I : SUPERFICIES COMPACTAS

VARIEDADES TOPOLÓGICAS

Definición: Una variedad topológica de dimensión n es un espacio topológico (que en general supondremos Hausdorff y 2º contable) en el que todo punto posee un entorno que es homeomorfo a un abierto del $\mathbb{R}^n$.

Lema: $B_n(p,r) \simeq \mathbb{R}^n$.

Definición (Alternativa): Una VT ...... homeomorfo a una bola del $\mathbb{R}^n$.

Definición (Alternativa): Una VT .... homeomorfo al $\mathbb{R}^n$.

Lema. El producto directo de VT de dim. n y m es una VT de dim $n+m$.

El objetivo de este capítulo será la de clasificar las superficies ($:=$ VT de dim 2) compactas. ¿Qué pasa para las de dim 1? Intuitivamente es sencillo, pero no lo probaremos:

Teorema (de Clasificación de VT de dim 1): Toda variedad topológica de dim 1 conexa es homeomorfa bien a la recta real bien a la circunferencia.

ET'S COCIENTES

Si $\sim$ es una rel de eq. sobre un ET X, tenemos $\pi : X \to X/\sim$, y sobre $X/\sim$ tal π define la

$$T_{cociente} := \{ U \subseteq X/\sim \; : \; \pi^{-1}(U) \text{ sea abto de } X \}.$$

Teorema (Propiedad Universal de la Top. Cociente): Sea $\varphi : X \to Y$ una apl. cont. entre ET, y $\sim$ una rel de eq. sobre X.

$$[x_1 \sim x_2 \Rightarrow \varphi(x_1) = \varphi(x_2)] \iff \exists\, \overline{\varphi} : X/\sim \to Y \text{ cont} : \varphi = \overline{\varphi} \circ \pi$$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\pi"'] & Y \\ X/\sim \arrow[ur, dotted, "\exists \overline{\varphi}"'] & \end{tikzcd}$$

(i.e., φ factoriza por la π).

Corolario: $\bar{\varphi}: X/\sim \longrightarrow Y$ cont. (U abt) $\iff$ $X \xrightarrow{\pi} X/\sim \xrightarrow{\bar{\varphi}} Y$ cont. ($\pi^{-1}(U)$), $\bar{\varphi}\circ\pi$

Proposición: $\varphi: \underset{\text{compacto}}{X} \longrightarrow \underset{\text{Hausdorff}}{Y}$ continua y biyectiva $\Rightarrow$ φ homeomorfismo.

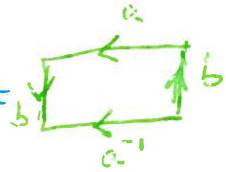
• (**Banda de Möbius**): Es la superficie cociente $X =$  . Sólo tiene 1 borde y 1 cara, y no es **orientable**. ¿Qué se entiende por "orientable" aquí que no estamos en una VDif? Intuitivamente consiste en que si un reloj recorre cualquier curva cerrada en la VT, a la vuelta el sentido de giro sigue siendo el mismo. O también: un señor que camina con un perrito a un lado. Al recorrer cualquier curva, ¿el perro está al mismo lado del señor?

SUPERFICIE ASOCIADA A UN SÍMBOLO

Definición: Consideremos un polígono regular de un número par de lados. Designemos a cada par de aristas con una letra; y en cada arista un sentido de recorrido (orientación), denotado por un exponente $+1$ en la letra si es antihorario, y -1 si es horario.

Un **símbolo** es una sucesión de letras de un polígono con los exponentes como antes.

• Podemos identificar las aristas con mismo nombre, teniendo en cuenta el recorrido. El cociente polígono$/\sim$ es una **superficie compacta** (VT de dim 2 compacta).

• (**Botella de Klein**): Es la superficie compacta dada por el símbolo $aba^{-1}b$: $X =$ 

Proposición: El espacio proyectivo $\mathbb{P}_n$ es una variedad topológica de dim n, compacta y Hausdorff. En particular es homeomorfo al cociente de la esfera que identifica puntos antipodales.

TRIANGULACIÓN DE UN ESPACIO

Definición: Se llama **envolvente convexa** de $A \subseteq \mathbb{R}^n$ al menor convexo que contiene a A.

• 1 pto: el pto; 2 ptos: la recta; 3 ptos: el triángulo (relleno) de vértices los ptos, ...

Definición: Un **símplice geométrico n-dimensional** es la envolvente convexa de $n+1$ puntos $p_0, \dots, p_n$ en posición general (i.e., que no están contenidos en una variedad lineal de dim $< n$).

Definición: Un complejo simplicial es un conjunto K junto con una familia S de subconjuntos finitos de K, llamados símplices abstractos, de modo que:

i) Cada subconjunto de K formado por un solo elemento es un símplice abstracto, llamado vértice.

ii) Todo subconjunto no vacío de un símplice abstracto es un símplice abstracto.

La dimensión de un complejo simplicial es el supremo de las dimensiones de sus símplices.

Quiero definir la realización geométrica de un complejo simplicial, la "reconstrucción" del espacio a partir de "trozos":

1. Si K es finito, $K=\{v_1,\dots,v_n\}$, sea $E:=\bigoplus_{i=1}^{n}\mathbb{R}v_i$ (combinaciones lineales formales), dotado de la top que induce cualquier norma sobre E (al ser de dim $<\infty$ son equivalentes). Para cada $s\in S$, sea $|s|:=$ envolvente convexa de los elementos de s dentro de E, que es un símplice geométrico en E. Entonces

Definición: Se llama realización geométrica del complejo simplicial (K,S) a

$$|K|:=\bigcup_{s\in S}|s| \subset E.$$

2. Si K es infinito, sea $E:=\bigoplus_{v_i\in K}\mathbb{R}v_i$. Como no es dim $<\infty$, no hay una top privilegiada. Definimos $|s|\subseteq\underbrace{\mathbb{R}v_0\oplus\dots\oplus\mathbb{R}v_q}_{\dim<\infty}\subseteq E$, así $|K|$ igual que antes, pero ¿qué top ponemos? Si $s=\{v_0,\dots,v_q\}$, $|s|\subseteq\dots$ Basta tomar para $|K|$ la top final definida por las inclusiones $|s|\hookrightarrow|K|$, que cada $|s|$ tiene una top sensata, la de siempre. También se llama topología coherente.

Definición: Una triangulación de un ET X es un homeomorfismo $X\xrightarrow{\sim}|K|$ con la realización geométrica de algún complejo simplicial (K,S).

Se dice que un ET es triangulable si admite alguna triangulación.

Teorema (Radó, 1925): Toda superficie es triangulable.

Teorema (Moise, 1952): Toda vt de dim 3 es triangulable.

Para dim >3, en general no son triangulables, pero...

Teorema: Toda variedad diferenciable (de cualquier dimensión) es triangulable.

POLÍGONO ASOCIADO A UNA SUPERFICIE COMPACTA

• El Th de Radó, en particular dice que si X es una sup., $X = \bigcup T_i$, $T_i \simeq$ triángulo del plano.

Proposición: Una triangulación de una superficie compacta tiene un número finito de triángulos.

Teorema: Toda superficie compacta se obtiene identificando pares de lados en un polígono plano (necesita un número par de aristas). Es decir, toda superficie compacta se puede construir a partir de un símbolo.

• Total: que el problema de clasificar superficies compactas se puede reducir a estudiar en símbolos.
• Total: $\boxed{\text{dar un símbolo} \equiv \text{dar una sup. compacta.}}$

SUMA CONEXA DE SUPERFICIES

Definición: Sean A, B dos superficies compactas, y elijamos dos discos cerrados $\overline{D_1} \subset A$, $\overline{D_2} \subset B$, y sean $D_1 = \overset{\circ}{\overline{D_1}}$, $D_2 = \overset{\circ}{\overline{D_2}}$. Se llama suma conexa de las dos superficies a

$$A \# B := \frac{(A - D_1) \amalg (B - D_2)}{\partial D_1 = \partial D_2},$$

i.e., a la superficie que se obtiene pegando $A - D_1$ y $B - D_2$ a lo largo de los bordes de los discos.

• La def no depende de la elección de los discos, ni del homeomorfismo entre los bordes...

• Si $S = \{$clases de homeomorfía de sup. compactas$\}$, $\#$ dota a S de estructura de semigrupo conmutativo (no es grupo porque no hay opuesto). El neutro es... la esfera! $X \# S_2 = X$.

Proposición: Sea X una sup. de símbolo $a_1 \dots a_r$, y Y una sup. de símbolo $b_1 \dots b_s$. Entonces la superficie $X \# Y$ tiene símbolo $a_1 \dots a_r b_1 \dots b_s$.

Definición: Dos símbolos se dicen equivalentes si definen superficies homeomorfas.

Teorema (Reglas de transformación de símbolos):

Regla 0: El símbolo se mantiene al renombrar las letras del símbolo (regla: obvia)

Regla 1: El símbolo se mantiene por permutación cíclica: $a_1 a_2 \dots a_r \equiv a_2 \dots a_r a_1$

Regla 2: El símbolo se mantiene al cambiar los exponentes de un par: $\dots x \dots x \dots \equiv \dots x^{-1} \dots x^{-1} \dots$

Regla 3: El par $\dots x x^{-1} \dots$ es simplificable (si hay más de un par de letras).

