightarrow$ semiintervalos $\Rightarrow$ borelianos)

Proposición: Toda isometría lineal conserva la medida.

Proposición: $m(B_1 \times B_2) = m(B_1) \cdot m(B_2)$ $\forall B_1, B_2 \in \mathcal{B}$

FUNCIONES MEDIBLES

* $\text{Ord}\, f := \{(x,y) \in \mathbb{R}^n \times [0,+\infty) : 0 \leq y < f(x)\}$, $f: \mathbb{R}^n \to [0,+\infty]$.

Definición: Se dice que una función $S: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es simple si $\# \text{Im}\, S < +\infty$. Diremos que una función simple S es $\mathcal{L}$-medible si $S^{-1}(y) \in \mathcal{M}$ $\forall y \in \mathbb{R}^n$. Si $S^{-1}(y) \in \mathcal{B}$ se dice $\mathcal{B}$-medible.

Proposición: Sea $S: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Son equivalentes:

1) S es simple y medible
2) Existe una partición finita de $\mathbb{R}^n$ $B_1, \dots, B_p \in \mathcal{M}$: $S_{|B_i} = cte$.
3) Existen $B_1, \dots, B_r \in \mathcal{M}$: $S = \sum_{i=1}^{n} b_i \chi_{B_i}$.

Proposición: Sea $S:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una función simple y medible ≥ 0, y sean $B_1,\dots,B_p \in \mathcal{M}$ que forman una partición de $\mathbb{R}^n$ y que $S_{|B_i} = b_i$ (cte). $\Longrightarrow$ Ord $S \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ es medible, y $m(\text{Ord } S) = \sum_{i=1}^{p} b_i \, m(B_i)$.

Definición: Sea $S \geq 0$ simple y medible, y $B_1,\dots,B_p \in \mathcal{M}$ que forman una partición de $\mathbb{R}^n$ que verifica $S_{|B_i} = b_i$.

$$\boxed{\int S := \sum_{i=1}^{p} b_i \cdot m(B_i)}$$

Proposición (Propiedades de la Integral de Funciones Simples):

1) $\int S = m(\text{Ord } S)$

2) $0 \leq S \leq T \implies 0 \leq \int S \leq \int T$

3) $\int (S+T) = \int S + \int T$

4) $\int \alpha S = \alpha \int S$.

Lema: Sea $S:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ simple

$$S \text{ medible} \iff \{x \in \mathbb{R}^n : S(x) > \alpha\} \in \mathcal{M} \quad \forall \alpha$$

Definición: Sea $f: A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow [-\infty, \infty]$ y $A \supset B \in \mathcal{M}$. Se dice que f es medible en el sentido de Lebesgue (o $\mathcal{L}$-medible) sobre B si $\{x \in B : f(x) > \alpha\} \in \mathcal{M}$ $\forall \alpha$.

Proposición: Sea $f \geq 0$.

$$f \text{ medible} \iff \exists (S_p) \text{ creciente}, \ S_p \text{ simple y medible} : (S_p) \overset{p}{\nearrow} f.$$

Definición (Integral de una función ≥ 0): Sea $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow [0, +\infty]$ medible. Se define la integral de f como:

$$\boxed{\int f := \sup \left\{ \int s \ : 0 \leq s \leq f, \ s \text{ simple y medible} \right\}}$$

Proposición: Sea $f \geq 0$ medible

1) $\operatorname{Ord} f \in \mathcal{M}$

2) $\int f = m(\operatorname{Ord} f)$

Teorema (de la Convergencia Monótona): Sea (f_p) una sucesión de funciones medibles y crecientes: $f_p \geq 0$ que convergen puntualmente.

1) $\lim_{p \to \infty} f_p$ es una función medible.

2) $\int \lim_{p \to \infty} f_p = \lim_{p \to \infty} \int f_p$.

Proposición (Propiedades de $\int$ con $f \geq 0$):

1) $0 \leq f \leq g \implies 0 \leq \int f \leq \int g$.

2) f, g medibles $\implies f + g$ medible y $\int (f+g) = \int f + \int g$.

3) f medible $\implies \alpha f$ medible y $\int \alpha f = \alpha \int f$

4) $(f_p) \geq 0$ medibles $\implies \left(\sum_{p=1}^{\infty} f_p \right)(x) = \sum_{p=1}^{\infty} f_p(x)$, y $\int \sum_{p=1}^{\infty} f_p = \sum_{p=1}^{\infty} \int f_p$.

