I: ESPACIOS NORMADOS

NORMAS

Definición: Si E es un $\mathbb{R}$-EV, se dice que una norma sobre E es una aplicación $\| \ \| : E \longrightarrow \mathbb{R}$ que satisface:

Ax. I : $\|x\| = 0 \iff x = 0$

Ax. II : $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\| \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \ \forall x \in E$

Ax. III : $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall x, y \in E$

* De aquí se extrae que $\|x\| = \|-x\|$ y que $\|x\| \geq 0 \quad \forall x \in E$.
* $\|(x_1, \dots, x_n)\|_p = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^p}$ ≡ norma euclídea
* $\|(x_1, \dots, x_n)\|_1 = \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|$ ≡ "norma Manhattan"
* $\|(x_1, \dots, x_n)\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \{\|x_i\|\}$ ≡ norma producto o infinito

Proposición: Las únicas normas sobre $\mathbb{R}$ son los múltiplos positivos del valor absoluto.

Definiciones:

* $d(x,y) := \|x-y\|$ ≡ distancia de x a y asociada a $\| \ \|$.
* $\left\{ \begin{array}{l} B(a,r) \\ B[a,r] \\ E(a,r) \end{array} \right\} = \{ x \in E : d(x,a) \begin{array}{c} < \\ \leq \\ = \end{array} r \}$ $\left. \begin{array}{l} \equiv \text{bola abierta} \\ \equiv \text{bola cerrada} \\ \equiv \text{esfera} \end{array} \right\}$ de centro a y radio r
* $[a,b] := \{ x \in E : x = (1-t)a + tb, \ t \in [0,1] \}$ ≡ segmento de extremos a y b.

Definición: Se dice que un conjunto $A \subseteq E$ es convexo si $\forall x, y \in A$, $[x,y] \subset A$.

Proposición: Las bolas en $(E, \| \|)$ son conjuntos convexos.

Proposición: Si $a \neq b$, $\exists r > 0$ que hace que las bolas ~~sean~~ disjuntas $(B(a,r) \cap B(b,r) = \emptyset)$.

Definición: $(x_n) \xrightarrow{\| \|} a \iff \forall \varepsilon > 0 \; \exists \nu \in \mathbb{N} : n > \nu \implies \| x_n - a \| < \varepsilon$

* Se suele decir también que $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$.

* En dim $< +\infty$, si $(x_n) \xrightarrow{\| \|} a \implies (x_n) \xrightarrow{\| \|^*} a$

Definición: Sea E un $\mathbb{R}$-EV. Se dice que dos normas $\| \|$ y $\| \|^*$ son <u>equivalentes</u> si $\exists \alpha, \beta > 0$: $\begin{cases} \| x \| \leq \alpha \| x \|^* \\ \| x \|^* \leq \beta \| x \| \end{cases} \forall x \in E$.

Proposición: $\| \|$ y $\| \|^*$ equivalentes $\iff$ Si $(x_n) \xrightarrow{\| \|} a$ entonces $(x_n) \xrightarrow{\| \|^*} a$

Definición: Se dice que una función es <u>secuencialmente continua</u> cuando si:

$$(x_p) \subset A \longrightarrow a \implies (f(x_p)) \longrightarrow f(a).$$

Proposición: 1) f continua en $a \iff f$ sec. cont. en a

Si $\| \|, \| \|^*$ eq, 2) f $\| \|$-cont. en $a \iff f$ $\| \|^*$-cont en a

Teorema: Sea $\| \| : E \to \mathbb{R}$ una aplicación que verifica los Ax. I y II. Son equivalentes:

1) $\| \|$ es norma

2) $B[0,1] = \{ x \in E : \| x \| \leq 1 \}$ es convexa

3) $f(\vec{x}) = \| \vec{x} \|^p$, $p \geq 1$, es convexo

4) El Hessiano es positivo (menores principales ≥ 0)

Definición: Diremos que una función $f: A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ es convexa si:

$$f((1-t)x+ty) \leq (1-t)f(x) + t f(y) \qquad \forall x,y \in A,\ t\in[0,1].$$

i.e, $$f([x,y]) \leq [f(x), f(y)].$$

Lema I: En $(E, \|\ \|)$, $(x_n) \xrightarrow{\|\ \|} a \Rightarrow (x_n)$ $\|\ \|$-Cauchy.

Lema II: En $\mathbb{R}^2$ ($\mathbb{R}^n$), $(x_n,y_n) \xrightarrow{\|\ \|_\infty} (a,b) \Rightarrow (x_n) \xrightarrow{|\ |} a$, $(y_n) \xrightarrow{|\ |} b$.

*Teorema: Todas las normas de $\mathbb{R}^n$ son equivalentes.