Regla 4: El símbolo se mantiene al permutar cíclicamente letras comprendidas entre un par de primera especie: $AxBCx^{-1}D \equiv AxCBx^{-1}D$ $\left(\overset{1}{\equiv} DxBCx^{-1}A\right)$.

Regla 5: Agrupación de pares de segunda especie: el símbolo se mantiene al sacar con exp. negativo lo que hay entre un par de segunda especie: $AxBxC \equiv AxxB^{-1}C \equiv AB^{-1}xxC$.

Definición: Sea un símbolo.

a) Un par de primera especie es un par de la forma $\dots x \dots x^{-1} \dots$ ó $\dots x^{-1} \dots x \dots$

b) Un par de segunda especie es un par de la forma $\dots x \dots x \dots$ ó $\dots x^{-1} \dots x^{-1} \dots$

CLASIFICACIÓN DE SUPERFICIES

Lema: La suma conexa de un plano proyectivo y un toro es homeomorfa a la suma conexa de 3 planos proyectivos, ie,

$$\dots xxaba^{-1}b^{-1} \dots \equiv xxaabb$$

Teorema (de Clasificación, 1ª versión): Toda superficie compacta es homeomorfa a una de las siguientes:

1) Una esfera, de símbolo aa^{-1}

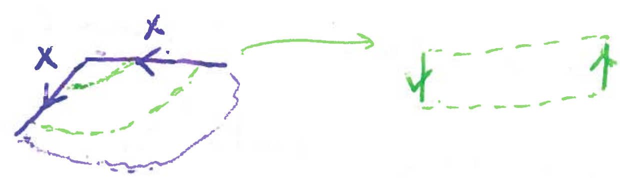
2) Una suma conexa de toros, de símbolo $aba^{-1}b^{-1} \dots xyx^{-1}y^{-1}$

3) Una suma conexa de planos proyectivos, de símbolo $aa \dots xx$.

¡El Th aún no está completo! Falta ver que los 3 no son homeomorfos entre sí.

Corolario: Si el símbolo tiene algún par de 2ª especie, es suma conexa de $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}$; si no, es suma conexa de toros ó una esfera.

Definición: Una superficie se dice no orientable si posee un abierto homeomorfo a la banda de Möbius. En caso contrario se dice que es orientable.



1) y 2) son orientables, 3) es no orientable.

Definición. Una superficie compacta se dice de género g si es suma conexa de g toros.

Pegar un "asa" a una superficie equivale a hacer suma conexa con un toro.

Hacer un "cross-cap" (ie, abrir un agujero en una sup (retirar un disco abierto) e identificar dos puntos de la circunferencia borde de forma antipodal) equivale a hacer suma conexa con un plano proyectivo.

Teorema (de Clasificación, 2ª versión): Toda superficie compacta es homeomorfa a una de las siguientes:

1) Si es orientable, una esfera con $g \geq 0$ asas.

2) Si no es orientable, una esfera con $p > 0$ cross-cap.

Teorema (de Clasificación, 3ª versión): Toda superficie compacta es homeomorfa a una esfera con $g \geq 0$ asas y $p = 0, 1, 2$ cross-caps.

CARACTERÍSTICA DE EULER-POINCARÉ

Definición: Sea X un ET triangulado con un número finito de símplices (luego compacto). Sea c_i el número de símplices de dim i (c_0 = nº vértices; c_1 = nº aristas, c_2 = nº caras, ...). Se llama característica de Euler-Poincaré a la suma alternada

$$\chi(X) := c_0 - c_1 + c_2 \cdots + (-1)^n c_n .$$

· La característica es un invariante topológico, no depende de la triangulación del espacio.

· Vamos a generalizar la noción de triangulación:

Definición. Un complejo celular finito (ó CW complejo finito) es un ET Hausdorff y compacto junto con una sucesión finita de cerrados

$$X_0 \subseteq X_1 \subseteq \cdots \subseteq X_n = X,$$

llamada descomposición celular, que verifica las siguientes propiedades:

i) X_0 es un número finito de puntos, llamados vértices ó células de dim 0.

ii) $X_i - X_{i-1} = \coprod_{\text{finita}} Z_{i\alpha}$, donde para cada $Z_{i\alpha}$ hay un homeomorfismo $\varphi_{i\alpha} : B_i \xrightarrow{\sim} Z_{i\alpha}$
(B_i = bola abierta de dim i, del $\mathbb{R}^i$). A cada $Z_{i\alpha}$ se le llama célula de dimensión i

iii) Para cada índice $i\alpha$ el homeomorfismo $\varphi_{i\alpha}$ extiende a una aplicación continua $\varphi_{i\alpha} : \overline{B_i} \to \overline{Z_{i\alpha}}$

Definición. Si c_i := nº de células de dim i en un CW complejo finito, llamaremos característica de Euler-Poincaré a

$$\chi(X) = c_0 - c_1 + c_2 - \cdots + (-1)^n c_n .$$

La dimensión del complejo es el mayor n : $c_n \neq 0$.

Nota: Todo espacio triangulado compacto (i.e, con un nº finito de símplices) es un CW complejo finito. Las células de dim i son los símplices de $i+1$ puntos.

- $\chi(S_2)=2$

Teorema (Euler): Para cualquier poliedro convexo del $\mathbb{R}^3$ se cumple

$$\boxed{n^{\circ}\text{ de vértices} - n^{\circ}\text{ de aristas} + n^{\circ}\text{ de caras} = 2}$$

Proposición: Sea X una superficie compacta definida por un símbolo de r pares de letras, y sea c_0 el número de vértices (que dependerá del símbolo y las identificaciones). Entonces

$$\boxed{\chi(X) = c_0 - r + 1}$$

Teorema: La característica de Euler-Poincaré de una superficie compacta X vale

$$\chi(X) = \begin{cases} 2-2g, & \text{si } X \text{ es una superficie orientable de género } g \quad (g=0 \equiv \text{esfera}) \\ 2-p, & \text{si } X \text{ es una suma conexa de } p \text{ planos proyectivos.} \end{cases}$$

De aquí se determina el tipo de superficie:

Teorema (de Clasificación, 4ª versión): Dos superficies compactas son homeomorfas si y sólo si tienen la misma característica de Euler-Poincaré y la misma orientabilidad.

Botella de Klein: $aba^{-1}b \equiv aabb$ = suma conexa de dos planos proyectivos.

El complementario de un disco fijo en $\mathbb{P}_2$ es una banda de Möbius

Definición: Un grafo finito es un complejo celular finito de dimensión 1.

Proposición: Sea X un grafo finito de v vértices y a aristas, y sea c el nº de componentes conexas de $\mathbb{R}^2 - X$. Entonces

$$\boxed{v - a + c = 2}$$ FÓRMULA DE EULER.

Para probar este "inofensivo" teorema hace falta:

Teorema (de la curva de Jordan): Sea C un cerrado de $\mathbb{R}^2$ homeomorfo a S_1 (i.e, una curva que no se autocorta). Entonces $\mathbb{R}^2 - C = U_1 \amalg U_2$ tiene exactamente 2 componentes conexas, y además, $\partial U_i = C$, $i=1,2$.

Teorema (Schönflies): El homeomorfismo $\varphi: S_1 \xrightarrow{\sim} C \subseteq \mathbb{R}^2$ extiende a un homeomorfismo $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, por lo que la componente conexa acotada de $\mathbb{R}^2 - C$ es homeomorfa a la bola abierta.

$$\chi(S_n) = \begin{cases} 2, & n \text{ par} \\ 0, & n \text{ impar} \end{cases} \; ; \; \chi(P_n) = \begin{cases} 1, & n \text{ par} \\ 0, & n \text{ impar} \end{cases} \; , \; \chi(\underset{\text{bola cerrada}}{B_n}) = 1.$$

Proposición: $\boxed{\chi(X \times Y) = \chi(X) \cdot \chi(Y)}$

Definición: Sea X un CW complejo finito. Un cerrado $A \subseteq X$ se dice subcomplejo si para cada célula Z_{ik} se cumple que $A \cap Z_{ik} = Z_{ik}$ ó $\emptyset$. En particular A también es complejo celular.

Proposición: Sea X un complejo celular finito, y A, B dos subcomplejos. Entonces $A \cup B$, $A \cap B$ también lo son y se cumple

$$\boxed{\chi(A \cup B) = \chi(A) + \chi(B) - \chi(A \cap B)}$$

Proposición: Sean X, Y dos superficies compactas.

$$\boxed{\chi(X \# Y) = \chi(X) + \chi(Y) - 2}$$

Teorema (F. Klein): Sea X una sup. orientable de género g. Entonces g es el mayor número de curvas $\simeq S_1$ disjuntas que se pueden quitar a X sin que desconecte.

II : HOMOTOPÍA

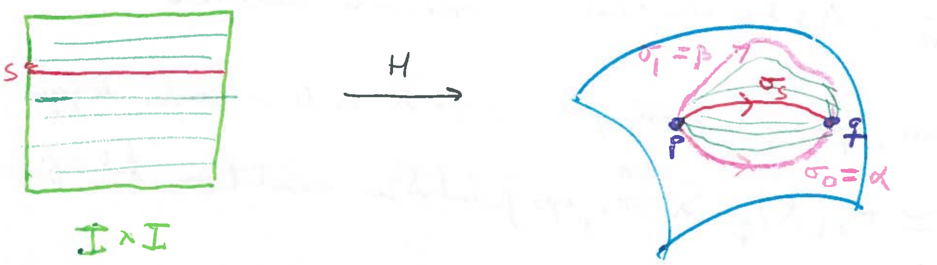
Definición: Un *arco* en un ET X es una aplicación continua $\sigma : I = [0,1] \longrightarrow X$. A $\sigma(0)$ se le llama *extremo inicial* y a $\sigma(1)$ *extremo final*.