Definición: Sea $f: A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow [0,+\infty]$ y $A \supset B \in \mathcal{M}$, y f medible sobre B. Se define

$$\int_B f := \int f \chi_B \quad , \text{ donde } f\chi_B(x) = \begin{cases} f(x) & , x \in B \\ 0 & x \notin B \end{cases}$$

*Para que tenga sentido la def vemos el sgte

Lema: Sea $f: A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow [-\infty,\infty]$ y $A \supset B \in \mathcal{M}$.

$$f \text{ medible sobre } B \iff f\chi_B \text{ medible.}$$

Proposición: Sea $f \geq 0$ medible sobre $B \in \mathcal{M}$ y $\mathrm{Ord}_B f = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^n \times [0,\infty) : x \in B : 0 \leq y \leq f(x) \}$.

$$\int_B f = m(\mathrm{Ord}_B f)$$

Proposición: Sea $f \geq 0$ medible.

1) f es medible sobre cada $B \in \mathcal{M}$.

2) $\mu(B) := \int_B f$ es una medida sobre $\mathcal{M}$.

Definición: Sea $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow [-\infty,\infty]$. Llamamos

$$f^+(x) := \sup\{f(x), 0\} \geq 0 \equiv \text{Parte positiva de } f$$

$$f^-(x) := -\inf\{f(x), 0\} \geq 0 \equiv \text{Parte negativa de } f$$

Y verifica $f \equiv f^+ - f^-$. Además si f es medible sobre $B \in \mathcal{M}$, se define

$$\int_B f := \int_B f^+ - \int_B f^-$$

» Claro es, pues que la def tenga sentido f^+ y f^- tienen que ser medibles:

Lema: La def de f medible sii $\{x\in \mathbb{R}^n : f(x)>\alpha\}\in\mathcal{M}$ es equivalente si se usan $>, \geq, <, \leq$.

Proposición: f, g medibles sobre $B \Rightarrow \begin{cases} -f & f\vee g := \sup\{f,g\} \quad f\wedge g := \inf\{f,g\} \\ f^+, \ f^-, \ |f|, \ \lambda f & \text{son medibles sobre } B \end{cases}$

Proposición: f medible sobre $B\in\mathcal{M} \iff \exists (S_p)$ simples y medibles y $(S_p) \xrightarrow{P} f$. $\left(\begin{matrix}\text{ni crecientes} \\ \text{ni } \geq 0\end{matrix}\right)$.

Proposición (Propiedades de $\int$ de funciones en $\mathbb{R}$):

1) Sean f, g medibles sobre B y $f(x)+g(x) \neq \infty-\infty \ \forall x\in B$ $(f,g:\mathbb{R}^n \to [-\infty, +\infty])$.

a) $f+g$ medibles

b) $\int_B f + \int_B g \neq \infty - \infty \Rightarrow \exists \int_B (f+g)$ y $\int_B f+g = \int_B f + \int_B g$.

2) $\int \lambda f = \lambda \int f$

3) f medibles sobre B_1 y $B_2 \in \mathcal{M} \iff f$ medible sobre $B_1 \cup B_2 \in \mathcal{M}$.

4) Si en 3) B_1, B_2 disjuntos $\Rightarrow \int_{B_1 \dot\cup B_2} f = \int_{B_1} f + \int_{B_2} f$.

5) $f \leq g$ en $B\in\mathcal{M}$ medibles $\Rightarrow \int_B f \leq \int_B g$.

6) $B_1 \subset B_2$ y f medible sobre $B_2 \Rightarrow f$ medible sobre B_1; y si $\exists \int_{B_2} f \Rightarrow \exists \int_{B_1} f$.

FUNCIONES INTEGRABLES

Defin:

• $$\int_B f = \begin{cases} \infty - \infty & \text{, y se dice que la integral } \underline{\text{no existe}} \\ \pm\infty & \text{, y se dice que existe la integral} \\ <+\infty \text{ y } >-\infty & \text{, se dice que existe y que } f \text{ es } \underline{\text{integrable}} \text{ ; y si además} \end{cases}$$

$|f(x)| < +\infty$ se dice que $\underline{f \in \mathcal{L}^1_*(B)}$.

Proposición (Criterios de Integrabilidad): Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ medible sobre $B \subseteq A$, $B \in \mathcal{M}$.

1) f acotada sobre B, $m(B) < +\infty \implies f$ integrable sobre B

2) f continua sobre un compacto $K \implies f$ integrable sobre K.

3) f integrable sobre $B \iff |f|$ integrable sobre B.

CONJUNTOS DE MEDIDA NULA

Proposición: f def. sobre un conjunto de medida nula $Z \Rightarrow f$ medible sobre Z y $\int_Z f = 0$.