TOPOLOGÍA

Definiciones:

1) Sea $A \subseteq E$.

* $\mathring{A} = \{a \in E : \exists r>0 : B(a,r) \subset A\}$ = puntos interiores
* $\mathring{\widehat{A^c}} = \{a \in E : \exists r>0 : B(a,r) \subset A^c\}$ = ptos exteriores
* $\overline{A} = \{a \in E : \forall r>0\ B(a,r) \cap A \neq \emptyset\}$ = adherencia, clausura ó cierre.
* $\partial A = Fr(A) = \{a \in E : \forall r>0 \begin{cases} B(a,r)\cap A \neq \emptyset \\ B(a,r)\cap A^c \neq \emptyset \end{cases}\}$ = frontera
* $A' = \{a \in E : \forall r>0\ B(a,r) \cap A \setminus \{a\} \neq \emptyset\}$ = ptos de acumulación
* $A^s = \{a \in E : \exists r>0 : B(a,r) \cap A = \{a\}\}$ = ptos aislados

2) $\mathcal{V}(a) = \{$entornos de $a\}$; $A \in \mathcal{V}(a) \Leftrightarrow a \in \mathring{A}$.

3) A abto cuando $A = \mathring{A}$; A cerrado cuando $A = \overline{A}$.

4) $\tau = \{$abtos de $E\}$ = topología de E

II : FUNCIONES DIFERENCIABLES

Definición : Se dice que una función $f: A \subset E \longrightarrow F$ es Fréchet-diferenciable en un punto $a \in \mathring{A}$ si $\exists$ alguna aplicación lineal $L_a : E \longrightarrow F$ de forma que:

$$(C.D) \quad \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - L_a(x-a)}{\|x-a\|} = 0 = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a) - L_a(h)}{\|h\|}$$

* En el caso de que $f: A \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, se tiene que $L_a(c) = f'(a) \cdot c$, y así

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} .$$

* A L_a se le suele denotar como $Df(a)$.

* Definición : Dada $f: A \subset E \longrightarrow F$, $a \in \mathring{A}$, $h \in E$. Se llama derivada direccional de f siguiendo el vector h en a a

$$D_h f(a) = Df(a)(h) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a+th) - f(a)}{t}$$

Notar que si f dif, admite deriv. direccional en todas direcciones, tomando en (CD) x's de la forma $x = a+th$, $t \in \mathbb{R}$. Tomando los vectores de la base de E,

$$D_{e_i} f(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a+te_i) - f(a)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{f(a_1, \dots, a_i + t, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_n)}{t} = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$$

Y diremos que $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ es la derivada parcial respecto a x_i de f en a. En particular,

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = F_i'(x_i) , \text{ donde } F_i : x_i^{\in \mathbb{R}} \longrightarrow f(a_1, \dots, x_i, \dots, a_n)^{\in \mathbb{R}} \quad (\text{1-variable!})$$

... general la aplicación $\mathcal{L}: E \longrightarrow F$

$h \longmapsto \mathcal{L}(h) = D_h f(a)$ no es lineal. Si lo

es, entonces f es diferenciable en a. En este caso,

$$D_h f(a) = \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$$

Lema: 1) $\mathcal{L}$ lineal $\Rightarrow$ $\mathcal{L}$ continua y lipschitziana. (dim $< +\infty$)

2) $\mathcal{L}$ lineal y continua $\Rightarrow$ $\mathcal{L}$ lipschitziana (dim cualquiera).

Proposición:

1) f dif en a $\Rightarrow \exists! \mathcal{L} \in \mathcal{L}(E,F)$ que satisface (C.D.)

2) Si $f \equiv (f_1, \dots, f_p)$, f dif en a $\Leftrightarrow$ cada f_i dif en a.

3) La (C.D.) es independiente de la norma elegida.

Definición: Se llama $Gr(f) = \{(x,y,f(x,y)) : (x,y) \in A\} = \{(x,y,z) : z = f(x,y) \in A\}$.

Definición: Se dice que un vector w es ortogonal en el pto c a una superficie M ($c \in M$) si $\lim\limits_{\substack{z \to c \\ (z \in M)}} \left(\frac{z-c}{\|z-c\|} \cdot w \right) = 0$. Además, se dice que un plano que pasa por c es tangente a M si el vector normal del plano es ortogonal a M en c.

Definición: Se dice que $f: A \subset E \to F$ es lipschitziana en un pto a si $\exists M \geq 0 : \|f(x) - f(a)\| \leq M \|x - a\|$. Trivialmente se obtiene que

f lipsch en a $\Rightarrow$ f cont. en a.

