I: ESPACIOS NORMADOS

Definición: Sea X un K-EV. Una norma sobre X es una aplicación $\|\cdot\|: X \to \mathbb{R}$ que cumple:

i) $\|x\| = 0 \iff x = 0$

ii) $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$, $\forall \lambda \in K$, $x \in X$

iii) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$, $\forall x, y \in X$

Si cumple ii) + iii) se dice que es una seminorma, y si cumple ii) con $\lambda \geq 0$ + iii) se llama funcional sublineal.

Proposición (Propiedades):

1) $\|x\| \geq 0$ $\forall x \in X$

2) $\big| \|x\| - \|y\| \big| \leq \|x-y\|$.

Definición:

a) Una sucesión (x_n) en $(X, \|\cdot\|)$ converge a $x \in X$ si $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \nu \in \mathbb{N}$: $n > \nu \Rightarrow \|x_n - x\| < \varepsilon$

b) Una sucesión (x_n) en $(X, \|\cdot\|)$ es de Cauchy si $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \nu \in \mathbb{N}$: $n, m > \nu \Rightarrow \|x_n - x_m\| < \varepsilon$

Definición (versión espacios métricos): Un espacio métrico (X, d) se dice completo si toda sucesión de Cauchy es convergente, ie, convergente $\iff$ Cauchy.

Definición: Un espacio de Banach es un espacio normado completo.

Definición: Sea (X, τ) ET. Un subconjunto $A \subset X$ se dice que es denso en X si $\overline{A} = X$.

Proposición: Sea (X, d) EM, y $A \subset X$. Son equivalentes:

1) A es denso en X

2) $\forall x \in X$ $\exists (a_n) \subset A$: $(a_n) \to x$

3) $A \cap G \neq \emptyset$ $\forall \emptyset \neq G \in \tau$.

Lema: Sea $A \subset (X,d) \in M$, y $x \in X$.

$$x \in \overline{A} \iff \exists\, (x_n) \subset A \ : (x_n) \to x.$$

Teorema: Sea (X,d) un espacio métrico completo, $Y \subset X$. [X Banach]

$$(Y, d_{|Y}) \text{ completo} \iff Y \text{ cerrado en } X$$

$$\left[\ (Y, \|\cdot\|) \text{ Banach} \iff Y \text{ cerrado en } X\ \right]$$

Definición: Sea (X,d) un espacio métrico. Se dice que un espacio métrico completo $(\hat{X}, \hat{d})$ es la compleción de X si existe una isometría (neces. inyect.) $f:(X,d) \to (\hat{X},\hat{d})$ tal que $f(X)$ sea denso en $(\hat{X},\hat{d})$, i.e., $\overline{f(X)} = \hat{X}$. En tal caso pensamos X y $f(X)$ como idénticos (isométricos) y X puede ser considerado como un subespacio de $\hat{X}$.

Teorema. Todo espacio métrico tiene una única compleción, salvo isometrías.

En lenguaje de espacios normados: todo espacio normado es (isométrico a) un subespacio de un espacio de Banach.

• Espacio cociente: Sean $Y \subseteq X$ EN. Podemos considerar el cociente X/Y, cuyas clases son de la forma $[x] = x + Y$, y es un EV. Sobre él podemos además considerar la norma

$$\|x + Y\| := \inf_{y \in Y} \|x + y\| .$$

Teorema: X Banach, Y cerrado $\implies$ X/Y Banach. (o sea, el cociente de Banach es de Banach)

• Espacio producto: Sean $X_1, \dots, X_n$ EN. El producto cartesiano $X_1 \times \dots \times X_n$ es un EV, y sobre él podemos considerar la norma

$$\|(x_1, \dots x_n)\|_\infty := \max_i \|x_i\| ,$$

y a $(X_1 \times \dots \times X_n, \|\cdot\|_\infty)$ se le llama espacio producto.

Teorema: El espacio producto de espacios de Banach es un espacio de Banach.

EQUIVALENCIA DE NORMAS

Definición: Dos normas $\|\cdot\|$ y $\|\cdot\|^*$ sobre un espacio X se dicen equivalentes si inducen la misma topología sobre X.

Proposición: Dos normas $\|\cdot\|$, $\|\cdot\|^*$ sobre X son equivalentes si y sólo si $\exists \lambda, \mu > 0$:

$$\left.\begin{array}{l} \|x\| \le \lambda \|x\|^* \quad \forall x \in X \\ \|x\|^* \le \mu \|x\| \quad \forall x \in X \end{array}\right\}.$$

i.e, $\alpha \|x\| \le \|x\|^* \le \beta \|x\|$, i.e, $\alpha B^* \subseteq B \subseteq \beta B^*$.

Teorema: En todo espacio vectorial de dimensión finita todas las normas son equivalentes.

• NOTA: En dim ∞ no es verdad! En $\varphi \equiv$ suc. finitas, $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_\infty$ no son eq.

• $\varphi \subset C_{00} \subset C_0 \subset C \subset l_\infty$

φ: suc. finitas ||| polinomios

C_{00}: suc. eventualmente nulas

C_0: suc. converg. a 0

C: suc. convergentes

l_∞: suc. acotadas

• Es claro que si $\|\cdot\|$, $\|\cdot\|^*$ son eq., ent. (x_n) $\|\cdot\|$-Cauchy ($\|\cdot\|$-converg.) $\Longleftrightarrow (x_n)$ $\|\cdot\|^*$-Cauchy ($\|\cdot\|^*$-conv

Corolario:

1) Todo espacio normado de dim finita es de Banach (completo)

2) Toda aplicación lineal entre espacios normados de dim finita es continua.

• En dim ∞ ninguna de estas cosas es verdad en general.

Definición: Sean $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ espacios normados. Un operador es una aplicación lineal y continua $T: X \to Y$. El conjunto de operadores de X en Y se denotará $L(X,Y)$, y es claro que es un EV. Cuando $Y = \mathbb{R}$, el espacio de operadores se llama dual de X y se denota $X^* := L(X, \mathbb{R})$. Sus elementos se llamarán funcionales.

Definición. Dada una aplicación lineal $T: X \to Y$, se llama norma de T a

$$\|T\| := \inf\{M : \|Tx\| \leq M\|x\| \quad \forall x \in X\}.$$

Tal nombre viene pq $\|\cdot\|$ definida así es una norma sobre $L(X,Y)$.