Corolario I: A la hora de integrar podemos prescindir de los conjuntos de medida nula, ie,

$$\int_B f = \int_{B \cup Z} f = \int_{B \setminus Z} f \quad , \; m(Z) = 0.$$

Corolario II: f medible sobre B y $g = f$ c.p.d $\Rightarrow g$ medible sobre B y $\int_B g = \int_B f$.

• Estos dos corolarios prueban que $\int_0^1 \chi_{\mathbb{Q}} = 0$ y $\int_0^1 \chi_{\mathbb{I}} = 1$.

Corolario III: Si $\underline{f \geq 0}$ medible sobre B, $f = 0$ c.s. en $B \iff \int_B f = 0$.

Lema: Si $f, g : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ medibles sobre B y $\int_B f + \int_B g \neq \infty - \infty \Rightarrow f+g$ está bien definida c.p.d. en B.

INTEGRACIÓN EN 1-VARIABLE

Teorema: f continua c.p.d sobre un medible $B \Rightarrow f$ medible sobre B.

Corolario: Sea $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$.

1) $\mathcal{R}[a,b] \subset \mathcal{L}[a,b]$.

2) $\mathcal{R}\int_a^b f = \mathcal{L}\int_a^b f$.

- CONVENIO: si $a > b$, $\int_a^b f = -\int_b^a f$.

Definición: Sea f medible sobre $[a,b)$. Llamamos, si existe, integral impropia o flechada en $[a,b)$ de f a $\int_a^{\to b} f := \lim_{y \to b^-} \int_a^y f$. (análogamente $\int_{\to c}^{b}$, $\int_{\to a}^{\to b}$ ...).

Proposición: Sea $[a,b) \subset \overline{\mathbb{R}}$. Si $\exists \int_a^b f \Rightarrow \exists \int_a^{\to b} f$ y $\int_a^b f = \int_a^{\to b} f$.

Definición: Sea f definida sobre I intervalo. Se dice que F es una primitiva de f en I si $F'(x) = f(x)$ $\forall x \in I$. Se denota como $\int f = \{\text{primitivas de } f\}$.

Teorema (Fundamental del Cálculo Integral y Fórmula de Barrow): Sea f continua sobre I.

1) f admite una primitiva sobre I

2) Si F es una primitiva de f sobre I, y $[a,b] \subset I$, entonces

$$\boxed{\int_a^b f = F(b) - F(a)}$$

Teorema (de Cambio de Variable): Sea $g : J \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(t) \equiv x$, $g \in C^1(J)$, y sea $f : g(J) = I \to \mathbb{R}$ continua, y sean $c, d \in J$, y $a = g(c)$ y $b = g(d)$. Entonces

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_c^d f(g(t)) \cdot g'(t)\, dt ,$$

lo que se suele denotar como $\begin{cases} x = g(t) \\ dx = g'(t)\, dt \end{cases}$

II : CÁLCULO INTEGRAL

<u>Teorema</u>: Sea (f_p) una sucesión de funciones medibles y convergente (al menos puntualmente). $B \in \mathcal{M}$. Se puede hacer

$$\int_B \lim f_p = \lim \int_B f_p$$

1) <u>Teorema de la Convergencia Monótona</u>: (f_p) creciente y ≥ 0 ; ó decreciente y ≤ 0.

2) (f_p) monótona tq $\exists f_N \in \mathcal{L}^1(B)$

3) <u>Teorema de la Convergencia Dominada (Lebesgue)</u>: $\exists F \in \mathcal{L}^1(B) : |f_p(x)| \leq F(x) \ \forall x \in B$

4) $f_p \in \mathcal{L}^1(B) \ \forall p$, $(f_p) \xrightarrow{u}$, $m(B) < +\infty$.

5) TCD , con $(f_p) \xrightarrow{c.s.}$ y $|f_p(x)| \overset{c.s.}{\leq} F(x)$

<u>Teorema</u>: Sea $\sum f_p$ una serie de funciones medibles convergente, $B \in \mathcal{M}$. Se puede hacer

$$\int_B \sum f_p = \sum \int_B f_p .$$

1) $\sum \int_B |f_p| < +\infty$

2) $\sum f_p \xrightarrow{u}$, $m(B) < +\infty$, $f_p \in \mathcal{L}^1(B) \ \forall p$.

3) $(f_p) \geq 0$.

Teorema (Criterio de Weierstraß) :

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ |f_p(x)| \le a_p \\ 2)\ \sum a_p < +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \sum f_p \xrightarrow{u}$$

• $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$ es una serie de potencias centrada en a, y converge en $(a-R, a+R)$ donde

$$R = \frac{1}{\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

Definición: llamamos integral paramétrica a una expresión del tipo $\int_B f(t,x)\,dx$, donde $t \in J \subset \mathbb{R}$ es el parámetro, y fijado t, $f(t,x) \in \mathcal{L}^1(B)$.