Definición: Dos arcos $\alpha, \beta : I \longrightarrow X$ con los mismos extremos iniciales p y finales q se dicen *homótopos* si existe una aplicación continua $H : I \times I \longrightarrow X$, llamada *homotopía*, tal que

$$H(t,0) = \alpha(t) \quad , \quad H(t,1) = \beta(t) \quad , \quad t \in I$$

$$H(0,s) = p \quad , \quad H(1,s) = q \quad , \quad s \in I .$$

- Si llamamos $\sigma_s := H(\cdot, s)$, que es un arco, que α y β sean homótopos significa que se puede deformar (pasar) del uno en el otro de modo continuo, a través de la familia de arcos $\{\sigma_s\}_{s \in I}$.



$$\sigma_0 = \alpha = H(\cdot,0)$$
$$\sigma_1 = \beta = H(\cdot,1)$$
$$H(t,s) = \sigma_s(t) .$$

Proposición: En el $\mathbb{R}^n$, todo par de arcos son homótopos (más aún, también en un convexo del $\mathbb{R}^n$).

- En $\mathbb{R}^2 - 0$ no pasa eso, ya lo veremos en detalle.

- La homotopía es una *relación de equivalencia*

Definición: Un *lazo* es un arco de mismo extremo final e inicial.

Definición: Sean σ, σ' dos lazos en $p \in X$. Se llama *composición de σ y σ'* al lazo

$$(\sigma \cdot \sigma')(t) := \begin{cases} \sigma(2t) & , \; t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \sigma(2t-1) & , \; t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

(primero recorrer σ y luego σ', al doble de velocidad)

Uno podría pensar que esto es un grupo. ¡No! ¡Falta de asociatividad!! Para tener un grupo hay que hacer cociente!

Proposición: La composición de lazos es compatible con la homotopía, i.e.,

$$\alpha \overset{H}{\equiv} \alpha' \ , \ \beta \overset{\bar{H}}{\equiv} \beta' \longrightarrow \alpha\beta \overset{H\bar{H}}{\equiv} \alpha'\beta'.$$

Definición: El conjunto de lazos de X en $p \in X$, módulo la relación de homotopía, es el llamado grupo fundamental ó primer grupo de homotopía de X en p:

$$\pi_1(X)_p := \frac{\{\text{lazos de } X \text{ en } p\}}{\equiv} \qquad (\text{Poincaré, } 1892).$$

La prop. de antes afirma que la operación $[\sigma]\cdot[\sigma'] := [\sigma\cdot\sigma']$ está bien def.

Teorema: $(\pi_1(X)_p \, , \, \cdot)$ es un grupo (en general no abeliano).

Definición: Un ET X se dice arco-conexo si para todo par de puntos $p, q \in X$ existe un arco que los une.

Arco-conexo $\Rightarrow$ conexo ; y si X es loc. arco-conexo, arcoconexo $\Leftrightarrow$ conexo.

Proposición: Si X es arco-conexo, para cada par de puntos $p, q \in X$ existe un isomorfismo de grupos (en general no canónico) $\pi_1(X)_p \simeq \pi_1(X)_q$. Si los grupos fundamentales son conmutativos, tal morfismo sí es canónico.

Proposición: Sea $f: X \to Y$ continua. Si $\sigma_0 \equiv \sigma_1$ arcos homotópicos en X de extremos p y $q \in X$, entonces $f\circ\sigma_0 \equiv f\circ\sigma_1$ son dos arcos homotópicos de extremos $f(p)$ y $f(q)$: "La homotopía de arcos se conserva por aplicaciones continuas"

Definición: La prop. anterior dice que toda aplicación continua f induce un morfismo entre los grupos fundamentales:

$$\begin{aligned} \pi_1(X)_p &\xrightarrow{f_*} \pi_1(X)_{f(p)} \\ [\sigma] &\longmapsto [f\circ\sigma]. \end{aligned}$$

Como además, se cumple que $(f\circ\sigma)\cdot(f\circ\sigma') = f\circ(\sigma\cdot\sigma')$, f_* es un morfismo de grupos

Proposición (Propiedades)

1) Si $Id : X \to X$, entonces $Id_* : \pi_1(X)_p \to \pi_1(X)_p$ es el morfismo de grupos identidad.

2) Tal morfismo inducido es compatible con la composición, i.e., si $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$, entonces

$(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$.

HOMOTOPÍA DE APLICACIONES

Definición: Se dice que dos aplicaciones continuas $f_0, f_1 : X \to Y$ son homótopas si existe una aplicación continua $H : X \times I \to Y$, llamada homotopía, tal que

$$H(\cdot, 0) = f_0 \quad , \quad H(\cdot, 1) = f_1 .$$

Es la misma idea que de homotopía de caminos: que haya aplicaciones intermedias $H(\cdot, s)$ que deforman f_0 en f_1.

En este caso también ocurre que la homotopía de aplicaciones es una rel. de eq., y es compatible con la composición: si $X \xrightarrow{f_0, f_1} Y \xrightarrow{g_0, g_1} Z$, y $f_0 \simeq f_1$, $g_0 \simeq g_1$, entonces $g_0 f_0 \simeq g_1 f_1$.

Definición: Sea $A \subseteq X$, y sean $f_0, f_1 : X \to Y$: $f_0|_A = f_1|_A = h : A \to Y$. Se dice que f_0, f_1 son homótopas relativamente a A si existe una aplicación continua $H : X \times I \to Y$ (homotopía)

$$H(\cdot, 0) = f_0 \quad , \quad H(\cdot, 1) = f_1 ,$$

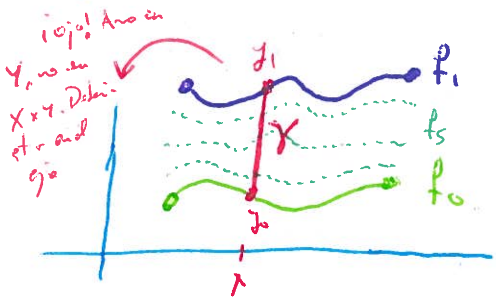
$$H(a, s) = h(a) \quad \forall a \in A, \forall s \in I .$$

Esta última condición añade que las aplicaciones intermedias para pasar de f_0 a f_1 (que coinciden con h en A) también tienen que coincidir con h en A!

La homotopía de lazos es un caso particular de la hom. relativa, con $X = I$ y $A = \{0, 1\}$.

¡ $f_0 \simeq f_1$!

Teorema: Sean $f_0, f_1 : X \to Y$ dos aplicaciones homótopas de homotopía H. Fijemos $x \in X$, y sea $y_0 = f_0(x)$, $y_1 = f_1(x) \in Y$. Si tomamos el arco en Y



$$\gamma : I \to Y, \quad \gamma(s) = H(x,s)$$

(que es un arco de y_0 a y_1), entonces se cumple el siguiente triángulo conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
 & \pi_1(Y)_{y_0} \arrow[d, "\wr\,\gamma"] \\
\pi_1(X)_x \arrow[ur, "f_{0,*}"] \arrow[r, "f_{1,*}"'] & \pi(Y)_{y_1}
\end{tikzcd}$$

Todo lazo entre 2 ptos induce un isomorfismo entre sus grupos fundamentales.

Definición: Una aplicación continua $f : X \to Y$ se dice que es una equivalencia homotópica si existe una aplicación continua $g : Y \to X$ tal que

$$g \circ f \simeq Id_X \quad , \quad f \circ g \simeq Id_Y .$$

En tal caso se dice que X e Y son espacios homótopos (o homotópicamente equivalentes)

· Es una condición más débil que la de homeomorfismo. No $g \circ f = Id$, sino $\simeq Id$.

Teorema: Espacios homótopos tienen grupos fundamentales isomorfos.

Con precisión: Toda equivalencia homotópica $f : X \to Y$ induce un isomorfismo

$f_* : \pi_1(X)_x \longrightarrow \pi_1(Y)_{f(x)} \quad \forall x \in X$.

Definición: Un espacio topológico se dice contráctil si es "homótopo" " " al espacio formado por un solo punto. (i.e., si es "homótopo al punto")

NOTA: Hablaremos de "el grupo fundamental de un grupo ...." ó "$\pi_1(X) = \ldots$" sin referirnos al punto cuando ocurra $\forall x \in X$.

Corolario: X contráctil $\Longrightarrow \pi_1(X) = 0 \quad$ (i.e. $\pi_1(X)_p = 0 \quad \forall p \in X$).

Definición: Un ET X se dice *estrellado* si $\exists\, x_0 \in X$: $[x, x_0] \subset X$ $\quad \forall x \in X$.

Proposición: Todo subespacio estrellado del $\mathbb{R}^n$ es contráctil.

Corolario: $\pi_1(\mathbb{R}^n) = 0$, y $\pi_1(\text{convexo de } \mathbb{R}^n) = 0$.

Definición: Un ET se dice *simplemente conexo* si es arco-conexo y su grupo fundamental es nulo.

- $\mathbb{R}^n$ ó cualquier estrellado de $\mathbb{R}^n$ es simplemente conexo.