Teorema: Sea $T: X \to Y$ una aplicación lineal entre espacios normados. Son equivalentes:

1) T continua
2) T continua en un punto (p.ej. en 0)
3) T uniformemente continua
4) T lipschitziana
5) T es acotada, ie, $T(B_X)$ está acotado.
6) $\exists M : \|Tx\| \leq M\|x\| \quad \forall x \in X$
7) $\|T\| < +\infty$.

Proposición:

$$\|T\| = \inf\{M : \|Tx\| \leq M\|x\| \ \forall x \in X\} = \inf\{M : \|Tx\| \leq M \ \forall \|x\| = 1\}$$

$$= \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\| = \sup_{\|x\|<1} \|Tx\|,$$

y en particular se tiene que

$$\boxed{\|Tx\| \leq \|T\| \, \|x\|}.$$

DESIGUALDADES DEL ANÁLISIS FUNCIONAL

Definición: Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida. Para $1 \leq p < \infty$ consideramos

$$\mathcal{L}_p := \{ f : \Omega \to \mathbb{K} \text{ medibles y } p\text{-integrables, i.e. } \int |f|^p < \infty \}.$$

En adelante denotaremos $\|f\|_p := \left(\int |f|^p \right)^{1/p}$, y será $\|f\|_p < \infty$ cuando $f \in \mathcal{L}_p$.

Proposición: $\mathcal{L}_p$ es un EV.

Definición: Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida. Llamaremos

$$\mathcal{L}_\infty := \{ f : \Omega \to \mathbb{K} \text{ medibles y acotadas, i.e. } \sup |f| < \infty \}.$$

En adelante denotaremos $\|f\|_\infty := \sup_{x \in \Omega} |f(x)|$.

Definición: Diremos que $p > 1$ y $q < \infty$ son exponentes conjugados si $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, i.e., si $p + q = pq$.

Además diremos que 1 y ∞ son exp. conjug. también.

Lema (Desigualdad de Young): Sean $p > 1$, $q < \infty$ exp. conj. y $a, b > 0$. Entonces $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$.

Teorema (Desigualdad de Hölder): Sean $p \geq 1$, $q \leq \infty$ exp. conj. Si $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ son medibles, entonces

$$\boxed{\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q}$$

DESIGUALDAD DE HÖLDER

En particular, si $f \in \mathcal{L}_p$, $g \in \mathcal{L}_q \Rightarrow fg \in \mathcal{L}_1$.

Teorema (Desigualdad de Minkowski): Sea $p \geq 1$, y $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ medibles. Entonces

$$\boxed{\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p}$$

DESIGUALDAD DE MINKOWSKI

En particular, si $f, g \in \mathcal{L}_p \Rightarrow f+g \in \mathcal{L}_p$.

Corolario: $\|\cdot\|_p$, $p\geq 1$, es una seminorma sobre $\mathcal{L}_p$.

• La condición que no cumple es la de si $\|f\|_p = 0 \Rightarrow f=0$, pq si $\int |f|^p = 0 \Rightarrow f = 0$ c.s., pero no necs. $f=0$. Lo que hacemos es "definir" la igualdad: sobre $\mathcal{L}_p$, $1<p<\infty$, hacemos la rel de eq

$$f \sim g \iff f = g \text{ c.s.}$$

y denotamos al conjunto cociente por $L_p := \mathcal{L}_p/\sim$, que es un K-EV. Ahora ya sí $\|\cdot\|_p$ es norma:

Proposición: $(L_p, \|\cdot\|_p)$ es un espacio normado, $1\leq p\leq\infty$.

• K^n: $(\Omega = \{1 \dots n\}, \mathcal{P}(\Omega), \mu = $ med. de contar$)$. Cada $f: \Omega \to K \in L_p \longleftrightarrow (x_1, \dots x_n) \in K^n$.
$i \mapsto x_i$

$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{1/p}$, $\|x\|_\infty = \max |x_i|$, ... $\Rightarrow$ $(K^n, \|\cdot\|_p)$ es un esp. normado.

• l_p: $(\Omega = \mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu = $ med. contar$)$. Cada $f: \mathbb{N} \to K \longleftrightarrow (x_n) = (x_1, x_2, x_3, \dots)$ sucesión.
$i \mapsto x_i$

$\|(x_n)\|_p = \left(\sum_{i=1}^\infty |x_i|^p\right)^{1/p} \rightarrow L_p \overset{\text{not}}{=} (l_p, \|\cdot\|_p) \equiv$ sucesiones p-sumables

$\|(x_n)\|_\infty = \sup_{i\in\mathbb{N}} |x_i| \Rightarrow (l_\infty, \|\cdot\|_\infty) \equiv$ sucesiones acotadas

ESPACIOS DUALES

• Consideremos $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_p)$, y su dual $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_p)^* = L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}) \overset{\text{algebr.}}{=} \mathbb{R}^2$. Tal igualdad es un isomorfismo. Nos preguntamos:

$T(x,y) = ax+by \longleftrightarrow (a,b)$
$\quad\quad \mathbb{R}^{2*} \quad\quad\quad\quad \mathbb{R}^2$

¿hay alguna norma en $\mathbb{R}^2$ tal que para cada $T \equiv (a,b)$, $\|T\| = \|(a,b)\|_{\bigcirc}$?

Proposición: Si E es un espacio normado de dim $<\infty$, y $1\leq p\leq\infty$, $\exists q$ su exp. dual, entonces

$$(E, \|\cdot\|_p)^* = (E, \|\cdot\|_q).$$

Scanned by CamScanner

• ¿Y en la dim ∞? ¡Necesitamos bases!

<u>Definición</u>: Sea X un $\mathbb{K}$-EV. Se dice que $\{e_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ (Γ conj. de índices arbitrario) es una <u>base de Hamel</u> de X si

i) cualquier subconjunto <u>finito</u> $\{e_{i_1},\dots,e_{i_n}\}\subseteq\{e_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ es L.I.

ii) todo elemento de X puede escribirse como C.L. <u>finita</u> de $\{e_\gamma\}$, ie, todo $x\in X$ es $x=\sum_{\text{finita}}\lambda_i e_i$.

• Las bases de los EV de dim $<\infty$ son de Hamel, con $\Gamma=\{1..n\}$.

• Tiene sentido hablar de dimensión como el cardinal de Γ.

- φ tiene una base de Hamel $\{e_n\}=\{(0,..,\overset{n)}{1},0,...)\}=\{x^n\}$, y tiene dim $\aleph_0$

- c " " " " todas las suc. posibles con 1's y 0's. Tiene dim $\aleph_1$, igual que $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

• Con ayuda del Lema de Zorn se prueba que todo EV admite una base de Hamel. Estas tienen base, ¡pero tiene muchos elementos!