• Toda integral paramétrica define de modo natural una función $\begin{array}{l} g: J \longrightarrow \mathbb{R} \\ \quad t \longrightarrow g(t) := \int_B f(t,x)\,dx \end{array}$.

Teorema (Continuidad de int. paramétricas) : Sea $t_0 \in J$.

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ \exists \lim_{t \to t_0} f(t,x) \quad \forall x \in B \\ 2)\ \exists F \in \mathcal{L}^1(B) : |f(t,x)| < F(x) \quad \forall t \in V \in \mathcal{V}(t_0) \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \exists \lim_{t \to t_0} \int_B f(t,x)\,dx \quad \text{y} \\ \lim \int_B f(t,x)\,dx = \int_B \lim f(t,x)\,dx. \end{array}$$

Teorema (Derivabilidad de int. param.) : Si $t_0 \in J_0$ abierto, si

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ \exists \frac{\partial f}{\partial t}(t,x) \quad \forall t \in J_0 \\ 2)\ \left|\frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\right| \le G(x) \quad , G \in \mathcal{L}^1(B)\ \forall t \end{array}\right\} \Rightarrow \exists\, g'(t) = \int_B \frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\,dx.$$

INTEGRALES DOBLES, TRIPLES, ...

<u>Teorema</u> (Fubini-Tonelli): Sea $f: D \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$, $B \in \mathcal{M}$ $(B \subseteq D)$, f medible sobre B y f bien de signo cte sobre B bien integrable sobre B. Entonces

$$\int_B f(x,y)\, dx\, dy = \int_A \left(\int_{B(x)} f(x,y)\, dy \right) dx \quad , \text{ con}$$

$$B(x) = \{ y \in \mathbb{R}^p : (x,y) \in B \}$$
$$A = \{ x \in \mathbb{R}^n : m(B(x)) > 0 \}$$

<u>Teorema</u> (Cambio de Variable en la Int. Múltiple): Sea $f: V \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y $g: U \subset \mathbb{R}^n \to V = g(U) \subset \mathbb{R}^n$, $\overset{u}{g(u_1,\dots,u_n)} = \overset{x}{(x_1,\dots,x_n)}$ un difeomorfismo de clase C^1. Entonces

$x_1 = g_1(u_1 \dots u_n)$, $x_n = g_n(u_1 \dots u_n)$

$$\int_B f(x_1 \dots x_n)\, dx_1 \dots dx_n = \int_{g^{-1}(B)} f(g(u_1,\dots,u_n)) \cdot \left| \det \left(\frac{\partial g_i}{\partial x_j} \right) \right| du_1 \dots du_n$$

INTEGRALES DE LÍNEA, DE SUPERFICIE, GRADIENTE, ...

<u>Definición</u>: Se llama <u>curva</u> (o camino) de $\mathbb{R}^n$ a una aplicación continua $\gamma: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t))$; y llamamos <u>traza de γ</u> a $Tr\, \gamma := Im\, \gamma$.

<u>Definición</u>: Dos curvas se dicen <u>equivalentes</u> si $\exists$ un homeomorfismo que transforma una en la otra.

$\gamma: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$

$\sigma: J \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$

$h: I \to J$ homeomorfismo

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "\gamma"] \arrow[dr, "h"'] & \mathbb{R} \\ & J \arrow[u, "\sigma"'] \end{tikzcd}$$

$\gamma \sim \sigma$ si $\underline{\gamma = \sigma \circ h}$.

Definición: Se llama nabla a un operador $\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots\right)$. Así, dado un campo vectorial $F: A\subset\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, se definen los operadores $(n=3)$:

- Gradiente: $\nabla F := \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}, \frac{\partial F}{\partial x_2}, \frac{\partial F}{\partial x_3}\right) = \text{grad } F$

- Divergencia: $\nabla \cdot F := \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} + \frac{\partial F_3}{\partial x_3} = \text{div } F$

- Rotacional: $\nabla \times F := \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \text{rot } F$

- Laplaciano: $\nabla \cdot (\nabla F) = \frac{\partial^2 F_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 F_2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 F_3}{\partial x_3^2} = \Delta F \quad (\text{div}(\text{grad } F))$

Proposición (Condición Necesaria de Campo Conservativo): Sea $F: A\subset\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un campo, $F \in C^1(A)$

$$F \text{ conservativo} \Longrightarrow \text{rot } F = 0.$$

Proposición: Sea $F: A\subset\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un campo, con A abierto y convexo, $F\in C^1(A)$.

$$F \text{ conservativo} \Longleftrightarrow \text{rot } F = 0.$$

Definición: Una curva se dice de Jordan si es simple y cerrada.