Definición: Sea $A \subseteq X$ un subespacio. Se llama *retracto* a toda aplicación continua $r : X \to A$: $r_{|A} = Id_A$.

ie, tal que $r \circ i = Id_A$, donde i es la inclusión.

Definición: Se dice que $A \subseteq X$ es un *retracto por deformación* de X si existe un retracto $r : X \to A$ tal que $i \circ r \equiv Id_X$ *relativamente (rel) a A*, ie, si existe una aplicación continua (homotopía) $H : X \times I \to X$ tal que

$$H(\cdot, 0) = Id_X, \qquad H(\cdot, 1) = r,$$

$$H(a, s) = Id_X(a) = a \quad \forall a \in A,\ s \in I.$$

De la definición se obtiene que si A es un retracto por deformación de X, entonces A es homótopo a X, y $\pi_1(A) = \pi_1(X)$.

REVESTIMIENTOS

Definición: Un *revestimiento* es una aplicación continua $\pi : X \to S$ entre ET con la propiedad de que cada punto de S tiene un entorno abierto U : $\pi^{-1}(U)$ es unión disjunta de abiertos homeomorfos a U vía π,

$$\pi^{-1}(U) = \coprod U_i, \qquad U_i \xrightarrow[\sim]{\pi} U.$$

Al abierto U se le dice *trivializante*, a los abiertos U_i *hojas*, y a S *espacio base*.

Definición: Un revestimiento $\pi : X \to S$ se dice *trivial* si el espacio total S es trivializante, ie, $\pi^{-1}(S) = X = \coprod U_i$, con $U_i \xrightarrow[\sim]{\pi} S$.

- Por def, todo revestimiento es localmente trivial.

• $z\in\mathbb{C}^* \longrightarrow z^n\in\mathbb{C}^*$; $z\in\mathbb{C}^* \longrightarrow e^z\in\mathbb{C}^*$, son revestimientos

<u>Lema</u>: $\pi : X \longrightarrow S$ revestimiento, $A\subseteq S \Rightarrow \pi : \pi^{-1}(A)\longrightarrow A$ revestimiento.

• $z\in S_1 \longrightarrow z^n\in S_1$; $x\in S_2 \longrightarrow [x]\in S_2/_{\equiv} = \mathbb{P}_2$ son revestimientos.

<u>Definición</u>. Un <u>espacio punteado</u> es un par (X,x_0), donde X es ET y $x_0\in X$. Una aplicación entre espacios punteados $(X,x_0)\xrightarrow{f}(Y,y_0)$ es una aplicación $f:X\to Y$: $f(x_0)=y_0$.

<u>Lema</u> (Unicidad de levantamientos): Sea $\pi:(X,x_0)\longrightarrow(S,s_0)$ un revestimiento y $\varphi:(T,t_0)\longrightarrow(S,s_0)$ una aplicación continua, T conexo. Si existe $\tilde{\varphi}:(T,t_0)\longrightarrow(X,x_0)$ tal que $\varphi=\pi\circ\tilde{\varphi}$, tal $\tilde{\varphi}$ es única.

$$\begin{tikzcd} & (X,x_0) \arrow[d, "\pi"] \\ (T,t_0) \arrow[ur, dotted, "\tilde{\varphi}"] \arrow[r, "\varphi"] & (S,s_0) \end{tikzcd}$$

Si $\exists\ \tilde{\varphi}$: $\pi\circ\tilde{\varphi}=\varphi$

$\Downarrow$

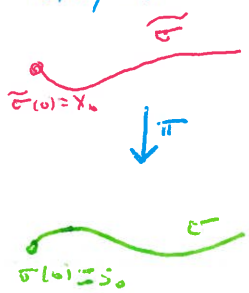
$\tilde{\varphi}$ es única.

<u>Lema</u> (de Lebesgue del recubrimiento): Sea $\{U_i\}$ un recubrimiento abierto de un EM compacto X. Existe un escalar $\delta>0$ tal que, si $A\subseteq X$, cumple:

$$\operatorname{diam}(A)<\delta \Longrightarrow A\subset U_i \text{ para algún } i.$$

<u>Proposición</u> (Subida de Arcos): Sea $\pi:(X,x_0)\longrightarrow(S,s_0)$ un revestimiento y $\sigma:(I,0)\longrightarrow(S,s_0)$ un arco. Existe un único arco $\tilde{\sigma}:(I,0)\longrightarrow(X,x_0)$: $\pi\circ\tilde{\sigma}=\sigma$, llamado <u>subida del arco σ</u>.

$$\begin{tikzcd} & (X,x_0) \arrow[d, "\pi"] \\ (I,0) \arrow[ur, dotted, "\tilde{\sigma}"] \arrow[r, "\sigma"] & (S,s_0) \end{tikzcd}$$



$\sigma=\pi\circ\tilde{\sigma}$.

Proposición (Subida de Homotopías): Sea $(X, x_0) \longrightarrow (S, s_0)$ un revestimiento y sea $H : (I\times I, (0,0)) \longrightarrow (S, s_0)$ continua. Existe una única aplicación continua $\tilde{H} : (I\times I, (0,0)) \longrightarrow (X, x_0)$ tal que $\tilde{H}(0,0) = x_0$ y $H = \pi\circ\tilde{H}$

$$\begin{tikzcd} & (X, x_0) \arrow[d, "\pi"] \\ (I\times I, (0,0)) \arrow[ur, dashed, "\tilde{H}"] \arrow[r, "H"] & (S, s_0) \end{tikzcd} \qquad \exists!\, \tilde{H} : H = \pi\circ\tilde{H}.$$

Corolario: Sea $\pi : (X, x_0) \longrightarrow (S, s_0)$ un revestimiento y sean α, β dos arcos en S con los mismos extremos. Sean $\tilde{\alpha}$ y $\tilde{\beta}$ los correspondientes subidos. Entonces

$$\alpha \equiv \beta \iff \tilde{\alpha} \equiv \tilde{\beta}.$$
(en particular $\tilde{\alpha}$ y $\tilde{\beta}$ tienen mismos extremos)

("$\Leftarrow$" ya lo sabíamos, pero HS se cumple "$\Rightarrow$").

Corolario. Sea $\pi : X \longrightarrow S$ un revestimiento y $s_0 \in S$. Si $\tilde{\sigma} : I \longrightarrow X$ es un arco de extremos puntos distintos x_0, x_1 de la fibra de s_0, $\sigma := \pi\circ\tilde{\sigma}$ es un lazo en s_0 que no es homótopo al punto.

Proposición: Sea $(X, x_0) \longrightarrow (S, s_0)$ un revestimiento. El morfismo de grupos

$$\pi_1(X)_{x_0} \xrightarrow{\pi_*} \pi_1(S)_{s_0} \quad \text{es \underline{inyectivo}}.$$
$$[\tilde{\sigma}] \longmapsto [\sigma := \pi\circ\tilde{\sigma}]$$

↑ σ es un arco cuyo subido es $\tilde{\sigma}$.

AUTOMORFISMOS DE UN REVESTIMIENTO

Definición: Un automorfismo de un revestimiento $\pi : X \longrightarrow S$ es un homeomorfismo $g : X \longrightarrow X$: $\pi\circ g = \pi$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "g", "\sim"'] \arrow[dr, "\pi"'] & & X \arrow[dl, "\pi"] \\ & S & \end{tikzcd} \quad \text{, i.e.,} \quad \pi(x) = \pi(g(x))$$

Si $x \in \pi^{-1}(s)$, como $\pi(g(x)) = \pi(x) = s$, $g(x) \in \pi^{-1}(s)$. Así que un automorfismo de un revestimiento debe operar en cada fibra de s, permutando sus puntos.

• $\mathrm{Aut}_S X = \{$ automorfismos $g : X \to X$ del revestimiento $\pi : X \to S\}$, es un grupo con la composición.

<u>Lema</u>: Sea $\pi : X \to S$ un revestimiento conexo (i.e., X conexo). Si dos automorfismos $g, g' \in \mathrm{Aut}_S X$ coinciden en un punto $\Rightarrow$ son iguales, $g = g'$.

• $\mathrm{Aut}_{S_1} \mathbb{R} = \mathbb{Z}$

• $\mathrm{Aut}_{\mathbb{P}_n} S_n = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

<u>Lema</u>: Si X es simplemente conexo, todo par de arcos (con extremos comunes) son homótopos.

<u>Nota</u>: Cuando hablemos de "un revestimiento con la prop. P", queremos decir que "X tiene la prop P".

<u>Lema</u>: Sea $\pi : (X, x_0) \longrightarrow (S, s_0)$ un revestimiento simplemente conexo. Existe una correspondencia biunívoca

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{clases de homotopía de arcos} \\ \alpha : (I, 0) \to (S, s_0) \end{array} \right\} = X$$

$$[\alpha] \longleftrightarrow \tilde{\alpha}(1),$$

donde $\tilde{\alpha}$ es la subida a X del arco α. (i.e., cada pto de X es el extremo final de la subida de un arco α en S con extremo inicial en s_0)

<u>Teorema</u>: Sea S un espacio localmente arco-conexo, y sea $\pi : (X, x_0) \longrightarrow (S, s_0)$ un revestimiento simplemente conexo. Entonces tenemos el isomorfismo de grupos

$$\pi_1(S)_{s_0} = \mathrm{Aut}_S X$$

$$[\sigma] \longmapsto g_\sigma : X \to X$$

$$x_\alpha \longmapsto g_\sigma(x_\alpha) := x_{\sigma \cdot \alpha},$$

donde, puesto que por el lema todo pto $x = \tilde{\alpha}(1)$ para un único arco α en S (mod. homotopía), denotamos por x_α a tal punto.