<u>Definición</u>: Sea X un espacio normado. Una <u>base de Schauder</u> es una sucesión de elementos de X $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que para cada $x\in X$ $\exists(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $x=\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i e_i$.

• <u>IMPORTANTE</u>: Cuando escribo $\sum_{n=1}^{\infty}$, estoy escribiendo $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}$, ¡depende de la norma! Que $x=\lim_n\sum_{i=1}^{n}\lambda_i e_i$ signfica

$$\left\|x-\sum_{i=1}^{n}\lambda_i e_i\right\|\longrightarrow 0 \quad \text{cuando } n\to\infty.$$

• No todo EV admite base de Schauder.

• $(c,\|\cdot\|_\infty)$ no admite a $(e_n)_{n=1}^{\infty}=((0,..,\overset{n}{1},..))$ como base de Schauder, pero sí a $(e_n)_{n=0}^{\infty}$, con $e_0=(1,1,1,\dots)$.

• $(\ell_\infty,\|\cdot\|_\infty)$ " " . . . .

• $(c_0,\|\cdot\|_\infty)$ y $(\ell_p,\|\cdot\|_p)$ admiten a $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ como base de Schauder.

Y todo esto pq $x=\sum_{n=1}^{\infty}x_n e_n \iff x=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}x_n e_n \iff \left\|x-\sum_{n=1}^{N}x_n e_n\right\|\longrightarrow 0$ si $N\to\infty$.

• Esto nos saca de un problema: si $f \in (\ell_p)^*$, $f: \ell_p \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x)$??? Ahora, si $x = \sum x_n e_n$,

$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n f(e_n)$, y a cada $f \in \ell_p^*$ le hemos asignado una sucesión: $(f(e_1), f(e_2), \dots)$.

¡ ℓ_p^* será un espacio de sucesiones !

Teorema: $(\ell_p, \|\cdot\|_p)^* \equiv (\ell_q, \|\cdot\|_q)$ es una isometría, $1 \leq p < \infty$, p, q exp. conj.

Proposición: $(c_0, \|\cdot\|_\infty)^* \equiv (\ell_1, \|\cdot\|_1)$ es una isometría.

Corolario: $(c, \|\cdot\|_\infty)^* \equiv (\ell_1, \|\cdot\|_1)$ es una isometría.

NOTA: $\ell_p^* = \ell_q$, $1 < p < \infty$, $\ell_1^* = \ell_\infty$, $c_0^* = c^* = \ell_1$, $\ell_\infty^* \overset{HB\ (\text{dim})}{\neq} \ell_1$.

COMPLETITUD

Teorema: Sean X, Y esp. norm. Y Banach $\Longrightarrow L(X,Y)$ Banach

Corolario: Todo espacio dual es de Banach.

Corolario: $(\ell_p, \|\cdot\|_p)$, $1 \leq p \leq \infty$, es un espacio de Banach.

Proposición: $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$ es un espacio de Banach.

Teorema: $(L_p, \|\cdot\|_p)$, $1 \leq p \leq \infty$, es un espacio de Banach (sin Dem).

COMPACIDAD

• En dim $< \infty$ la compacidad queda caracterizada

Teorema (HBL BW): Sea X un espacio de Banach de dim $< \infty$, y $K \subseteq X$. Son equivalentes:

1) K compacto
2) K cerrado y acotado
3) K secuencialmente compacto (ie, que toda sucesión en K contenga alguna subsucesión convergente).
4) K precompacto (ie, $\forall \varepsilon > 0\ \exists x_1, \dots, x_n : K \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \varepsilon)$).

<u>Definición</u>: $A \subseteq X$ se dice <u>relativamente compacto</u> si $\overline{A}$ es compacto.

<u>Lema</u> (Riesz, o sobre la existencia de elementos casi ortogonales): Sea X un espacio normado e $Y \subseteq X$ un subespacio cerrado propio. Si $0 < \varepsilon < 1$, entonces existe $x_\varepsilon \in S_X$ = esfera unidad (ie, $\|x_\varepsilon\| = 1$) tal que $d(x_\varepsilon, Y) > 1 - \varepsilon$.

<u>Corolario</u>: Sea X un espacio normado de dim ∞. Existe una sucesión de subespacios (Y_n) (que pueden tomarse finito-dimensionales), $Y_n \subseteq Y_{n+1}$; y una sucesión de vectores (y_n), con $y_n \in Y_n$ y $\|y_n\| = 1$ para cada $n \in \mathbb{N}$ tal que $d(y_{n+1}, Y_n) \geq \frac{1}{2}$.

<u>Teorema</u> (F. Riesz, 1918): Sea X un espacio normado. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1) X es de dim finita
2) Para cualquier subconjunto, compacto $\Longleftrightarrow$ cerrado y acotado ($\Rightarrow$ siempre!)
3) La bola unidad cerrada B_X es un compacto.

Scanned by CamScanner

II : GRANDES TEOREMAS DEL AF

TEOREMA HAHN - BANACH

Teorema : Con nuestra axiomática, los siguientes enunciados no pueden ser probados pero son equivalentes entre sí:

1) Axioma de Elección : De toda familia de conjuntos no vacíos $\{X_i\}_{i\in I}$ es posible elegir un elemento de cada conjunto, ie, $\prod_{i\in I} X_i \neq \emptyset$.

2) Lema de Zorn : Si $(X, \leq)$ es un conjunto parcialmente ordenado no vacío en el que toda cadena (conjunto totalmente ordenado) tiene una cota superior, entonces X tiene algún elemento maximal.

3) Principio del Buen Orden : Todo conjunto puede ser bien ordenado, ie, para cualquier conjunto X hay un orden $\leq$ en el que todo subconjunto no vacío tiene mínimo. A tal $\leq$ se le llama buen orden.

* Teorema (Hahn - Banach, 1920s, versión analítica) : Sea X un espacio vectorial real dotado de un funcional sublineal p. Sea $Y \leq X$ un subespacio vectorial y $f: Y \to \mathbb{R}$ una aplicación lineal sobre Y dominada por p, ie, $f(y) \leq p(y)$ $\forall y \in Y$. Entonces existe una extensión lineal $F: X \to \mathbb{R}$ de f en X (ie, $F_{|Y} = f$) dominada por p, ie, $F(x) \leq p(x)$ $\forall x \in X$.

