Séries

Si (u_n) est une suite, $u_n = (u_0, u_1, u_2, \dots)$, on appelle série la suite de sommes partielles

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \left(u_0, \; u_0 + u_1, \; u_0 + u_1 + u_2, \; u_0 + u_1 + u_2 + u_3, \; \dots \right)$$

Autrement dit, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n$ est une suite avec terme général $\sum\limits_{i=0}^{n} u_i$.

On dit que la série est convergente quand la suite de sommes partielles est convergente. La limite de cette suite s'appelle la somme de la série.

Exemple. Si $u_n = (1, 1, 1, 1 \dots)$ la suite constante 1, alors

$$\begin{aligned} \sum u_n &= (1, \; 1+1, \; 1+1+1, \; \dots) \\ &= (1, 2, 3, 4, \dots) \\ &= (n) \end{aligned}$$

qui diverge vers ∞.

Exemple. Si $u_n = (1, 2, 3, 4, \dots)$, alors

$$\sum u_n = (1, \; 1+2, \; 1+2+3, \dots) = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)$$

qui diverge vers ∞ aussi.

Normalement, il est très difficile de calculer la valeur explicite vers laquelle une série convergente converge. On va étudier des critères/astuces qui permettent de décider si une série converge ou non.

(1) Premier filtre :

Si $(u_n) \not\to 0$, alors $\sum u_n$ ne converge pas

Si $(u_n) \to 0$, on peut pas décider

C'est clair : la seule façon pour qu'une somme infinie soit finie est que les nombres que l'on ajoute deviennent de plus en plus petits.

Exemple. Les séries $\sum u_n$ avec $u_n = (1, 1, 1, ..)$ et $u_n = (1, 2, 3, ..)$ d'avant.

Exemple. $\sum \frac{1}{n!}$ est convergente vers le nombre e.

(Peut-être vous avez vu que $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$)

Exemple. $\sum \frac{1}{n}$ n'est pas convergente, même si $\left(\frac{1}{n}\right) \to 0$ (aussi $\frac{1}{n!}$).

La raison est assez simple :

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots =$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)}_{> 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}} + \underbrace{\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right)}_{> 4 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{2}} + \underbrace{\left(\frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{16}\right)}_{> 8 \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{2}} + \cdots\cdots$$

le plus petit

nombre de termes dedans le parentese

le plus petit

nombre de termes

le plus petit

nombre de termes

$$> 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots\cdots = \infty .$$

On dit qu'une série $\sum u_n$ est <u>absolument convergente</u> si $\sum |u_n|$ est convergente.

(2) Si $\sum u_n$ est absolutement convergente, elle est aussi convergente.

<u>Exemple</u>. $\sum \frac{(-1)^n}{n!}$ est convergente parce que elle est absolutement convergente :

$$\sum \left| \frac{(-1)^n}{n!} \right| = \sum \frac{1}{n!}$$ qui converge vers e.

(3) Si $(u_n) \to 0$ et elle est décroissante, alors la série $\sum (-1)^n u_n$ est convergente.

Exemple. $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ est convergente parce que $\left(\frac{1}{n}\right) \to 0$ et décroissante.

Pareil avec $\sum \frac{(-1)^n}{n^3}$, $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt[5]{n}}$, $\sum \frac{(-1)^n}{n^5+33n^2+8}$, ...

(4) Critère de comparaison des séries.

Si $0 \leq u_n \leq v_n$ deux suites à termes positifs. Alors

- Si $\sum v_n$ convergente, alors $\sum u_n$ convergente
- Si $\sum u_n$ n'est pas convergente, alors $\sum v_n$ n'est plus.

Exemple. On a vu que $\sum \frac{1}{n}$ n'est pas convergente. Pour $n > 1$, on a que $\sqrt{n} \leq n$, c.a.d. $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$, donc par le critère de comparaison, $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ n'est pas sommable.

Ce critère est très utile. Bon à savoir pour comparer :

$$\boxed{\sum \frac{1}{n^p} \text{ convergente} \iff p > 1}$$

Autre chose importante à prendre en compte est que ce qui passe pour les premiers termes d'une suite n'influence pas sa convergence : l'essentiel est ce qui se passe quand n devient très grand.

Exemple. $\sum \frac{1}{n^2 - 80n - 1500}$ convergente ?

On a que $n^2 \leq 2(n^2 - 80n - 1500) = 2n^2 - 160n - 3000$ quand n est très très grande (parce que $n^2 \geqslant 160n + 3000$ quand n est $500M$, par exemple). Donc

$$\frac{1}{n^2 - 80n - 1500} \leq \frac{2}{n^2} \quad \text{quand } n \text{ grand}$$

Comme $\sum \frac{2}{n^2} = 2 \cdot \sum \frac{1}{n^2}$ convergente, aussi $\sum \frac{1}{n^2 - 80n - 1500}$.

Exemple. $\sum \frac{5n + 700}{n^3}$ convergente ?

Quand n devient très grand, $700 \leq n$, c.a.d. $700n^2 \leq n^3$,

c.a.d $5n^3 + 700n^2 \leq 6n^3$, c.a.d.

$$\frac{5n + 700}{n^3} \leq \frac{6}{n^2} \quad \text{pour } n \text{ grand}$$

Comme $\sum \frac{6}{n^2} = 6 \cdot \sum \frac{1}{n^2}$ convergente, aussi $\sum \frac{5n+700}{n^3}$.

Exemple. $\sum \frac{|\cos(n)|}{n^2}$ convergente ?

Comme $|\cos(n)| \leq 1$, alors $\frac{|\cos(n)|}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$, Donc

$\sum \frac{|\cos(n)|}{n}$ aussi convergente.

(5) Critère de comparaison par passage à la limite.

Soient (u_n), (v_n) deux suites à termes positifs. Si

- Si $\left(\frac{u_n}{v_n}\right) \to a$, $0 < a < \infty$, alors

$$\sum u_n \text{ convergente} \iff \sum v_n \text{ convergente.}$$

- Si $\left(\frac{u_n}{v_n}\right) \to 0$, alors

$$\sum v_n \text{ convergente} \Rightarrow \sum u_n \text{ convergente} \quad \left(\text{mais } \not\Leftarrow \text{ en général}\right)$$

- Si $\left(\frac{u_n}{v_n}\right) \to \infty$ diverge, alors

$$\sum u_n \text{ converg} \Rightarrow \sum v_n \text{ converg} \quad \left(\text{mais } \not\Leftarrow \text{ en général}\right)$$

<u>Exemple</u>. $\sum \frac{1}{n+12}$ convergente ?

On peut la comparer avec $\sum \frac{1}{n}$:

$$\frac{\frac{1}{n+12}}{\frac{1}{n}} = \frac{n}{n+12} \longrightarrow 1 \quad , .$$

Comme $\sum \frac{1}{n}$ n'est pas convergente, $\sum \frac{1}{n+12}$ non plus.

<u>Exemple</u>. $\sum \frac{1}{n^5 - n^4 - n^3 - n^2 - n - 1}$ convergente ?

On peut la comparer avec $\sum \frac{1}{n^5}$:

$$\frac{\frac{1}{n^5 - n^4 - n^3 - n^2 - n - 1}}{\frac{1}{n^5}} = \frac{n^5}{n^5 - n^4 - n^3 - n^2 - n - 1} \longrightarrow 1.$$

Comme $\sum \frac{1}{n^5}$ convergente, $\sum \frac{1}{n^5 - n^4 - n^3 - n^2 - n - 1}$ aussi.