• $\pi_1(S_1) = \mathbb{Z}$ (S_1 es arco-conexo, así que el pto no importa: $\pi_1(S_1)_s = \mathbb{Z}$ $\forall s \in S$).

$[c^{-n}] \longleftrightarrow n$

• $\pi_1(\mathbb{P}_n) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $n \geq 2$ (aquí, igual, $\mathbb{P}_n$ es arco-conexo pq es tal y ser prop. top. y $\pi(S_n) = \mathbb{P}_n$)

• $\pi_1(\mathbb{R}^n - \mathbb{R}^m) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{si } n-m=2 \\ 0, & \text{si } n-m>2 \end{cases}$ (como le hemos quitado una variedad lineal de al menos codim 2, no le hemos quitado un hiperplano, y queda conexo. Como además es loc. arco-con, $\mathbb{R}^n - \mathbb{R}^m$ es arco-conexo, y no importa el pto)

. Como $\mathbb{R}^2 - p \overset{\text{retracto por def}}{\equiv} S_1$, $\pi_1(\mathbb{R}^2 - p) = \pi_1(S_1) = \mathbb{Z}$.

Lema: La inclusión natural $i: S_1 \hookrightarrow \mathbb{D}$ no tiene retracto.

Teorema (del punto fijo de Brower): Toda aplicación continua $\varphi: \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ tiene algún pto fijo.

Índice de una curva resp. un punto: Sea $\varphi: S_1 \to \mathbb{C}$, y queremos definir $\text{ind}_p \varphi$ = "nº de vueltas que da $\varphi(S_1)$ alrededor de p", $p \notin \varphi(S_1)$. Supongamos, m. traslación, que $p=0$. Si $r: \mathbb{C} - 0 \to S_1$, $r(z) = \frac{z}{|z|}$ (es retracto), entonces $(r \circ \varphi)_*: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, y queda det. por la imagen de 1:

Definición: Se llama índice de φ en p a $\text{ind}_p \varphi = (r \circ \varphi)_*(1)$.

En $\pi_1(S_1) = \mathbb{Z}$, 1 es dar una vuelta a la circunferencia, y a donde va, i.e., $\text{ind}_p \varphi$, es el nº de vueltas que da a la sfera imagen, esto es, al pto.

Proposición: Si dos curvas $\varphi, \varphi': S_1 \to \mathbb{C} - \{p\}$ son homótopas, $\text{ind}_p \varphi = \text{ind}_p \varphi'$.

Teorema (Fundamental del Álgebra): Todo polinomio $P(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$, $a_i \in \mathbb{C}$, tiene alguna raíz compleja.

Teorema (Borsuk-Ulam): Dada una aplicación continua $f: S_2 \to \mathbb{R}^2$, existe $x \in S_2$ tal que $f(x) = f(-x)$:

"En cada instante, hay un punto de la Tierra con la misma temperatura y presión que en su antípoda".

Teorema (de invariancia del dominio de Brower): Toda aplicación continua e inyectiva $\varphi : X \to Y$ entre VT de la misma dimensión es abierta, y por tanto φ es un homeomorfismo entre X y $U = \varphi(X)$, i.e., $X \xrightarrow[\sim]{\varphi} U \subseteq Y$.

- No se puede dividir una esfera en 3 cerrados de modo que cada uno de los trozos tenga un pto y su antípoda.

Teorema (de la Bisección): Dados dos conjuntos acotados y medibles, $A, B \subseteq \mathbb{R}^2$, existe una recta que divide a la vez cada una de las dos regiones en dos partes de igual área.

Teorema (de la bola peluda): Todo campo tangente continuo sobre S_2 se anula en algún punto.

- X contráctil $\Rightarrow$ simplemente conexo.

Proposición: $X = U_1 \cup U_2$, U_i simplemente conexo, $U_1 \cap U_2$ arco-conexo $\Rightarrow$ X simplemente conexo.

Corolario: S_n, $n \geq 2$, es simplemente conexa, i.e., $\pi_1(S_n) = 0$. ,*

Corolario: $\pi_1(\mathbb{R}^n - 0) = 0$, $n \geq 3$.

- Son <u>simplemente conexos</u>: convexos, estrellados, contráctiles, esferas S_n $(n > 1)$

Proposición: El número de hojas de un revestimiento $\pi : (X, x_0) \to (S, s_0)$, con X y S arco-conexos, es el índice de $\pi_1(X)_{x_0}$ en $\pi_1(S)_{s_0}$, i.e.,

$$|\pi^{-1}(s_0)| = \left| \frac{\pi_1(S)_{s_0}}{\pi_*(\pi_1(X)_{x_0})} \right|$$

III: PRODUCTO AMALGAMADO DE GRUPOS

Definición: Dar una categoría $\mathcal{C}$ es dar:

1. Una familia arbitraria, cuyos elementos llamaremos objetos de $\mathcal{C}$.
2. Unos conjuntos disjuntos $Hom_{\mathcal{C}}(M,N)$ para cada par de objetos M, N de la categoría, cuyos elementos llamaremos morfismos de M en N (ó flechas), y denotaremos como $M \to N$.
3. Para cada terna M, N, P de objetos de la categoría, una aplicación llamada composición:

$$Hom_{\mathcal{C}}(N,P) \times Hom_{\mathcal{C}}(M,N) \xrightarrow{\circ} Hom_{\mathcal{C}}(M,P)$$
$$(f, g) \longmapsto f \circ g$$

Estos tres datos deben satisfacer las siguientes condiciones:

i) La composición de morfismos (cuando tenga sentido) es asociativa: $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$.

ii) Para cada objeto M de $\mathcal{C}$, existe un morfismo $Id_M : M \to M$ que actúa como identidad a izqda y dcha resp. a la composición de morfismos:

$$f \circ Id_M = f \quad \forall f : M \to N$$
$$Id_M \circ g = g \quad \forall g : N \to M$$

Ejemplos:

1) Categoría de conjuntos, **Sets**: $\begin{cases} \text{obj: conjuntos} \\ \text{flechas: aplicaciones} \end{cases}$

2) Categoría de ET's, **Top**: $\begin{cases} \text{obj: ET's} \\ \text{flechas: aplicaciones continuas} \end{cases}$

3) Categoría de grupos: **Gr**: $\begin{cases} \text{obj: grupos} \\ \text{flechas: morfismos de grupos.} \end{cases}$

<u>Definición</u>: Sean X, Y objetos de una categoría $\mathcal{C}$. El <u>producto directo</u> (si existe) de X e Y es un objeto $X \times Y \in \mathcal{C}$ junto a dos flechas $p_1 : X \times Y \to X$, $p_2 : X \times Y \to Y$, llamadas <u>proyecciones naturales</u>, verificando que para todo objeto $T \in \mathcal{C}$,

$$\mathrm{Hom}(T, X \times Y) = \mathrm{Hom}(T, X) \times \mathrm{Hom}(T, Y)$$

$$\varphi \longmapsto (p_1 \circ \varphi, \; p_2 \circ \varphi)$$

Esta igualdad se llama <u>propiedad universal del producto directo</u>, y se expresa también así:

"Dadas dos flechas $\varphi_1 : T \to X$, $\varphi_2 : T \to Y$, existe una única flecha $\varphi : T \to X \times Y$ tal que $\varphi_1 = p_1 \circ \varphi$, $\varphi_2 = p_2 \circ \varphi$:

$$\begin{tikzcd}
 & & X \\
T \arrow[r, dashed, "\varphi"] \arrow[urr, bend left, "\varphi_1"] \arrow[drr, bend right, "\varphi_2"'] & X \times Y \arrow[ur, "p_1"] \arrow[dr, "p_2"] & \\
 & & Y
\end{tikzcd}$$

<u>Definición</u>: Dados dos objetos $X, Y \in \mathcal{C}$, se llama <u>suma directa</u> (si existe) de X e Y a un objeto $X \oplus Y \in \mathcal{C}$ junto a dos flechas $j_1 : X \to X \oplus Y$, $j_2 : Y \to X \times Y$, verificando que para cualquier objeto $T \in \mathcal{C}$,

$$\mathrm{Hom}(X \oplus Y, T) = \mathrm{Hom}(X, T) \times \mathrm{Hom}(Y, T)$$

$$\varphi \longmapsto (\varphi \circ j_1, \; \varphi \circ j_2)$$

Esta igualdad está diciendo que se cumple la <u>propiedad universal de la suma directa</u>:

"Dadas dos flechas $\varphi_1 : X \to T$, $\varphi_2 : Y \to T$, existe una única flecha $\varphi : X \oplus Y \to T$ tal que $\varphi_1 = \varphi \circ j_1$, $\varphi_2 = \varphi \circ j_2$:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, "j_1"] \arrow[drr, bend left, "\varphi_1"] & & \\
 & X \oplus Y \arrow[r, dashed, "\varphi"] & T \\
Y \arrow[ur, "j_2"'] \arrow[urr, bend right] & &
\end{tikzcd}$$

Lema (Yoneda): Sea $\mathcal{C}$ una categoría, y $R, R' \in \mathcal{C}$. . . .

1) Si para todo $T \in \mathcal{C}$ existe una biyección "functorial"

$$Hom(R, T) = Hom(R', T)$$

entonces existe un isomorfismo $R \simeq R'$.