- Como se ha visto en la dem, en general la extensión no es única.

Teorema (Hahn - Banach, versión espacios normados) : Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado y $Y \leq X$ un subespacio vectorial, y sea $f: Y \to \mathbb{R}$ un funcional lineal y continuo. Entonces existe un funcional lineal y continuo sobre X $F: X \to \mathbb{R}$ que extiende a f (ie, $F_{|Y} = f$) y posee la misma norma, $\|F\| = \|f\|$

Corolario I: Existen funcionales lineales y continuos no nulos en todo espacio de Banach, i.e., $X^* \neq 0$.

Corolario II: $\forall x_0 \neq 0 \ \exists f \in X^* : f(x_0) \neq 0$.

Corolario III: $\forall x_0 \in X \ \exists f \in X^* : \|f\| = 1$ y $f(x_0) = \|x_0\|$.

Corolario IV: $\|x\| = \sup_{\|f\| \leq 1} |f(x)|$, $x \in X$.

Corolario V: La inclusión $X \hookrightarrow X^{**}$, $x \longmapsto \hat{x}$ es una isometría, i.e., $\|x\| = \|\hat{x}\|$.

Corolario VI: X^* separa puntos: si $x_1 \neq x_2 \ \exists f \in X^* : f(x_1) \neq f(x_2)$.

Corolario VII: Sean X, Y espacios normados. Si $L(X,Y)$ es de Banach $\Rightarrow$ Y es de Banach

Teorema: $\quad Y$ Banach $\Longleftrightarrow$ $L(X,Y)$ Banach. (faltaba $\Leftarrow$).

HAHN – BANACH GEOMÉTRICO

Definición: Sea $A \subseteq X$.

i) Se dice que A es absorbente si $\forall x \in X \ \exists \sigma > 0 : x \in \sigma A$.

ii) Se dice que A es acotado si $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n} A = 0$.

iii) Se dice que A es convexo si $\forall x, y \in A$, $t \in [0,1]$, $tx + (1-t)y \in A$

iv) Se dice que A es equilibrado si $\forall \lambda, |\lambda| \leq 1$ cumple que $\lambda A \subseteq A$. (en part., $A = -A$)

v) Se dice que A es absolutamente convexo si es convexo y equilibrado, i.e., si $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $|\lambda| + |\mu| \leq 1$, y $\forall x, y \in A$, se tiene que $\lambda x + \mu y \in A$.

Lema: 1) A absorbente $\Rightarrow 0 \in A$
2) Sea A abierto. Entonces A absorbente $\Longleftrightarrow 0 \in A$.

Definición: Sea X un espacio vectorial y $A \subseteq X$ un subconjunto absorbente. Se llama funcional de Minkowski o gauge de A a $p_A : X \longrightarrow [0, \infty)$,

$$p_A(x) := \inf \{ \sigma > 0 : x \in \sigma A \}.$$

Que A sea absorbente garantiza que está definido en todo X.

Teorema: Sea p una seminorma sobre X. Entonces $B = \{x \in X : p(x) < 1\}$ es convexo, equilibrado y absorbente; y además cumple que $p = p_B$.

Teorema: Sea C un conjunto convexo, equilibrado y absorbente en X.

1) $p_C(x+y) \leq p_C(x) + p_C(y)$ (des triang)

2) $p_C(\lambda x) = \lambda p_C(x)$, $\lambda \geq 0$

3) p_C es una seminorma

4) $\underbrace{\{x : p_C < 1\}}_{A} \subseteq C \subseteq \underbrace{\{x : p_C \leq 1\}}_{A'}$, y $p_A = p_C = p_{A'}$.

5) Si C es abierto, $C = \{x \in X : p_C < 1\}$.

Corolario: Se tiene la correspondencia biunívoca

$$\{\text{seminormas en } X\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\text{conjuntos absolutamente} \\ \text{convexos y absorbentes}\end{array}\right\}$$

$$p \longmapsto \{x : p_C < 1\}$$

$$p_C \longleftarrow C$$

Teorema. Un espacio vectorial topológico es normable (i.e, admite una norma) $\Longleftrightarrow$ 0 tiene un entorno abierto convexo y acotado.

Corolario: Tenemos una correspondencia biunívoca:

$$\{\text{normas en } X\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\text{conjuntos absolutamente convexos,} \\ \text{absorbentes y acotados}\end{array}\right\}$$

$$\|\cdot\| \longmapsto B(0,1)$$

$$p_C \longleftarrow C$$

Scanned by CamScanner

• El resultado se puede relajar para funcionales sublineales. Esto será lo que veremos en el Teorema:

Proposición: Sea X un EV, y $A \subseteq X$ convexo, abierto y $0 \in A$. Entonces p_A es un funcional sublineal, y $A = \{x \in X : p_A < 1\}$.

*__Teorema__ (Hahn-Banach, versión geométrica 1): Sean $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado, y sean $A, B \subseteq X$ dos convexos disjuntos.

1) Si A es abierto, existe un funcional $f: X \to \mathbb{R}$ lineal y continuo que los separa en sentido amplio, ie,

$$\sup_{a \in A} f(a) \leq \inf_{b \in B} f(b).$$

2) Si A es cerrado, y B compacto, existe un funcional $f: X \to \mathbb{R}$ lin. y continuo que los separa en sentido estricto, ie,

$$\sup_{a \in A} f(a) < \inf_{b \in B} f(b).$$

Definición: Un hiperplano en un EV X es un SEV H de codimensión 1, ie, $\dim X/H = 1$.

Teorema: Existe una correspondencia biunívoca:

$$\{\text{hiperplanos de } X\} \longleftrightarrow \left\{\begin{array}{c}\text{funcionales lineales} \\ f: X \to \mathbb{R}\end{array}\right\} \text{ (mod. proporcionales)}$$

$$\operatorname{Ker} f \longleftarrow f$$

$$H \longmapsto f(x = h + \lambda x_0) = \lambda, \quad X = H \oplus \langle x_0 \rangle.$$

Además,

cerrados $\longleftrightarrow$ continuos

densos $\longleftrightarrow$ no continuos.

* **Teorema** (Hahn – Banach, versión geométrica 2) : Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado, y sean $A, B \subseteq X$ dos convexos disjuntos.

1) Si A es abierto, existe un hiperplano cerrado H que separa A y B en sentido amplio

2) Si A es cerrado y B es compacto, existe un hiperplano cerrado H que separa A y B en sentido estricto.