Teorema (de la Curva de Jordan): Toda curva de Jordan en $\mathbb{R}^2$ divide al plano en dos componentes conexas (la de dentro y la de fuera).

<u>Proposición</u>: Todas las curvas de Jordán de la misma curva geométrica son equivalentes.

- $\gamma \sim \sigma$, se conserva la orientación.
- $\gamma \sim (-\sigma)$, se cambia la orientación.

Hay dos orientaciones: si se recorre en sentido contrario a las agujas del reloj, es la <u>positiva</u>; en el otro sentido es <u>negativa</u>. → (a la derecha).
(si al recorrer la curva la componente conexa interior queda a la izquierda)

<u>Teorema (Green)</u>: Sea $\gamma : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ una curva de Jordán orientada positivamente de $Tr\,\gamma = C$ de clase C^1 a trozos; y $F : \overline{U} \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $F \equiv (P, Q)$ un campo vectorial, donde U es la componente conexa interior a la curva. $(\overline{U} = U \cup C)$ F.to.

$$\boxed{\int_C \vec{F}\, d\vec{\gamma} = +\int_{\overline{U}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\, dy}$$

- Si F verifica que $\operatorname{rot} F = 1$, entonces el Th Green permite el <u>cálculo de áreas</u> a través de <u>integrales curvilíneas</u>. $(F = (-y, 0))$.

<u>Teorema (Pappus)</u>: Sea A una superficie plana y r una recta en el plano. Si B es el sólido de revolución de girar A alrededor de r, entonces

$$\boxed{Vol(B) = \text{Área}(A) \cdot 2\pi \cdot d\left((x_A, y_A), r \right)}$$

donde $x_A := \dfrac{\int_A x\, dx\, dy}{\text{Área}(A)}$, $y_A := \dfrac{\int y\, dx\, dy}{\text{Área}(A)}$ es el <u>centroide</u> de A.

Corolario: Sea $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, y B el sólido de revolución de giro Ord f alrededor de uno de los ejes.

1) EJE X: $\boxed{Vol(B) = \pi \int_I f^2(x)\,dx}$

2) EJE Y: $\boxed{Vol(B) = 2\pi \int_I x f(x)\,dx}$

Cambio de coordenadas: De cartesianas a..

$\mathbb{R}^2$:

$$(0,+\infty)\times(0,2\pi) \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

• Polares (planas):
$$(r, \theta) \longmapsto \begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,\text{sen}\,\theta \end{cases} ;\ \det Jac = r$$

$\mathbb{R}^3$

$$(0,+\infty)\times(0,2\pi)\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

• Cilíndricas:
$$(r, \theta, z) \longmapsto \begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,\text{sen}\,\theta \\ z = z \end{cases} ;\ \det Jac = r$$

$$(0,+\infty)\times(0,2\pi)\times(0,\pi) \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

• Esféricas:
$$(r, \theta, \varphi) \longmapsto \begin{cases} x = r\cos\theta\,\text{sen}\,\varphi \\ y = r\,\text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,\varphi \\ z = r\cos\varphi \end{cases} ;\ \det Jac = r^2\,\text{sen}\,\varphi$$

Definición: Se dice que $S \subset \mathbb{R}^3$ es una superficie parametrizada si $\exists\, \phi : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

con $\phi(D) = S$; $D = U$ abierto acotado $\cup$ conjunto ∂U, $\phi|_U$ inyectiva, $rg\left(\frac{\partial \phi_i}{\partial s_j}\right) = 2$, $\phi \in C^1(D)$ c.s.

Teorema: Sea $S = \phi(D)$, y $\vec{N}(s_0, t_0)$ el vector normal a cada punto $(s_0, t_0) \in S$ resultado de hacer

$$\vec{N}(s_0,t_0) = \begin{array}{ccc} i & j & k \\ \hline \frac{\partial \phi_1}{\partial s}(s_0,t_0) & \frac{\partial \phi_2}{\partial s}(s_0,t_0) & \frac{\partial \phi_3}{\partial s}(s_0,t_0) \\ \frac{\partial \phi_1}{\partial t}(s_0,t_0) & \frac{\partial \phi_2}{\partial t}(s_0,t_0) & \frac{\partial \phi_3}{\partial t}(s_0,t_0) \end{array}$$

entonces

$$\boxed{\text{Área}(S) = \int_U \|\vec{N}(s,t)\|\, ds\, dt}$$