Teorema: Sea $f: A \subset E \to F$, $a \in \mathring{A}$

$$f \text{ dif en } a \iff \begin{cases} 1) \ \exists D_h f(a) \quad \forall h \in E \\ 2) \ h \in E \longmapsto D_h f(a) \in F \text{ es lineal} \\ 3) \ \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a) - D_h f(a)}{\|h\|} = 0 \end{cases}$$

Teorema: Sea $f: A \subset \mathbb{R}^n \to F$, $a \in \mathring{A}$, $a = (a_1, \dots, a_n)$

$$f \text{ dif en } a \iff \begin{cases} 1) \ \exists \dfrac{\partial f}{\partial x_j}(a) \quad \forall j = 1, \dots, n \\ 2) \ \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - \left[f(a) + \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(a)(x_1 - a_1) + \dots + \dfrac{\partial f}{\partial x_n}(a)(x_n - a_n)\right]}{\|x-a\|} = 0 \end{cases}$$

Teorema: Sea $f: A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $a = (x_0, y_0) \in \mathring{A}$.

$$f \text{ dif en } a \iff \begin{cases} 1) \ f \text{ lipsch. en } a \\ 2) \ G_r(f) \text{ tiene un plano tg (no vertical) en el pto } c = (x_0, y_0, f(x_0, y_0)) \end{cases}$$

* Si f dif en a, $Df(a) \equiv$ diferencial de f en a, que es una aplicación lineal (la que lleva cada vector a su derivada direccional), y por tanto se identifica con una matriz, llamada matriz Jacobiana o matriz de derivadas parciales:

$$J_f(a) \equiv Df(a) \equiv \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial f_p}{\partial x_1}(a) & & \dfrac{\partial f_p}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}$$

Proposición (Reglas de Derivación): Sean $f, g : A \subset E \to F$ dif en $a \in \mathring{A}$

1) $f+g$ dif en a

2) λf dif en a

3) $g \circ f$ dif en a $\left(f: A \subset E \to F \text{ dif en } a \in \mathring{A},\ g: f(A) \subset F \to G \text{ dif en } f(a) \in \mathring{\overline{f(A)}} \right)$

4) $f \cdot g$ dif en a $(F = \mathbb{R})$

5) $\frac{f}{g}$ dif en a $(g(a) \neq 0)$

* Si $A \subset \mathbb{R}^n \xrightarrow{f \to \text{dif}} \mathbb{R}^p \xrightarrow{g \to \text{dif}} F$, $\underbrace{\qquad}_{g \circ f}$ 3) dice que $\frac{\partial g \circ f}{\partial x_j}(a) = \sum_{k=1}^{p} \frac{\partial g}{\partial u_k}(f(a)) \cdot \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(a)$

$x_1 \ldots x_n \longmapsto f(x_1 \ldots)$

$u_1 \ldots u_p \longmapsto g(u_1 \ldots)$

*3) dice "Si las funciones son diferenciables en cada eslabón de la cadena en cada x, $f(x)$, ... $\} \Rightarrow$ la composición dif en x; $\not\Leftarrow$

* 3) dice que los polinomios de varias variables son dif en todos los pts; y que los cocientes de pol. también salvo donde se anule el denominador.

TEOREMAS DEL VALOR MEDIO

Teorema (del Valor Medio para 1-variable): Sea $f:[a,b]\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continua en $[a,b]$ y dif en (a,b)

1) $\exists\, c\in(a,b)$: $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$

2) Si además $|f'(t)|\leq M$, $t\in(a,b)$ $\Rightarrow$ f lipsch. con cte M.

Teorema: Sea $f:A\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, A abto. y convexo: $([x,y]\subset A\ \forall x,y\in A)$.

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x_j}(z)\right|\leq M,\ z\in A,\ j=1,\dots,n \Longrightarrow f \text{ lipsch con cte } M \text{ en } A$$

Corolario I (recíproco): Sea $f:A\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ (abto) : $\exists\,\frac{\partial f}{\partial x_j}(z)$. $\forall z\in A$.

$$f \text{ lipsch con cte } M \text{ en } A \Rightarrow \left|\frac{\partial f}{\partial x_j}(z)\right|\leq M \text{ en } A$$

Corolario II: Sea $f:A\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ tal que $\exists\,\partial f$ en alguna bola centrada en a y ∂f son continuas.

1) (Condición Suficiente de Diferenciabilidad) : f dif en a

2) f lipsch en alguna bola centrada en a.

Corolario III: $f:A\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^p$, y $x,y\in A$: $[x,y]\subset A$.

$$\left|\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(z)\right|\leq M,\ z\in A,\ i=1,\dots,p,\ j=1,\dots,n \Rightarrow f \text{ lipsch con cte } M.$$

__Corolario__: $f: A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$; $\exists \dfrac{\partial f}{\partial x_j}$ y continuas $\Rightarrow f$ ~~dif~~ y lipsch.