TEOREMA DE BAIRE Y B-S

Definición: Sea (X, τ) un ET, y sea $A \subseteq X$.

a) Se dice que A es denso en ningún sitio, raro ó diseminado si $\overset{\circ}{\overline{A}} = \emptyset$.

b) Se dice que A es de primera categoría si es unión numerable de conjuntos diseminados.

c) Se dice que A es de segunda categoría ó de Baire si no es de primera categor.

d) Se dice que A es residual si A^C es de primera categor.

Proposición: 1) Todo subconjunto de un diseminado es diseminado

2) " " " " 1^{a} cat " 1^{a} cat

3) La unión de conjuntos de 1^{a} cat es de 1^{a} cat.

Lema (Baire): Sea (X, d) un espacio métrico completo. La intersección de abtos densos es densa.

Teorema (de Baire de la Categoría): Todo espacio de Banach (con más generalidad, todo espacio métrico completo) es de 2^{a} categoría.

Definición: Un tonel es un conjunto T absolutamente convexo, absorbente y cerrado.

Definición: Un espacio se dice tonelado si todo tonel es entorno de cero.

Proposición: Todo espacio de Banach es tonelado.

Teorema (Principio de Acotación Uniforme): Sea (T_n) una sucesión de operadores entre espacios de Banach X, Y ie, $(T_n) \subset L(X,Y)$. Si (T_n) es puntualmente acotada (ie, si para cada $x \in X$ $\sup_n \|T_n(x)\| < \infty$), entonces (T_n) es acotada (ie, $\sup_n \|T_n\| < \infty$).

Teorema (Banach - Steinhaus): Sea (T_n) una sucesión de operadores entre espacios de Banach X, Y, ie, $(T_n) \subset L(X,Y)$. Si para todo $x \in X$ $\exists \lim_n T_n(x)$, entonces la aplicación $T(x) := \lim_n T_n(x)$ es lineal y continua.

TEOREMAS DE LA APL. ABIERTA Y GRAFO CERRADO

Lema: Sea X Banach e Y normado, y $T \in L(X,Y)$. Si $\exists \varepsilon$: $\varepsilon B_Y \subset \overline{T(B_X)}$, entonces $\frac{\varepsilon}{2} B_Y \subset T(B_X)$.

Teorema (de la Aplicación abierta): Todo operador (ie, lin y cont.) epiyectivo entre espacios de Banach es abierto.

Teorema (de los Isomorfismos de Banach): Todo operador biyectivo entre espacios de Banach es homeomorfismo.

Corolario: Sean $\|\cdot\|$ y $\|\cdot\|^*$ dos normas sobre X de modo que $(X, \|\cdot\|)$ y $(X, \|\cdot\|^*)$ sean espacios de Banach. Si son comparables (ie, $\exists M$: $\|\cdot\| \le M \|\cdot\|^*$) entonces son equivalentes.

Teorema (del Homomorfismo de Banach): Sean X, Y Banach y $T \in L(X,Y)$

$$T \text{ abta} \iff T(X) \text{ es cerrado en } Y.$$

Teorema (del grafo cerrado): Sean X, Y Banach y $T: X \to Y$ lineal

$$T \text{ continua} \iff Gr\, T \text{ es cerrada en } X \times Y.$$

III: TOPOLOGÍA DÉBIL

• (Topología inicial) : Sea $\{Y_i\}_{i\in I}$ una familia de espacios topológicos y X un conjunto, y pongamos que tenemos una familia de aplicaciones $\{\varphi_i : X \to Y_i\}_{i\in I}$. ¿Hay alguna top. sobre X : $\{\varphi_i\}$ sean cont.? Sí, la discreta. Vale, pero ser es muy grande, ¿cuál es la menos fina? Si G_i es abto de Y_i, deberían ser abtos

$$\Gamma = \{ \varphi_i^{-1}(G_i) \ , i\in I \}_{G_i \text{ abto de } Y_i}$$

Pero Γ no es una top, ni siquiera base; no es cerrado frente intersecciones finitas. Consideremos entonces

$$\overline{\Gamma} = \{ \bigcap_{\text{finitas}} \varphi_i^{-1}(G_i) \}_{G_i \text{ abto de } Y_i}$$

y se tiene que $\overline{\Gamma}$ es base de la top buscada, la menos fina que hace continuas a $\{\varphi_i\}$, que llamamos topología inicial, y denotamos como $T_{inicial}$.

Notar que dado $x\in X$, si V_i es entorno de $\varphi_i(x)$ $\forall i$, entonces $\{ \bigcap_{\text{finitas}} \varphi_i^{-1}(V_i) \}$ es una base de entornos de x.

Proposición: $(x_n) \xrightarrow{T_{inicial}} x \iff (\varphi_i(x_n)) \to \varphi_i(x) \quad \forall i\in I$.

Teorema (Propiedad Universal de la top inicial) : Sea Ω un ET, y $\chi : \Omega \to X$.

$$\chi : \Omega \to X \text{ continua} \iff \Omega \xrightarrow{\chi} X \xrightarrow{\varphi_i} Y_i \text{ continua } \forall i\in I .$$

Sobre las dos flechas está escrito $\varphi_i \circ \chi$.

• La top de subespacio es la top inicial def por la inclusión
• La top producto es la top inicial def por las proyecciones.

- Caso Finito : $\mathcal{B}_{\text{producto}} = \{ \prod_{i=1}^{n} G_i \}_{G_i \text{ abto de } X_i}$

- Caso Infinito : $\mathcal{B}_{\text{producto}} = \{ \prod_{i\in I} U_i \}_{\substack{U_i \text{ abto} \\ U_i = X_i \text{ salvo en un nº finito de índices}}}$.

• Esta última top es la menos fina que hace cont. a las proyecc. Pero sobre $\prod_{i\in I} X_i$ podríamos haber considerado la idea del caso finito, una top en la que una base de abtos sea $\mathcal{B} = \{ \prod_{i\in I} G_i \mid G_i$ abto de X_i. Esta topología se llama box topology o de cajas. Pero aquí el product de conexos ó compts no necesariamente lo es.

Definición: Sea X un espacio de Banach. Llamaremos topología débil sobre X a la topología inicial definida por los elements de X^*, y la denotaremos como $\sigma(X, X^*)$, $\omega(X)$ ó ω.

• Puesto que es una top inicial, por def se tiene que ω es la topología menos fina que hace continuos a los elts de X^*.