2) Si para todo $T \in \mathcal{C}$ existe una biyección "functorial"

$$Hom(T, R) = Hom(T, R'),$$

entonces existe un isomorfismo $R' \simeq R$.

O sea, "dime cómo te relacionas y te diré quién eres".

Corolario: El producto directo y la suma directa en una categoría son únicos.

GRUPOS LIBRES

Sea A un conjunto cualquiera, y consideremos $A \times \{+1, -1\}$. Denotemos a cada par (a, ε) por a^{ε}. Sea

$$G(A) := \left\{ \begin{array}{l} \text{sucesiones finitas } a_1^{\varepsilon_1} \cdots a_n^{\varepsilon_n} \text{ de elementos} \\ \text{de } A \times \{\pm 1\}, \text{ donde no hay elementos de la} \\ \text{forma } a^{\varepsilon} a^{-\varepsilon} \end{array} \right\},$$

donde se considera que la "sucesión vacía", $\emptyset \in G(A)$. La yuxtaposición de letras,

$$(a_1^{\varepsilon_1} \cdots a_n^{\varepsilon_n}) \circ (\bar{a}_1^{\bar{\varepsilon}_1} \cdots \bar{a}_m^{\bar{\varepsilon}_m}) := a_1^{\varepsilon_1} \cdots a_n^{\varepsilon_n} \bar{a}_1^{\bar{\varepsilon}_1} \cdots \bar{a}_m^{\bar{\varepsilon}_m},$$

"simplificando" (i.e. si aparece $z^{\varepsilon} z^{-\varepsilon}$ se simplifica), define una estructura de grupo en $G(A)$, donde el neutro es $\emptyset$ y el inverso de $a_1^{\varepsilon_1} \cdots a_n^{\varepsilon_n}$ es $a_n^{-\varepsilon_n} \cdots a_1^{-\varepsilon_1}$.

Definición: Llamaremos *grupo libre* generado por los elementos de A a $G(A)$.

La ley del grupo dice que los elementos de A generan el grupo.

Teorema (Propiedad Universal del Grupo Libre): Toda aplicación $A \xrightarrow{\varphi} G'$, G' grupo, extiende a un único morfismo de grupos $\varphi : G(A) \to G'$ i.e., se cumple el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, hook] \arrow[dr, "\varphi"'] & G(A) \arrow[d, dashed, "\varphi \text{ morfismo de grupos.}"] \\ & G' \end{tikzcd}$$

$$\varphi(a_1^{\varepsilon_1} \cdots a_n^{\varepsilon_n}) := \varphi(a_1)^{\varepsilon_1} \cdots \varphi(a_n)^{\varepsilon_n}.$$

ó en otras palabras:

$$\text{Aplic}(A, G') = \text{Hom}_{gr}(G(A), G').$$

• $(G(\{a\}), \circ) = (\mathbb{Z}, +)$.

Lema: Todo grupo es isomorfo a un cociente de un grupo libre: $G = \dfrac{G(x_1 \dots x_n)}{\langle r_1 \dots r_m \rangle}$, donde a $\langle r_1 \dots r_m \rangle$ se le llaman relaciones. Al cociente se le llama presentación del grupo

PRODUCTO LIBRE DE GRUPOS

Definición: Se llama producto libre de dos grupos G_1 y G_2 a su suma directa $G_1 \oplus G_2$ en la categoría de grupos, y se denotará como $G_1 * G_2$.

• Esta definición es un poco abstracta. Hagamos una definición constructivista: sea

$$G_1 * G_2 := \left\{ \begin{array}{l} \text{sucesiones finitas } g_1 \cdots g_n \text{ de elementos de} \\ G_1 \amalg G_2 \text{ donde no hay dos términos consecutivos} \\ \text{del mismo grupo, ni ningún término es el neutro de} \\ G_1 \text{ ó } G_2 \end{array} \right\}.$$

Al igual que antes, la yuxtaposición

$$(g_1 \cdots g_n) \circ (\bar{g}_1 \cdots \bar{g}_m) := g_1 \cdots g_n \bar{g}_1 \cdots \bar{g}_m$$

define una estructura de grupo, donde el neutro es la sucesión vacía y el inverso de $g_1 \cdots g_n$ es $g_n^{-1} \cdots g_1^{-1}$. Además, si $g_n, \bar{g}_1$ pertenecen al mismo grupo, se considera $(g_n \bar{g}_1)$ como un único elemento (con el producto de su grupo).

Habría que ver que ambas def coinciden.

Proposición: Coinciden.

Lema: $$\frac{G(x_1 \dots x_n)}{R} * \frac{G(y_1 \dots y_m)}{R} = \frac{G(x_1 \dots x_n, y_1 \dots y_m)}{\langle R, S \rangle},$$ donde $\langle R, S\rangle$ es el menor grupo normal que contiene a R y S.

Lema: $G(A) * G(B) = G(A \amalg B)$.

PRODUCTO AMALGAMADO DE GRUPOS

Definición: Sean $\delta_1, \delta_2 : H \longrightarrow G$ dos morfismos de grupos. Se llama conúcleo de δ_1 y δ_2 a

$$\overline{G} := \frac{G}{\langle \delta_1(h) = \delta_2(h) \rangle},$$

donde $\langle \delta_1(h) = \delta_2(h) \rangle \overset{not}{=} \langle \delta_1(h) \cdot \delta_2(h)^{-1} \rangle$ es el menor subgrupo normal de G que contiene a los elementos $\{ \delta_1(h) \cdot \delta_2(h)^{-1} : h \in H \}$.

- El menor subgrupo normal que contiene a unos elementos, en general, es: coger sus elementos, sus inversos, sus conjugados y los productos de todos ellos.
- Es obvio que cumple $\pi \circ \delta_1 = \pi \circ \delta_2$.

Teorema (Propiedad Universal del Conúcleo): Dado un morfismo de grupos $\varphi : G \longrightarrow T$ tal que $\varphi \circ \delta_1 = \varphi \circ \delta_2$, existe un único morfismo de grupos $\overline{\varphi} : \overline{G} \longrightarrow T$ que hace conmutativo el diagrama:

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, shift left, "\delta_1"] \arrow[r, shift right, "\delta_2"'] & G \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\pi"'] & T \\ & \overline{G} \arrow[ur, dashed, "\exists \overline{\varphi}"'] & \end{tikzcd}$$

Definición: Sean G_0, G_1, G_2 grupos y consideremos el producto libre $G_1 * G_2$, y supongamos además que tenemos morfismos $G_0 \xrightarrow{\delta_1} G_1$, $G_0 \xrightarrow{\delta_2} G_2$, i.e.

$$\begin{tikzcd} & G_1 \subseteq G_1 * G_2 \\ G_0 \arrow[ur, "\delta_1"] \arrow[dr, "\delta_2"'] & \\ & G_2 \subseteq G_1 * G_2 \end{tikzcd}$$

al conúcleo de este par de morfismos:

Se llama producto amalgamado de G_1 y G_2 sobre G_2

$$G_1 *_{G_0} G_2 := \frac{G_1 * G_2}{\langle \delta_1(g_0) = \delta_2(g_0) \rangle_{g_0 \in G_0}}.$$

***Teorema** (Seifert (1931), Van Kampen (1933)): Sea X un espacio localmente simplemente conexo, y sean U_1, U_2 dos abiertos conexos que recubren X y tales que su intersección $U_0 = U_1 \cap U_2$ es también conexo. Entonces

$$\pi_1(X) = \pi_1(U_1) *_{\pi_1(U_0)} \pi_1(U_2),$$

donde los grupos fundamentales se consideran en un punto $x_0 \in U_0$ (las flechas son los morfismos inducidos por la inclusión).

GRUPO FUNDAMENTAL DE LAS SUP. COMPACTAS

Definición: Un trébol de n hojas es un ET punteado (X, x_0) tal que $X = C_1 \cup \dots \cup C_n$, donde cada C_i es un cerrado homeomorfo a S_1 y $C_i \cap C_j = \{x_0\}$, $i \neq j$.

Proposición: Sea σ_i el lazo en x_0 que consiste en dar una sola vuelta al cerrado C_i. Entonces el grupo fundamental de un trébol de n hojas $X = C_1 \cup \dots \cup C_n$ es

$$\pi_1(X) = G(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$$

(un trébol es localmente simplemente conexo, de modo que el, x_0 no importa).

Teorema: Sea X una sup. compacta obtenida identificando pares de letras según un símbolo $w = a_{i_1}^{\pm 1} a_{i_2}^{\pm 1} \dots$ (con n pares de letras $a_1 \dots a_n$), y supongamos que todos los vértices se identifican entre sí. Entonces

$$\pi_1(X) = \frac{G(a_1 \dots a_n)}{\langle w \rangle}$$

(el punto de anclaje no importa, una sup. compacta es simplemente conexa).

- $$\pi_1\left(\begin{array}{c}\text{suma conexa}\\ \text{de } g \text{ toros}\end{array}\right) = \frac{G(a_1, b_1, \dots, a_g, b_g)}{\langle a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1}, \dots, a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1} \rangle}, \qquad w = a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1}.$$

- $$\pi_1\left(\begin{array}{c}\text{suma conexa}\\ \text{de } p \text{ planos}\\ \text{proyectivos}\end{array}\right) = \frac{G(a_1 \dots a_p)}{\langle a_1^2 \dots a_p^2 \rangle}, \qquad w = a_1 a_1 \dots a_p a_p.$$

• Lo que queremos es terminar el Th Clasificación. Para ello vamos a probar que las 3 no son homeomorfas entre sí.