__Teorema__ (del Valor Medio para funciones diferenciables): Sea $f: A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ continua en una $[a,b] \subset A$ y dif en (a,b)

1) $\exists\, \xi \in (a,b) \;:\; f(b) - f(a) = Df(\xi)(b-a)$

2) Si además $\left| \dfrac{\partial f}{\partial x_j}(z) \right| \leq M$, $\forall z \in (a,b) \Rightarrow f$ lipsch con cte M.

__DERIVADAS PARCIALES DE ORDEN SUPERIOR__

__Definición__: Sea $f: A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$. Ya las definidos

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \frac{\partial f}{\partial x_j}(x).$$

; donde $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(a) = F_j'(a)$, con $F_j : x_j \in \mathbb{R} \to f(a_1, \dots, x_j, \dots, a_n)$

Llamaremos __derivada parcial r-ésima__ a $\dfrac{\partial^r f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_r}}(a) = \dfrac{\partial}{\partial x_{i_r}} \left(\dfrac{\partial^{r-1} f}{\partial x_{i_2} \cdots \partial x_{i_r}}(a) \right)$.

__Teorema__ (Schwarz): Sea $f: A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $a \in \mathring{A}$.

$\partial^2 f$ __definidas__ en una bola $B(a,r)$ y __continuas en a__ $\Longrightarrow \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)$

__Lema__: $\partial^r f$ continuas en $a \Longrightarrow \partial^{r-1}$ continuas en un entorno de a.

__Corolario__: Si todas las $\partial^r f$ están definidas en $B(a,r)$ y son continuas en a, entonces el proceso de derivar parcialmente es __conmutativo__.

Definición: Se dice que una función $f: A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow F$ es de clase r en un punto a, $f \in C^r(a)$, si $\exists\ \partial^r f$ en alguna $B(a,s)$ y son continuas. Se dice que $f \in C^r(B)$, $B \subset A$, si $f \in C^r(b)\ \forall b \in B$.

$$* \quad f \in C^r(a) \Longrightarrow \begin{cases} 1)\ \partial^r f \text{ definidas en alguna } B(a,r) \text{ y continuas en } a\ (D\circ f) \\ 2)\ \partial^{r-1} f \text{ dif. en } a\text{, lipsch. y cont. en } B(a,r')\quad (\text{Cor. II}) \\ 3)\ \partial^{r-2} f, \dots, f \text{ son dif, lipsch y continuas en bolas centradas en } a \\ 4)\ \text{Las derivadas parciales cruzadas coinciden.} \end{cases}$$

Definición: Llamamos polinomio de Taylor de orden r de f en a expresado en potencias de x, $P_r f(a)\, x$, a

$$P_r f(a)\, x = f(a) + \frac{1}{1!}\sum_{1\le i\le n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\, x_i + \dots + \frac{1}{k!}\sum_{1\le i_1,\dots,i_k\le n} \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1}\cdots\partial x_{i_k}}(a)\, x_{i_1}\cdots x_{i_k} + \frac{1}{r!}\sum \frac{\partial^r}{\partial\cdots\partial} x_{i_1}\cdots x_{i_r}$$

$$= f(a) + \sum_{k=1}^{r} \left(\sum_{k_1+\dots+k_n=k} \frac{1}{k_1!\cdots k_n!}\, \frac{\partial^k f}{\partial x_1^{k_1}\cdots\partial x_n^{k_n}}(a)\cdot x_1^{k_1}\cdots x_n^{k_n} \right)$$

Se llamará desarrollo de Taylor cuando venga expresado en potencias de un pol. $P(x)$.

Proposición: $\dfrac{\partial}{\partial x_j}\left(P_r f(a)\, x\right) = P_{r-1}\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(a)\, x$

Teorema (Local de Taylor): Si $f: A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ es de clase C^r en a, $\Rightarrow f$ tiene un contacto de orden r en a con $P_r f(a)(x-a)$, i.e.,

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - P_r f(a)(x-a)}{\|x-a\|^r} = 0$$

Lema: Sea P un pol de vars posibles (n)

1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{P(x)}{\|x\|^r} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{[P(x)]_{\leq r}}{\|x\|^r}$

2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{P(x)}{\|x\|^r} = 0 \Rightarrow [P(x)]_{\leq r} = 0.$

Proposición (Unicidad del Polinomio de Taylor): Sea $f: A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f \in C^r(a)$, $a \in \mathring{A}$.