• Notar que X^* son contins en $(X, \tau_{\|\cdot\|})$, luego $\omega \leq \tau_{\|\cdot\|}$.

Proposición: Sea $x_0 \in X$. Una base de entornos débiles de x_0 está formada por conjunts de la forma

$$V = V_{x_1^*, \dots, x_n^*; \varepsilon} := \{ x \in X : |x_i^*(x - x_0)| < \varepsilon, \ i = 1 \dots n \},$$

variando $\varepsilon > 0$ y $x_1^*, \dots, x_n^* \in X^*$. En particular son abiertos débiles.

• La top débil es vectorial: la suma y el prod. por escalares es cont.

Proposición: Si $\dim X < \infty \implies \omega = \tau_{\|\cdot\|}$.

Proposición:

1) $(x_n) \xrightarrow{\omega} x$ débilmente $\iff (x^*(x_n)) \xrightarrow{\text{en } \mathbb{R}} x^*(x) \quad \forall x^* \in X^*$.

2) $(x_n) \xrightarrow{\|\cdot\|} x \implies (x_n) \xrightarrow{\omega} x$ débilmente.

• Uno ya pierde toda idea que cree tener sobre ω cuando lee

Proposición: Sea S la esfera unidad de X y $B[0,1]$ la bola unidad cerrada en X de dim ∞.

$$\overline{S}^{\omega} = B[0,1]. \quad !!!, \quad y \ B(0,1) \text{ no es déb. abta.}$$

• La top débil no es metrizable.

· Sin embargo algún parecido tienen:

Proposición: 1) $(X, \omega)^* = X^*$; 2) Si E es convexo, entonces $\overline{E} = \overline{E}^{\omega}$.

3) Los conjuntos cerrados y convexos (simultánea) coinciden en ambas topologías; i.o.w.: si C convexo, C cerrado $\Leftrightarrow$ C débilmente cerrado ($\Leftarrow$ siempre, sin C cvx)

Definición: Llamaremos topología débil-* en X^* a la topología inicial definida por los elementos de $X \subset X^{**}$ (su predual). La denotaremos $\sigma(X^*, X)$ ó ω^*.

• IMPORTANTE: No debe confundirse la top débil-* sobre X^* con la top débil $\sigma(X^*, X^{**})$, que es la top inicial def por los elementos de todo X^{**}.

Lema: Sea E un EV. Sean $f, g_1, \dots, g_n : E \to \mathbb{R}$ lineales (funcional).

$$\bigcap_{i=1}^{n} \ker g_i \subseteq \ker f \iff f \in \langle g_1, \dots, g_n \rangle \iff f \text{ acotada en } \bigcap_{i=1}^{n} \ker g_i$$

Proposición: Sea $x_0^* \in X^*$. Una base de entornos débiles-* de x_0^* está formada por conjuntos de la forma

$$V = V_{x_1, \dots, x_n; \varepsilon} := \{ x^* \in X^* : |(x^* - x_0^*)(x_i)| < \varepsilon, \ i = 1 \dots n \},$$

variando $\varepsilon > 0$ y $x_1, \dots x_n \in X$. En particular son abiertos débiles-*.

Proposición:

1) $(x_n^*) \xrightarrow{\omega^*} x^*$ débilmente-* $\iff$ $(x_n^*(x)) \to x^*(x) \quad \forall x \in X$

2) $(x_n^*) \xrightarrow{\|\cdot\|} x^*$ $\implies$ $(x_n^*) \xrightarrow{\omega^*} x^*$ débilmente-*.

Teorema (Banach-Alaoglu): B_{X^*} es ω^*-compacto.

Teorema: $(X, \omega)^* = X^*$

1) $(X^*, \sigma(X^*, X^{**}))^* = X^{**}$

2) $(X^*, \omega^*)^* = X$.

4) $(X^{**}, \omega^*)|_X = (X, \omega)$.

Corolario: $A \subseteq X^*$ w^*-cerrado y acotado (en norma) $\Longrightarrow$ A w^*-compacto.

IMPORTANTE: La topología débil sobre X es la restricción de la topología débil-* sobre X^{**} a X.

Teorema (Goldstine): La bola unidad de un espacio de Banach X es débilmente-* densa en la bola unidad de su bidual, i.e. B_X es $\sigma(X^{**}, X^*)$-densa en $B_{X^{**}}$:

$$\overline{B_X}^{\sigma(X^{**}, X^*)} = B_{X^{**}}.$$

~~**Teorema** (de separación de convexos en w^*): Sea X un espacio de Banach, $A \subseteq X^*$ un w^*-cerrado y convexo, y $x_0^* \notin A$. Entonces existe $x \in X$:~~

$$\cancel{\sup_{a^* \in A} a^*(x) < x_0^*(x).}$$

Nota: La top débil y débil-* no son metrizables, pero sí vienen dadas por seminormas: p.ej., en la w, al entorno de 0 $V_{x_1^*, \dots, x_n^*} = \{x \in X : |x_i^*(x)| \leq 1 \ \forall i\}$ le corresponde el funcional de Minkowski,

$$p_V(x) = \max_{i=1..n} |x_i^*(x)|,$$

que es además una seminorma. De ahí que HB funcione en w^* en el Th Goldstine.

Teorema (Dieudonné): Sea X un esp. de Banach y B_X su bola unidad (cerrada).

$$X \text{ es reflexivo} \iff B_X \text{ es } w\text{-compacta}.$$

Teorema (Compactificación Stone-Čech de $\mathbb{N}$): Existe un espacio topológico compacto $\beta\mathbb{N}$ y una inyección continua $j : \mathbb{N} \to \beta\mathbb{N}$ con imagen densa con la propiedad extra siguiente: Toda función (continua y) acotada sobre $\mathbb{N}$ puede extenderse a través de j a una función continua sobre $\beta\mathbb{N}$:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{N} \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, "f"'] & \beta\mathbb{N} \arrow[dl, dashed, "f^\beta"] \\ \mathbb{R} & \end{tikzcd} \qquad f^\beta \circ i = f, \quad \text{i.o.w.,} \quad f^\beta|_{\mathbb{N}} = f.$$

Dicha compactificación es única

Teorema: $\ell_\infty \equiv C(\beta\mathbb{N})$ es una isometría.

$$f \longmapsto f^\beta \quad (\text{función acotada sobre } \mathbb{N} \equiv \text{suc. acotada})$$

Proposición: Todo espacio de Banach separable es (isomorfo a) un subespacio de ℓ_∞, y lo mismo con el dual de un Banach separable.