<u>Definición</u>: Se llama <u>conmutador</u> de un grupo G al subgrupo C generado por los elementos de la forma $xyx^{-1}y^{-1}$. C es un subgrupo normal, y G/C es un grupo abeliano.

<u>Definición</u>: Se llama <u>abelianizado</u> de un grupo G al cociente $G^{ab} := G/C$.

<u>Teorema</u> (Propiedad Universal del grupo abelianizado): Todo morfismo de grupos $\varphi : G \longrightarrow A$, donde A es un grupo abeliano, factoriza de modo único a través de G^{ab}, i.e.,

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\pi"'] & A \\ G^{ab} \arrow[ur, dashed, "\bar{\varphi}"'] & \end{tikzcd}$$

$\bar{\varphi}$ morf de grupos.

i.e.,
$$\mathrm{Hom}_{gr}(G, A) = \mathrm{Hom}_{gr}(G^{ab}, A).$$

<u>Proposición</u>:

1) $\pi_1\begin{pmatrix}\text{suma conexa} \\ \text{de } g \text{ toros}\end{pmatrix}^{ab} = \mathbb{Z} \oplus \overset{2g}{\cdots} \oplus \mathbb{Z} = \mathbb{Z}^{2g}$.

2) $\pi_1\begin{pmatrix}\text{suma conexa} \\ \text{de } p \text{ planos proy.}\end{pmatrix}^{ab} = \mathbb{Z} \oplus \overset{p-1}{\cdots} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \mathbb{Z}^{p-1} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

3) $\pi_1(\text{esfera})^{ab} = 0$.

Luego ya lo tenemos: estas 3 no pueden ser homeomorfas pq tienen grupos abelianizados diferentes; en particular:

<u>Teorema</u>: Sea X una superficie compacta.

1) X es una esfera $\Longleftrightarrow \pi_1(X) = 0$.

2) X es una conexa de g toros $\Longleftrightarrow \pi_1(X)^{ab}$ es un $\mathbb{Z}$-módulo libre de rango $2g$

3) X es una suma conexa de p planos proyectivos $\Longleftrightarrow \pi_1(X)^{ab}$ es un $\mathbb{Z}$-módulo libre de rango $p-1$ y torsión no nula.

• $\pi_1(S_2) = 0$, $\pi_1(\mathbb{T}) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, $\pi_1(\mathbb{P}_2) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

GRAFOS FINITOS

Definición: Un grafo finito es un complejo celular finito de dimensión ≤ 1.

- Aquí la char E-P es $\chi(X) = c_0 - c_1 =$ vértices $-$ aristas.

Definición: Sea X un grafo finito. Se llama grado de conexión de X al mayor número de aristas $a_1, \ldots, a_r$ tal que $X - a_1 - \ldots - a_r$ es conexo; y lo denotamos $c(X)$.

Si $c(X) = 0$ se dice que X es un árbol.

Proposición: Para todo grafo finito conexo se cumple

$$\boxed{c(X) + \chi(X) = 1}$$

Lema: Todo árbol es contráctil.

Teorema. El grupo fundamental de un grafo finito conexo X es un grupo libre con tantos generadores como el grado de conexión $c(X)$.

- La dem. dice cómo obtener tales generadores: sea x_0 un vértice de X $\underline{r = c(X)}$, y $a_1 \ldots a_r$ aristas tales que $X - a_1 - \ldots - a_r$ sea conexo. Sea C_1 un sub-grafo de X homeomorfo a S_1 tal que $a_1 \subset C_1$.

Se tome el lazo $\sigma_1 = \gamma \cdot \alpha_{C_1} \cdot \gamma^{-1}$, donde γ es un camino que une x_0 con un pto $x_1 \in C_1$ y α_{C_1} es el lazo en x_1 que da una sola vuelta a C_1.

Después se define igual el lazo σ_2 en el grafo $X - a_1$, luego σ_3 en $X - a_1 - a_2, \ldots$ y

$$\pi_1(X)_{x_0} \equiv G(\sigma_1, \ldots, \sigma_r)$$

IV: TEORÍA DE GALOIS DE REVESTIMIENTOS

Definición: Un revestimiento $\pi : X \to S$ se dice *finito* si sus fibras ($\pi^{-1}(s)$, $s \in S$) tienen finitos elementos.

Proposición (Propiedades):

1) Todo revestimiento es una aplicación abierta. Por tanto, si π es epiyectivo, S tiene la top final de π.
2) Todo revestimiento finito es una aplicación cerrada.

Proposición: Sea $\pi : X \to S$ un revestimiento. Si S es conexo $\Longrightarrow$ todas las fibras de S tienen el mismo cardinal.

Definición: Llamaremos *grado* de un revestimiento $\pi : X \to S$ al cardinal común de las fibras de π.

Corolario: Todo revestimiento de grado 1 es un homeomorfismo.

Proposición: La composición de revestimientos finitos de grados n y m es un revestimiento finito de grado $n \cdot m$.

PRODUCTO FIBRADO

Definición: Sea S un ET. Un *S-espacio* es una pareja formada por un ET X y una aplicación continua $f : X \to S$.

Dados dos S-espacios (X, f), (Y, g), un *morfismo de S-espacios* es una aplicación continua $\varphi : X \to Y$ tal que $g \circ \varphi = f$, i.e., que el triángulo siguiente sea conmutativo.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "f"'] & & Y \arrow[dl, "g"] \\ & S & \end{tikzcd}$$

Definición: Dados dos S-espacios (X, f), (Y, g), se llama *producto fibrado* de ambos a

$$X \times_S Y := \{(x, y) \in X \times Y : f(x) = g(y)\},$$

con la top de subespacio de $X \times Y$.

Teorema (Propiedad Universal del producto fibrado): El producto fibrado es el producto directo en la categoría de los S-espacios: se cumple

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dr, "f"] & \\ X \times Y \supseteq X \times_S Y \arrow[ur, "p_1"] \arrow[dr, "p_2"'] \arrow[rr, dashed, "\varphi"] & & S \\ & Y \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

es conmutativo: $\varphi = f \circ p_1 = g \circ p_2$,

$\varphi(x,y) = f(x) = g(y)$.

$$\mathrm{Hom}_S(T, X \times_S Y) = \mathrm{Hom}_S(T, X) \times \mathrm{Hom}_S(T, Y)$$

$$\psi \longmapsto (p_1 \circ \psi, \quad p_2 \circ \psi),$$

donde $\mathrm{Hom}_S(X, Y) := \{$ morfismos de S-espacios $\varphi: X \to Y\}$.

Proposición (Propiedades):

1) $X \times_S Y = Y \times_S X$

2) $(X \times_S Y) \times_S Z = X \times_S (Y \times_S Z)$

3) $X \times_S S = X$

4) $(U_1 \sqcup U_2) \times_S Y = (U_1 \times_S Y) \sqcup (U_2 \times_S Y)$

5) $(X \times_S Y) \times_Y Z = X \times_S Z$.

~~Si U abierto trivializante del revestimiento $\pi: X \to S$, entonces $\pi^{-1}(U) = U \times_S X = \sqcup U$~~

Teorema: "El producto fibrado de revestimientos es un revestimiento".

Con precisión: si $f: X \to S$, $g: Y \to S$ son revestimientos $\Rightarrow X \times_S Y \to S$ es revestimiento.

Para esto se necesita

Lema:

1) Sea $f: X \to S$ cont, $A \subseteq S$. Entonces $f^{-1}(A) = X \times_S A$.

2) Sea $\pi: X \to S$ revestimiento. $\pi^{-1}(U) = \sqcup U \iff X \times_S U = \sqcup U$.

Proposición (Cambio de Base de revestimientos): Consideremos el siguiente diagrama conmutativo.

$$\begin{tikzcd} X \times_S S' \arrow[r] \arrow[d, "p_2 = \pi'"'] & X \arrow[d, "\pi"] \\ S' \arrow[r, "g"', "\text{continua}"] & S \end{tikzcd}$$

π revestimiento $\Rightarrow$ π' revestimiento, y del mismo grado.

Corolario:

$$\begin{tikzcd} & X \times_S Y \arrow[dl, "p_1"'] \arrow[dr, "p_2"] \arrow[dd] & \\ X \arrow[dr, "f"'] & & Y \arrow[dl, "g"] \\ & S & \end{tikzcd}$$

f, g revestimientos $\Rightarrow$ todas las flechas sean revestimientos.

MORFISMOS DE REVESTIMIENTOS

En adelante todos los espacios se considerarán loc. conexos. En estos espacios, toda componente conexa es abierta y cerrada.

Proposición: Sea $X' \subseteq X$ una componente conexa. $\pi : X \to S$ revestimiento $\Rightarrow$ $\pi_{|X'} : X' \to S$ revestimiento.

Teorema: Todo morfismo entre revestimientos es revestimiento.

Con precisión: si $f : X \to S$, $g : Y \to S$ revestimientos $\Rightarrow$ todo morfismo de S-espacios $\varphi : X \to Y$ es revestimiento.