Todo polinomio P que verifique $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a+h) - P(h)}{\|h\|^r} = 0$ tiene como términos de grado $\leq r$ precisamente el $P_r f(a) h$. $(h \equiv x-a)$

Proposición (Propiedades de $P_r f(a) x$):

1) $P_r(\lambda f + \mu g)(a) x = \lambda P_r f(a) x + \mu P_r g(a) x$

2) $P_r(f\cdot g)(a) x = [P_r f(a) x \cdot P_r g(a) x]_{\leq r}$

3) $P_r(g\circ f)(a) x = [P_r g(f(a))(P_r f(a) x - f(a))]_{\leq r}$

4) $P_r Q(a) x = [Q(x+a)]_{\leq r}$ (Q polinomio).

Teorema (Global de Taylor): Sea $f: A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f \in C^{r+1}([a, a+h])$, con h fijo. Entonces $\exists\, \theta \in (0,1)$:

$$f(a+h) - P_r f(a) h = \frac{1}{(k+1)!} D^{r+1} f(a+\theta h) h^{r+1}$$

donde $D^k f(a) x^k = Q_k(x)$.

III: FUNCIONES IMPLÍCITAS

__Teorema__ (de Banach del punto fijo): Sea $K: B[\xi,r] \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow B[\xi,r] \subset \mathbb{R}^n$ una aplicación contractiva (lipsch. con cte <1). Entonces K tiene un único punto fijo, i.e., $\exists!\, x_0 \in B[\xi,r] : K(x_0) = x_0$.

__Definición__: Dados $X, Y \neq \emptyset$, se dice que un conjunto $M \subset X \times Y$ es __la gráfica de una función de x__ si $M = \{(x, h(x)) \in X \times Y : h: pr_X M \subset X \to Y\}$, i.e., si dados $(x, y_1), (x, y_2) \in M \Rightarrow y_1 = y_2 = h(x)$. Análogamente, se dice que M __es gráfica de una función de y__ si $M = \{(h(x), y) \in X \times Y : h: pr_Y M \subset Y \to X\}$, i.e., si dados $(x_1, y), (x_2, y) \in M \Rightarrow x_1 = x_2 = h(y)$.

* El punto de partida del problema de las funciones implícitas va a ser una función $f: A \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$ y un conjunto $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p : f(x,y) = 0\}$.

__Definición__: Se dice que un punto $c \in M \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ es __regular__ de M si $\exists\, W \in \mathcal{V}(c)$ (un entorno de c) : $W \cap M = Gr(h)$ para alguna $h: A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ ó $h: B \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$. En otras palabras, si el trozo de M contenido en W es la gráfica de alguna función de x ó y.

* El __problema de las funciones implícitas__ trata de dar a la función f condiciones de suficiencia para que en un cierto punto haya algún entorno tal que el trozo de $M = \{(x,y) : f(x,y) = 0\}$ contenido en el entorno sea la gráfica de alguna función; i.e., que el pto sea regular.

Lema: Son equivalentes; si $(a,b) \in M$

1) $\exists W \in \mathcal{V}(a,b) : M \cap W = \mathrm{Gr}\, h$, h única, $h : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$, h continua en a

2) $\exists B(a,s), B(b,r) : \forall x \in B(a,s)\ \exists! y = h(x) \in B(b,r)$, con $f(x, \overset{h(x)}{y}) = 0$, h cont. en a.

Teorema (de las Funciones Implícitas): Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^p$, y sea $(a,b) \in \mathring{A}$ tal que $f(a,b) = 0$. Si se verifica

1) f continua en (a,b) (ó cont. en algún entorno, ó dif en (a,b), ó $f \in C^r$ en algún entorno de (a,b))

2) $\dfrac{\partial f_i}{\partial y_j}$ definidas en algún entorno de (a,b) y continuas en (a,b)

3) $\det \left(\dfrac{\partial f_i}{\partial y_j}(a,b) \right) \neq 0$

$\Rightarrow \exists B(a,s), B(b,r) : \forall x \in B(a,s)\ \exists! y = h(x) \in B(b,r)$ con $f(x,h(x)) = 0$ y siendo $h : x \in B(a,s) \longrightarrow y \in B(b,r)$ continua en a (ó cont. en un entorno, ó dif en a, ó $h \in C^r$ en un entorno de a). En otras palabras: $\exists W \in \mathcal{V}(a,b) : M \cap W = \mathrm{Gr}\, h$, es decir, $f(x,y)=0$ define implícitamente en algún entorno de (a,b) a una única función de x; es decir, $f(x,y) = 0$ permite despejar y como una función de x en algún entorno.

Lema (Fundamental de Derivación de Funciones Implícitas): Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^p$ dif en $(a,b) \in \mathring{A}$, con $f(a,b) = 0$, y que $\det \left(\dfrac{\partial f_i}{\partial y_j}(a,b) \right) \neq 0$. Sea también $h : B(a,r) \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ con $h(a) = b$, h cont. en a y $f(x,h(x)) = 0$.