REDES Y FILTROS

Definición: Un orden $\leq$ (i.e., una relación binaria reflexiva, antisimétrica y transitiva) en un conjunto $\mathcal{D}$ se dice filtrante si $\forall x,y \in \mathcal{D}\ \exists z \in \mathcal{D} : x \leq z,\ y \leq z$. A un conjunto ordenado con orden filtrante $\mathcal{D}$ se le llama conjunto dirigido.

Definición: Una red en un conjunto X es una aplicación $\mathcal{D} \to X$, con $\mathcal{D}$ un conj. dirigido. Si $d \mapsto x_d$, a la aplicación se le denota como la familia $(x_d)_{d\in\mathcal{D}}$.

Definición: Sea (X,τ) ET. Una red (x_d) se dice convergente a $x \in X$ si

$$\forall V \in \mathcal{V}(x)\ \exists D \in \mathcal{D} : d \geq D \Rightarrow x_d \in V.$$

- Las sucesiones caracterizan la continuidad en $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, pero no en ET en general. Sin embargo sí las redes:

Proposición: Sean X, Y ET y $T: X \to Y$. T es continua en $x \in X \Leftrightarrow \forall (x_d) \to x,\ (T(x_d)) \to T(x)$.

- Si $S_d = \{x_e : e \geq d\} \equiv$ sección final de una red, entonces $(x_d) \to x \equiv \forall V \in \mathcal{V}(x)\ \exists S_d \subset V$.
- Vamos a buscar un concepto de convergencia para colecciones de conjuntos que tengan las prop. de las secciones finales.

Definición: Sea X un conjunto. Un filtro $\mathcal{F}$ es una colección de subconjuntos de X (i.e. $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$) que cumple:

i) $\mathcal{F} \neq \emptyset$ y $\emptyset \notin \mathcal{F}$ (se podría haber quitado y llamar a estos propios)

ii) $F, F' \in \mathcal{F} \Rightarrow F \cap F' \in \mathcal{F}$

iii) $F \in \mathcal{F},\ F \subset F' \Rightarrow F' \in \mathcal{F}$.

~~Se dice que un filtro $\mathcal{F}$ es propio si $\mathcal{F} \neq \mathcal{P}(X)$; y~~ Se dice que un filtro $\mathcal{F}$ es libre si $\bigcap_{F\in\mathcal{F}} F = \emptyset$.

• Para cada $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{U}_n = \{A \subset \mathbb{N} : n \in A\}$ es un filtro, llamado filtro principal centrado en n.

• $\mathcal{F} = \{A \subset \mathbb{N} : A^c$ sea finito$\}$ es un filtro, llamado filtro de Frechet.

• En un ET, dado $x_0 \in X$, $\mathcal{V}(x_0)$ es un filtro, llamado filtro de entornos.

• Si (x_d) es una red, $\{S_d\}$ = secciones finales no forman un filtro (no cumple (iii)), pero los superconjuntos de éstos (i.e., $A \subset X : S_d \subset A$) sí. Tal filtro se llama filtro de secciones de la red.

Definición: Sea (X, τ) un ET. Un filtro $\mathcal{F}$ se dice convergente a $x \in X$ si $\mathcal{V}(x) \subseteq \mathcal{F}$, i.e., si $\mathcal{F}$ es más fino que el filtro de los entornos de x.

Definición: Sea (X, τ) un EVT, ~~~~, y $\mathcal{F}$ un filtro ~~~~. Se dice que $\mathcal{F}$ es un filtro de Cauchy si $\forall V \in \mathcal{V}(0)$ $\exists F \in \mathcal{F} : x, y \in F \Rightarrow x - y \in V$.

Una red (x_d) se dice de Cauchy si el filtro de secciones es de Cauchy. Si $D = \mathbb{N}$, se llama sucesión de Cauchy.

Definición (Completitud, EVT): Sea $M \subseteq X$ EVT. Se dice que M es completo si todo filtro de Cauchy en M es convergente a un punto de M (equivalentemente, si toda red de Cauchy en M es convergente en M).

Si $M = X$, se dice que el espacio X es completo.

Lema: Sea $f : X \to Y$ una aplicación, y $\mathcal{F}$ un filtro en X. Entonces $f_*\mathcal{F} := \{A \subseteq Y : f^{-1}(A) \in \mathcal{F}\}$ es un filtro en Y.

• ~~A partir de ahora nos centramos en $D = \mathbb{N}$.~~

Definición: Sea (x_d) una red en X, i.e., $f : D \to \overset{ET}{X}$, y $\mathcal{F}$ un filtro en D. Se dice que la red (x_d) converge a x según el filtro $\mathcal{F}$, que x es el $\mathcal{F}$-límite de (x_d), ó $x = \lim_{\mathcal{F}} (x_d)$, si el filtro $f_*\mathcal{F}$ converge en X.

Equivalentemente para $D = \mathbb{N}$: se dice que una sucesión (x_n) en un ET X converge a x según $\overset{\text{filtro en } \mathbb{N}}{\mathcal{F}}$, $x = \lim_{\mathcal{F}} x_n$, si

$$\forall V \in \mathcal{V}(x), \quad \{n \in \mathbb{N} : x_n \in V\} \in \mathcal{F}.$$

• El conjunto de filtros propios sobre un conjunto se ordena parcialmente por la inclusión. Dada una cadena de filtros, la unión es cota superior, y el lema de Zorn afirma que hay elementos maximales.

Definición: Llamaremos <u>ultrafiltros</u> a los filtros maximales. En otras palabras: $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro si y sólo si para otro filtro $\mathcal{F}$ cumple $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{F}$, entonces $\mathcal{U} = \mathcal{F}$ ó $\mathcal{F} = \mathcal{P}(X)$.

<u>Proposición</u> (Propiedad Básica de los Ultrafiltros): Sea $\mathcal{F}$ un filtro sobre un conjunto X.

$$\mathcal{F} \text{ es un ultrafiltro} \iff \forall A \subseteq X,\ A \in \mathcal{F} \text{ ó } A^c \in \mathcal{F}.$$

• Ya siempre $\mathcal{D} = \mathbb{N}$.

• Si el filtro es propio, el límite, si existe, es único. Pero una sucesión puede tener o no lím. según un filtro.

• Ej: Si $\mathcal{U}_m$ = filtro principal centrado en m, ent. $x = \lim_{\mathcal{U}_m} x_n = x_m$. Aquí siempre $\exists$. $\mathcal{U}_m$ es un ultrafiltro!!