Para cada morfismo de S-espacios $\varphi : X \to Y$, sea $\Gamma_\varphi := \{ (x, \varphi(x)) \in X \times_S Y : x \in X \}$ = gráfica de φ

Teorema (Fórmula de los morfismos): Sean $X \to S$, $Y \to S$ revestimientos, X conexo. Entonces existe una correspondencia biunívoca

$$\mathrm{Hom}_S(X, Y) = \left\{ \begin{array}{l} \text{componentes conexas de} \\ X \times_S Y \text{ homeomorfas a } X \\ \text{por } p_1 \end{array} \right\}$$

$$\varphi \longmapsto \Gamma_\varphi .$$

Corolario: Sean $X \to S$, $Y \to S$ dos revestimientos, X conexo, y sean $\varphi_1, \varphi_2 : X \to Y$ dos morfismos de S-espacios. Si φ_1, φ_2 coinciden en algún pto $\Rightarrow \varphi_1 = \varphi_2$.

COCIENTES POR LA ACCIÓN DE UN GRUPO

Definición: Sea X ET. Un automorfismo de X es un homeomorfismo $g : X \xrightarrow{\sim} X$. Denotamos

$$\mathrm{Aut}\, X = \{ \text{automorfismos de } X \},$$

que es un grupo con la composición, y. Llamaremos grupo de automorfismos de X a cualquier subgrupo $G \leq \mathrm{Aut}\, X$.

Definición: Un grupo G de automorfismos de un ET X se dice propiamente discontinuo si

$$\forall x \in X \quad \exists U \text{ entorno abto de } x \quad : \quad g_1 \neq g_2 \Rightarrow g_1(U) \cap g_2(U) = \emptyset \quad , \forall g_1, g_2 \in G$$

$G = \{ g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g_n(x) = x+n \} = \mathbb{Z}$ es propiamente discontinuo.

Sea X ET y $G \leq \mathrm{Aut}\, X$. Podemos considerar la rel. rel de equivalencia:

$$x_1 \equiv x_2 \quad :\Longleftrightarrow \quad x_1 = g(x_2) \quad \text{para algún } g \in G.$$

Denotamos al cociente como X/G.

Lema: El paso al cociente $\pi : X \longrightarrow X/G$ es una aplicación abierta.

Proposición: Si $G \overset{\leq \mathrm{Aut}\, X}{} $ es propiamente discontinuo, $\pi : X \to X/G$ es revestimiento.

Teorema: Sea $\pi : X \to S$ un revestimiento, y $G \leq \mathrm{Aut}_S X$ ($\leq \mathrm{Aut}\, X$). Entonces

1) $\pi : X \longrightarrow X/G$ es revestimiento

2) $X/G \longrightarrow S$ es revestimiento.

REVESTIMIENTOS DE GALOIS

Definición: Un revestimiento $\pi : X \to S$ entre espacios conexos se dice **de Galois** si $\mathrm{Aut}_S X$ opera transitivamente en las fibras, i.e.,

$$x, x' \in \pi^{-1}(s) \quad \underset{(\Longleftarrow)}{\Longrightarrow} \quad \exists\, g \in \mathrm{Aut}_S X \;:\; x' = g(x)$$

Al grupo $G := \mathrm{Aut}_S X$ se le llama **grupo de Galois del revestimiento**.

Teorema: Sea $\pi : X \to S$ un revestimiento entre espacios conexos.

$$\pi : X \to S \text{ de Galois} \iff X \times_S X = \coprod X \qquad \left(\begin{array}{l} \text{i.e., } X \times_S X \text{ es unión de copias} \\ \text{homeomorfas a } X \text{ vía } p_1 \end{array} \right)$$

Ej. $z \in \mathbb{C} \to e^z \in \mathbb{C}^*$, $\; z \in \mathbb{C} \to z^n \in \mathbb{C}$ son revestimientos de Galois.

Teorema (Artin): Sea $\pi : X \to S$ un revestimiento entre espacios conexos y sea $G \subseteq \mathrm{Aut}_S X$.

$$X/G = S \iff \pi : X \to S \text{ es de Galois y } G = \mathrm{Aut}_S X.$$

Definición: Sea $\pi : X \to S$ un revestimiento entre espacios conexos, y sea $\equiv$ una rel. de equivalencia en X tal que

$$x \equiv x' \implies \pi(x) = \pi(x'),$$

la rel. ya que por la PU EC factoriza. Si $\bar{\pi}$ es un revestimiento, se llamará **revestimiento cociente**.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "\pi"'] \arrow[r] & X/\equiv \arrow[dl, "\bar{\pi}"] \\ S & \end{tikzcd}$$

Teorema (Galois): Sea $\pi: X \to S$ un revestimiento de Galois, de grupo G. Existe una correspondencia biunívoca

$$\left\{ \text{subgrupos de } G \right\} \;=\!=\!=\; \left\{ \begin{array}{c} \text{revestimientos cocientes} \\ \text{de } \pi: X \to S \end{array} \right\}$$

$$H \longmapsto X/_H \to S$$

$$\mathrm{Aut}_{X'} X \longleftarrow\!\!| \quad X' \to S$$

(*) subgrupos normales $\longleftrightarrow$ rev. de Galois

REVESTIMIENTO UNIVERSAL

Definición: Un revestimiento $\pi: X \to S$ entre espacios conexos se dice universal si X no admite más revestimientos que los triviales, i.e., si todo revestimiento de X es el trivial, i.e., si

$$\tilde{X} \xrightarrow[\text{revest.}]{p} X \implies \tilde{X} = \coprod X.$$

Teorema: El revestimiento universal de un espacio conexo S, de existir, es único (salvo isomorfismo) y es de Galois.

Proposición. Sea $(X, x_0) \to (S, s_0)$ el revestimiento universal de un esp. conexo S. Todo revestimiento conexo $(X', x_0') \to (S, s_0)$ es cociente del universal, y de modo único.

Corolario: Sea $\pi: X \to S$ un revestimiento, con X simplemente conexo y S conexo y loc. arc-con. Entonces π es el revestimiento universal.

(*) **Teorema**: Si $\pi: X \to S$ es de Galois de grupo G, y $H \subseteq G$ subgrupo, entonces

$$\begin{tikzcd} X \arrow[dr, "H"', "\text{rev. de Galois}"] \arrow[dd, "\text{rev. de Galois } G"'] & \\ & X' = X/H \arrow[dl, "\text{revestimiento}"] \\ S & \end{tikzcd}$$

revestimiento, y es de Galois $\iff$ H subgrupo normal (en cuyo caso el grupo de Galois es G/H)

Teorema (de clasificación de revestimientos): Sea $\pi : (X, x_0) \to (S, s_0)$ un revestimiento simplemente conexo de un espacio S conexo y loc. arco-conexo. Existe una correspondencia biunívoca

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{subgrupos de} \\ \pi_1(S)_{s_0} \end{array} \right\} \;=\!=\!=\; \left\{ \begin{array}{c} \text{revestimientos conexos (punteados)} \\ (Y, y_0) \to (S, s_0) \end{array} \right\}$$

$$H \longmapsto (X/H, [x_0]) \to (S, s_0)$$

$$\pi_1(Y)_{y_0} \longleftarrow\!\!\!\mid \; (Y, y_0) \to (S, s_0)$$

Teorema (Existencia del revestimiento universal): Sea S un espacio conexo y loc. arco-conexo. Si S posee un recubrimiento formado por abiertos simplemente conexos, existe un revestimiento simplemente conexo (luego universal) $\pi : X \to S$.

Definición: Un grupo topológico es un grupo G dotado de una topología que hace que las aplicaciones

$$\begin{array}{rcl} G \times G & \longrightarrow & G \\ (g, g') & \longmapsto & g \cdot g' \end{array} \quad , \quad \begin{array}{rcl} G & \xrightarrow{\;-1\;} & G \\ g & \longmapsto & g^{-1} \end{array}$$

sean continuas.

Definición: Un grupo de Lie es una variedad diferenciable dotada de estructura de grupo de modo que las aplicaciones

$$\begin{array}{rcl} G \times G & \longrightarrow & G \\ (g, g') & \longmapsto & g \cdot g' \end{array} \quad , \quad \begin{array}{rcl} G & \xrightarrow{\;-1\;} & G \\ g & \longmapsto & g^{-1} \end{array}$$

sean diferenciables.

- $(\mathbb{R}^n, +)$ • $(GL_n, \circ)$ son grupos de Lie.

• La subida de arcos y homotopías (de arcos) del cap. II generalizan a espacios topológicos:

<u>Proposición</u> (Subida de Homotopías): Sea $\pi : X \to S$ un revestimiento y sea $H : Y \times I \to S$ una homotopía para la cual existe un levantamiento $\widetilde{H_0} : Y \times I \to X$ de H_0 (i.e., $\pi \circ \widetilde{H_0} = H_0$).
Entonces existe una única homotopía $\widetilde{H} : Y \times I \to X$ que levanta H.

<u>Teorema</u> (Subida de Aplicaciones): Sea $\pi : (X, x_0) \to (S, s_0)$ un revestimiento, y sea $f : (Y, y_0) \to (S, s_0)$ una aplicación, con Y conexo y loc. arco-conexo.

$$\text{Existe un único levantamiento } \tilde{f} : (Y, y_0) \to (X, x_0) \iff f_*\left(\pi_1(Y)_{y_0}\right) \subseteq \pi_*\left(\pi_1(X)_{x_0}\right)$$

$$\begin{tikzcd}
 & (X, x_0) \arrow[d, "\pi"] \\
(Y, y_0) \arrow[ur, dashed, "\tilde{f}"] \arrow[r, "f"] & (S, s_0)
\end{tikzcd}$$