$\Rightarrow h$ dif en a y $\underline{Dh(a) = -D_2 f(a,b)^{-1} \circ D_1 f(a,b)}$.

IV: VARIEDADES DIFERENCIABLES

<u>Definición</u> (Explícita de Variedad): Se dice que $\emptyset \neq M \subset \mathbb{R}^k$ es una <u>variedad diferenciable</u> de dim $1 \leq n < k$ y clase C^r si cada $c \in M$ es regular; ie, si para cada $c \in M$ $\exists W \in \mathcal{V}(c) : M \cap W = Gr\, h$, $h : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ $(k = n+p)$, donde $h \in C^r(U)$.

<u>Definición</u> (Implícita de Variedad): Se dice que $\emptyset \neq M \subset \mathbb{R}^k$ es una <u>variedad diferenciable</u> de dimensión $1 \leq n < k$ y clase C^r si para cada $c \in M$ $\exists W \in \mathcal{V}(c)$ y una función $f : W \subset \mathbb{R}^k = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$ tal que $M \cap W = \{(x,y) \in W : f(x,y) = 0\}$ con $f \in C^r(W)$ y $rg(Df(c)) = p$.

<u>TANGENCIA Y ORTOGONALIDAD</u>

* $\underline{Ort_c M} = \{w \in \mathbb{R}^k \text{ ortogonales a } M \text{ en } c\} = \{w \in \mathbb{R}^k : \lim_{\substack{z \to c \\ z \in M}} \left(\frac{z-c}{\|z-c\|} \cdot w\right) = 0\}$

* $\underline{T_c(M)} = \{w \in \mathbb{R}^k \text{ tangentes a } M \text{ en } c\} = (Ort_c M)^{\perp}$

<u>Proposición</u>: Sea $M \subset \mathbb{R}^k$ V.D. y $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^k$ una curva en $\mathbb{R}^k$ que verifique $\{\gamma(t)\} \subset M$ y tomemos un $t_0 \in \mathring{I}$ tal que $\gamma(t_0) = c \in M$.

$$\exists \gamma'(t_0) \Rightarrow \gamma'(t_0) \in T_c(M).$$

Teorema: Sea $M = Gr\, h$, $h : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ dif en $a \in A$, y $c = (a, h(a)) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p = \mathbb{R}^k$. Son equivalentes:

1) $(u, v) \in T_c(M) \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p = \mathbb{R}^k$

2) $\exists\, \gamma : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^k : (u, v) = \gamma'(t_0)$ para algún $t_0 \in \mathring{I}$

3) $v = Dh(a)(u)$

* En particular, esto dice que $\underline{T_c(M) = \{ (u, Dh(a)(u)) \}}$

Proposición: Sea $M \subset \mathbb{R}^k$ una V.D. de dim n y clase C^r, sea $c \in M$, y sea $W \in \mathcal{N}(c)$: $M \cap W = \{ z \in W : f(z) = 0 \}$, $f : W \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p = \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^p$ y $f \in C^r(W)$, $rg(Df(c)) = p$.

$$\underline{T_c(M) = Ker\, Df(c)}$$

V: EXTREMOS RELATIVOS

<u>Definición</u>: Sea $f: A \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$, $\boxed{a \in \mathring{A}}$. Se dice que

* f presenta un <u>mínimo relativo</u> en a si $\exists B(a,r)$: $f(x) - f(a) \geq 0$ $\forall x \in B(a,r)$
* <u>mínimo absoluto</u> $>$
* <u>máximo relativo</u> $\leq$
* <u>máximo absoluto</u> $<$

* Diremos en general que f presenta un <u>extremo</u> en a si se da alguna de las 4 opciones.

* $P_r f(a) h = f(a) + Q_1(h) + \dots + Q_r(h)$.

<u>Teorema</u> (Condiciones de Mínimo Relativo): Sea $f: A \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$, $\boxed{a \in \mathring{A}}$. Sea <u>$r$</u> el mínimo natural : $\exists\, \partial^r f(a) \neq 0$, y supongamos $f \in C^r(a)$.

1) <u>(Condición Necesaria de Mínimo Relativo)</u>

f presenta un mínimo relativo en a $\Longrightarrow \begin{cases} \cdot\ r \text{ par} \\ \cdot\ Q_r(h) \geq 0 \quad \forall h \in \mathbb{R}^k \end{cases}$

2) <u>(Condición Suficiente de Mínimo Relativo)</u>

$Q_r(h) > 0 \quad \forall h \neq 0 \Longrightarrow \begin{cases} \cdot\ r \text{ par} \\ \cdot\ f \text{ presenta un mínimo relativo en } a \end{cases}$

<u>Corolario</u>: Sea f diferenciable en a.

f presenta un extremo $\Longrightarrow \dfrac{\partial f}{\partial x_j}(a) = 0 \quad \forall j = 1, \dots, k$.