• Si $\mathcal{F}$ es el filtro de Fréchet, $x = \lim_{\mathcal{F}} x_n \iff x_n \to x$ en el sentido usual. Aquí no siempre $\exists$.

• Luego el lím según un filtro puede o no existir. Pero con los ultrafiltros sí existe siempre:

<u>Teorema</u>: El límite según un ultrafiltro $\mathcal{U}$ de una sucesión (x_n) de un ET compacto K <u>siempre existe</u>.

• $F \subseteq X$, $F \in \mathcal{P}(X)$. $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$, $\mathcal{F} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$, $Ult(X) \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$.

• $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \equiv \{0,1\}^{\mathbb{N}}$; $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N})) \equiv \{0,1\}^{\mathcal{P}(\mathbb{N})}$

$A \longleftrightarrow I_A \equiv (I_A(1), I_A(2), \dots)$; $\mathcal{F} \longleftrightarrow I_{\mathcal{F}}$;

$I_A(m) = 1 \iff m \in A$; $I_{\mathcal{F}}(A) = 1 \iff A \in \mathcal{F}$.

de modo que se puede ver $Ult(\mathbb{N}) \subseteq \{0,1\}^{\mathcal{P}(\mathbb{N})}$, y se podría dotar a los ultrafiltros de la top. producto inducida

<u>Teorema</u>: $Ult(\mathbb{N}) \equiv \beta\mathbb{N}$, i.e., el esp. de los ultraf. es la compt. S-Č de $\mathbb{N}$.

<u>Teorema</u>: Sea $\{e_n\}$ la base de ℓ_1, y consideremos $\{e_n\} \subset \ell_1^{**} = \ell_\infty^*$, con la top. $\omega^* = \sigma(X^{**}, X^*) \equiv \sigma(\ell_\infty^*, \ell_\infty)$

$$Ult(\mathbb{N}) \equiv \beta\mathbb{N} \equiv \overline{\{e_n\}}^{\omega^*} \subseteq \ell_\infty^*$$

$$\mathcal{U} \longrightarrow \lim_{\mathcal{U}}$$

$$\{A \subset \mathbb{N} : f(I_A) = 1\} \longleftarrow f$$

<u>Proposición</u>: $f \in l_\infty^*$ es un ultrafiltro $\Longleftrightarrow$ $f(I_A) = 1$ ó 0 , I_A = func. char. de $A \subset \mathbb{N}$.

- <u>Consecuencias del Principio de Acotación Uniforme</u>:

<u>Corolario</u>: En un espacio de Banach, $A \subseteq X$ acotado $\Longleftrightarrow$ A débilmente acotado.

<u>Corolario</u>: $T: (X, \|\cdot\|) \longrightarrow (Y, \|\cdot\|)$ cont $\Leftrightarrow$ $T: (X, w) \longrightarrow (Y, w)$ continua.

- X espacio de Banach de dim ∞, B_X bola cerrada (para la norma) y $\mathbb{B}_X$ bola abierta (para la norma).

τ | ω | ω^*

CONOCIDO

$\mathbb{B}_X$

<u>no</u> es ω-abierta → no ω^*-abierta

pq $\overline{S}^{\omega} = B_X$, y luego compl.

pq $(X^{**}, \omega^*)|_X = (X, \omega)$

B_X

ω-cerrada pq $B_X = \bigcap_{x^* \in B_{X^*}} \underbrace{\{x \in X : |x^*(x)| \leq 1\}}_{\text{def. cerrado}}$

$\begin{cases} \omega\text{-compacta si } X = X^{**} \\ \underline{\text{no}} \quad \text{''} \quad \neq \end{cases}$ Dieudonné →

la compacidad es una prop. intrínseca

$X = X^{**}$: ω^*-compacta luego ω^*-cerrada

$X \neq X^{**}$: no ω^*-cerrado

} en X^{**}

B_X ω^*-cerr. $\Rightarrow B_X = \overline{B_X}^{\omega^*} = B_{X^{**}} \Rightarrow X = X^{**}$.

$\mathbb{B}_{X^*}$

no ω-abierta (por la norma menor) → no ω^*-abierta (pq ω^* es menos fina que ω)

B_{X^*}

ω^*-compacta, luego ω^*-cerrada

Th B.A.

$\mathbb{B}_{X^{**}}$

$B_{X^{**}}$

NOTAS :

1. X siempre es $\|\cdot\|$-cerrado en X^{**} (en concreto: si $X \xhookrightarrow{J} X^{**}$, $J(X)$ es $\|\cdot\|$-cerrado).
En efecto, dado $\xi \in \overline{J(X)}$, $\exists\, (x_n) \subset J(X) \longrightarrow \xi$. Pero como $J(X)$ es isométrico a X, como (x_n) es convergente debe ser de Cauchy, y por tanto convergente (en $J(X)$!), luego $\xi = J(x)$ para cierto x.

2. X es w^*-denso en X^{**}, y B_X es w^*-denso en $B_{X^{**}}$.

3. $X = X^{**}$: X es w^*-cerrado en X^{**}
$X \neq X^{**}$: X no es w^*-cerrado en X^{**}
$X = \overline{X}^{w^*} = X^{**} \Leftrightarrow X$ es w^*-cerrado.

~~4. B_X no es w-abierto en X^{**} $\sigma(X^{**}, X^{***})$, y B_X no es w-abierto en $\sigma(X, X^*)$ y ahora X $\sigma(X^{**}, X^{***})$ es más fina (tiene más abtos) que $\sigma(X, X^*)$.~~

4. Todo abierto en la top w ó w^* debe ser no acotado en norma. (si $\dim X = \infty$).

Sup s.p.g. que A es un abto débil de X. Entonces contiene a un entorno de cero (~~sup~~ supongo s.p.g que $0 \in A$), $V_{x_1^*,\dots,x_n^*;\varepsilon} = \{x : |x_i^*(x)| < \varepsilon \ \forall i = 1\dots n\} \subset A$. Pero como X es de dim ∞, sabemos que $\exists\, 0 \neq x \in X : x_i^*(x) = 0\ \forall i$, luego notar que $\forall t \in \mathbb{R}$, $tx \in V \subset A$, luego A contiene un SEV, ie, A no es acotado en norma.

5. Por 1., X no es $\|\cdot\|$-abto en X^{**}, luego tampoco lo será en w ó w^*, que tienen menos abtos.