Exo 6 (Feuille 3)

$$\begin{cases} tx - y = 1 \\ x + (t-2)y = -1 \end{cases} \xrightarrow{\text{Ilan hier}} \begin{cases} tx - y = 1 \\ (t-1)^2 y = -t-1 \end{cases}$$

Alors $y = \dfrac{-t-1}{(t-1)^2}$

⚠ Je peux diviser par $(t-1)^2$ si $t \neq 1$! Après, il faudra voir le cas $t = 1$.

et du coup $x = \dfrac{1+y}{t} = \dfrac{1 + \frac{-t-1}{(t-1)^2}}{t} = \dfrac{(t^2-2t+1)-t-1}{(t^2-1)\,t} =$

$= \dfrac{t^2-3t}{(t-1)^2 t} = \dfrac{t-3}{(t-1)^2}$

⚠ Encore, je peux diviser par t si $t \neq 0$!

Donc : Si $t \neq 0, 1$, alors $\boxed{x = \dfrac{t-3}{(t-1)^2} \qquad y = \dfrac{-t-1}{(t-1)^2}}$

Si $t = 1$: Le système devient

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ x - y = -1 \end{cases} \rightsquigarrow$$

donc $x - y = 1$ et $x - y = -1$ au même temps !!!!!

Aucune solution

Si $t = 0$: Le système devient

$$\begin{cases} -y = 1 \\ x - 2y = -1 \end{cases} \rightarrow \boxed{y = -1} \rightsquigarrow \boxed{x = -1 + 2y = -1 - 2 = -3}$$

Exo 7 (Feuille 3)

$$\begin{cases} (t-1)\,x + y = 1 \\ 2x + ty = -1 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} t-1 & 1 & 1 \\ 2 & t & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[L_2 \rightsquigarrow (t-1)L_2]{L_1 \rightsquigarrow 2L_1} \left(\begin{array}{cc|c} 2t-2 & 2 & 2 \\ 2t-2 & t^2-t & -t+1 \end{array}\right) \xrightarrow{L_2 \to L_2 - L_1}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2t-2 & 2 & 2 \\ 0 & t^2-t-2 & -t-1 \end{array}\right)$$

échelonné si $t \neq 1$

(Nasser hier, mais j'ai corrigé un signe)

Nouveau système :
$$\begin{cases} (2t-2)\,x + 2y = 2 \\ (t^2-t-2)\,y = -t-1 \end{cases}$$

$$\rightsquigarrow y = -\frac{t+1}{t^2-t-2}$$

⚠ Quand est-ce que je peux diviser par t^2-t-2 ? Justement quand $t^2-t-2 \neq 0$. Et du coup quand $t^2-t-2=0$?

$$\hookrightarrow t = \frac{1 \pm \sqrt{1-4\cdot 1\cdot(-2)}}{2\cdot 1} = \frac{1\pm\sqrt{9}}{2} = \frac{1\pm 3}{2} = \begin{cases} 2 \\ -1 \end{cases}$$

donc $t^2-t-2 = (t-2)(t+1)$

$$\hookrightarrow y = -\frac{t+1}{(t-2)(t+1)} = -\frac{1}{t-2}$$

, et en utilisant la première eq,

$$(t-1)x = 1-y \longrightarrow (t-1)\,x = 1 + \frac{1}{(t-2)} = \frac{t-2+1}{t-2} = \frac{t-1}{t-2}$$

$$\longrightarrow x = \frac{t-1}{(t-2)(t-1)} = \frac{1}{t-2}$$

⚠ Encore, si $t \neq 1$!

Donc : Si $t \neq 2, \pm 1$, alors $\boxed{\begin{array}{l} x = \frac{1}{t-2} \\ y = -\frac{1}{t-2} \end{array}}$

Maintenant il faut faire les cas $t = 2, \pm 1$ à part.

Si $t = 2$. Le système devient

$\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 2y = -1 \end{cases}$, et du coup $x+y = 1$ et au même temps $x + y = -\frac{1}{2}$!!!!! Aucune solution

Si $t = -1$. le système devient

$\begin{cases} -2x + y = 1 \\ 2x - y = -1 \end{cases}$, $\longrightarrow$ la 2è eq. est la même que le 1è, mais avec un signe $-$. Du coup, on a qu'une equation! (le 2è eq est redondante)

On peut choisir $x := \lambda \in \mathbb{R}$ comme paramètre, et alors

$y = 1 + 2x = 1 + 2\lambda$. $\boxed{\begin{array}{l} x = \lambda \\ y = 1 + 2\lambda \end{array}}$ (∞ solutions)

Si $t = +1$ le système devient

$\begin{cases} y = 1 \\ 2x + y = -1 \end{cases}$ $\rightarrow x = \frac{-1-y}{2} = \frac{-1-1}{2} = \frac{-2}{2} = -1$

$\boxed{\begin{array}{l} x = -1 \\ y = 1 \end{array}}$ (Une unique solution)