* Los puntos en los que ∂f se anula son los candidatos a extremo. Se llaman <u>puntos críticos</u>.

Extremos [illegible]

Sea $M \subset \mathbb{R}^k$ una VD de dim n, $c \in M$ y $\varphi : A \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$, $\boxed{c \in \mathring{A}}$

<u>Definición</u>: Se dice que φ presenta un mínimo sobre M en c si

$$\varphi(z) - \varphi(c) \geq 0 \qquad \forall z \in M \cap W, \quad W \in \mathcal{N}(c)$$

(Condición Necesaria de Extremo sobre Variedad)

<u>Proposición</u>: Sea $\varphi : A \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ dif en $\boxed{c \in \mathring{A}}$.

$$\varphi \text{ presenta un extremo en } c \in M \Longrightarrow D\varphi(c)(w) = 0 \quad \forall w \in T_c(M)$$

∗ Sea M V.D. y $c \in M$: $\exists W \in \mathcal{N}(c)$: $M \cap W = \{z \in W : f_i(z) = 0 \ \forall i = 1, \dots, p\}$.

$$\left.\begin{array}{l} * \ D\varphi(c)(w) = 0 \quad \forall w \in T_c(M) \Longleftrightarrow \nabla\varphi(c) \in \mathrm{Ort}_c M \\ * \ w \in T_c(M) \Longleftrightarrow \nabla f_i \cdot w = 0 \Longrightarrow \nabla f_i(c) \in \mathrm{Ort}_c M \overset{\text{rg } Df(c) = p}{\Longrightarrow} \{\nabla f_i(c)\}_{i=1}^{p} \text{ L.I.} \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$$\Rightarrow \exists! \mu_1, \dots, \mu_p : \quad \nabla\varphi(c) = \mu_1 \nabla f_1(c) + \dots + \mu_p \nabla f_p(c).$$

<u>Teorema</u> (Multiplicadores de Lagrange): Sea f la que define a la V.D. M de antes.

$D\varphi(c)(w) = 0 \quad \forall w \in T_c(M) \Longleftrightarrow \exists! \lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}$, llamados <u>multiplicadores de Lagrange</u> tales que c es un punto crítico de la función $F = \varphi + \lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_p f_p$,

ie, $\dfrac{\partial F}{\partial x_j}(c) = 0 \quad \forall j = 1, \dots, k$.

Definición: Dada una función $f: A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, llamaremos matriz hessiana de f en a

$$H_f(a) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \right)_{i,j=1,\dots,n} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(a) \\ \vdots & & \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(a) \end{pmatrix}.$$

Y denotemos con $\Delta_\ell := \det \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \right)_{i,j=1,\dots,\ell}$. Entonces se dice que:

* $H_f(a)$ es definida positiva si $\Delta_i > 0 \quad \forall i = 1, \dots, n$
* $H_f(a)$ es semidefinida positiva (ó no negativa) si $\Delta_i \geq 0 \quad \forall i = 1, \dots, n$.
* $H_f(a)$ es definida negativa si $\Delta_i > 0 \ \forall i$ par y $\Delta_i < 0 \ \forall i$ impar
* $H_f(a)$ es semidefinida negativa (ó no positiva) si $\Delta_i \geq 0 \ \forall i$ par y $\Delta_i \leq 0 \ \forall i$ impar

Teorema (Condiciones de Extremo con el Hessiano):

1) $Q_2(h) > 0 \quad \forall h \neq 0 \iff H_f(a)$ es definida positiva
2) $Q_2(h) \geq 0 \quad \forall h \iff H_f(a)$ es semidefinida positiva
3) $Q_2(h) < 0 \quad \forall h \neq 0 \iff H_f(a)$ es definida negativa
4) $Q_2(h) \leq 0 \quad \forall h \iff H_f(a)$ es semidefinida negativa.

VII : FUNCIONES INVERSAS

* En 1-variable, dada una función $f: t \in I \subset \mathbb{R} \longrightarrow f(t) \in \mathbb{R}$ biyectiva (se entiende inyectiva, y se considera la biyección con $f(I)$), llamamos

$f^{-1}: u = f(t) \in f(I) \subset \mathbb{R} \longrightarrow f^{-1}(f(t)) = t \in I.$

Teorema (de Inversión en 1-variable): Sea f como antes y inyectiva y derivable en t_0.

$$f^{-1} \text{ derivable en } f(t_0) \iff f'(t_0) \neq 0$$

y además se verifica que $$(f^{-1})'(f(t_0)) = \frac{1}{f'(t_0)}$$

Lema (de Inversión local): Sea $g: A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $g \in C^1(a)$ $a \in \mathring{A}$, $\det\left(\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(a)\right) \neq 0$. Entonces $\exists\, B(a,r)$ tal que:

1) g lipsch. en $B(a,r)$ y estrict. dif en a

2) g inyectiva en $B(a,r)$ y $g^{-1}: g(B(a,r)) \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ continua

3) $g(B(a,r))$ es abto.

Teorema (de Inversión de Dominios): Sea $\varphi: \overset{\text{abto}}{U} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ inyectiva y continua en $U \Rightarrow \varphi(U)$ abto y $\varphi^{-1}: \varphi(U) \longrightarrow U$ continua.

Teorema (Derivada de la Función Inversa): Sea $g : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ inyectiva y dif en $a \in \mathring{A}$.

$$g^{-1} : g(A) \to A \text{ dif en } g(a) \iff \begin{cases} 1) & g(a) \in \mathring{\overline{g(A)}} \\ 2) & g^{-1} \text{ continua en } g(a) \\ 3) & \det\left(\frac{\partial g_i}{\partial a_j}(a)\right) \neq 0 \end{cases}$$

y además, verifica que $$\left(Dg^{-1}(g(a))\right) = \left(Dg(a)\right)^{-1}$$

Teorema (de la Función Inversa): Sea $g : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $g \in C^1(a)$, $a \in \mathring{A}$, y $\det\left(\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(a)\right) \neq 0$. Entonces.

1) $\exists\, U \in \mathcal{N}(a)$, $V \in \mathcal{N}(g(a))$: g es una biyección bicontinua (homeomorfismo) entre U y V; y además, $g^{-1} : g(U) \to U$ es dif en $g(a)$.

2) g dif en algún entorno de a (ó $g \in C^1$(algún entorno)) $\Rightarrow g^{-1}$ hereda estas propiedades.

Definición: Se dice que una función $g : U \subset \mathbb{R}^n \to V \subset \mathbb{R}^n$, U, V abtos, es un difeomorfismo de clase C^r si g es una biyección tal que g y g^{-1} sean de clase C^r.

Se dice además que $g : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, U abto, es un difeomorfismo local de clase C^r sobre U si $\forall x \in U$ $\exists U_x \subset U$, $V_x \subset \mathbb{R}^n$, $g(x) \in V_x$ tal que $g_{|U_x} : U_x \subset \mathbb{R}^n \to V_x \subset \mathbb{R}^n$ sea un difeomorfismo de clase C^r entre U_x y V_x.

<u>Corolario</u> (Difeomorfismo local): Sea $g: U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, U abierto, $g \in C^r(U)$

g difeomorfismo local de clase C^r sobre U $\iff$ $\det\left(\dfrac{\partial g_i}{\partial x_j}(x)\right) \neq 0 \quad \forall x \in U$.

<u>Corolario</u> (Difeomorfismo): Sea $g: U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, U abierto, $g \in C^r(U)$

$$g \text{ difeomorfismo de clase } C^r \text{ sobre } U \iff \begin{cases} 1) \ g \text{ inyectiva} \\ 2) \ \det\left(\dfrac{\partial g_i}{\partial x_j}(x)\right) \neq 0 \quad \forall x \in U. \end{cases}$$

ANEXO :

* Algoritmo para la detección de MÁX y MÍN:

1) Obtención de puntos críticos: resolver

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_1, \dots, x_n) = 0 \qquad j = 1, \dots, n.$$

2) Sea a un pto crítico, y sea la 1ª $\partial f(a) \neq 0$ de orden $\underline{\underline{r}}$.

$\boxed{r \text{ IMPAR}} \Rightarrow f$ no tiene extremos en a

$\boxed{r \text{ PAR}}$
$$\begin{cases} Q_r(h) > 0 \quad \forall h \neq 0 & \Rightarrow \text{MÍNIMO en } a \\ Q_r(h) < 0 \quad \forall h \neq 0 & \Rightarrow \text{MÁXIMO en } a \\ Q_r(h) \text{ puede ser } > 0 \text{ y } < 0 & \Rightarrow f \text{ no tiene extremos en } a \\ Q_r(h) \geq 0 \quad \forall h \neq 0 & \Rightarrow \text{CASO DUDOSO. NO SABEMOS} \end{cases}$$

* Si M es una superf. V.D. def. por un sistema de ecuaciones:

$$\dim M = \text{nº incógnitas} - \text{nº ecuaciones.}$$

* Para ver si es una V.D. estudiar el rg de $Df(c)$. Desarrollar los determinantes de los menores y resolver el sistema $\begin{cases} \text{determinantes de los menores} = 0 \\ \text{ecuaciones que definen } M = 0 \end{cases}$ y esos serán los ptos que habrá que quitar para que M sea una VD.