Calculer $\operatorname{Ker} f$, $\operatorname{Col}(A)$, $\cap$ ....

Si $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$, on considère l'application linéaire $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ définie par $f(v) = Av$.

- Si $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, $\dots$, $v_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, alors les colonnes de A sont justement les valeurs de $f(v_1), \dots, f(v_n)$.

$$A = \begin{pmatrix} f(v_1) & f(v_2) & \cdots & f(v_n) \end{pmatrix}$$

- Le noyau $\operatorname{Ker} f$ est l'espace de solutions de l'équation $AX = 0$.
- L'image $\operatorname{Im} f$, ou l'espace de colonnes $\operatorname{Col}(A)$, est le sousespace engendré par les vecteurs $f(v_1), \dots, f(v_n) \in \mathbb{R}^m$

- Le rang de A est le nombre de lignes $\neq 0$ dans la matrice échelonnée

Autrement dit, le rang de A est le nombre de pivots dans le matrice échelonnée

On a :

$$\boxed{\dim\left(\mathrm{Col}(A)\right) = \mathrm{rang}(A)}$$

$$n = \dim\left(\ker f\right) + \dim\left(\mathrm{Col}(A)\right),$$ c'est-à-dire

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{nb. de}\\ \text{colonnes}\\ \text{de } A\end{array} = \dim \ker f + \mathrm{rang}(A)}$$

Comment calculer $\ker f$, $\mathrm{Col}(A)$?

$$\left(A \mid I\right) \xrightarrow{\text{échelonner}} \left(B \mid T\right)$$

on rajoute la matrice identité

B a des lignes avec des zéros

$$(B \mid T) = \left(\begin{array}{c|c} C & T_1 \\ \hline \begin{matrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{matrix} & T_2 \end{array}\right),$$

c.a.d.

$$B = \left(\begin{array}{c} C \\ \hline \begin{matrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{matrix} \end{array}\right)$$

et $T = \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \end{pmatrix}$.

$*$ (Calculer $\ker f$) = (Calculer des solutions de $AX=0$)

= (Calculer des solutions de $CX=0$).

C est une matrice plus facile !!

$*$ (Calculer des solutions de $AX=b$, $b \in \mathbb{R}^m$) =

= (Calculer des solutions de $BX = T\cdot b$)

comme B est échelonné, ce système est facile.

$*$ (Calculer $\mathrm{Col}(A)$) = (Calculer des solutions de $T_2 X = 0$.)

$*$ Si $V = \{$solutions de $A_1 X = 0\}$ et $W = \{$solutions de $A_2 X = 0\}$,

alors $V \cap W = \left\{ \text{solutions de } \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} X = 0 \right\}$.

c.a.d., les solutions des deux systèmes d'eq.

* Si V est le sousespace engendré par $v_1, \dots, v_r \in \mathbb{R}^n$, et W est le sousespace engendré par $w_1, \dots, w_s \in \mathbb{R}^n$, alors $V + W$ est engendré par $v_1, \dots, v_r, w_1, \dots, w_s \in \mathbb{R}^n$.

* Trouver une base de $Col(A)$ = prendre les vecteurs $f(v_i)$ (c.a.d. les colonnes de A) qui correspondent aux les colonnes de B (la matrice échelonné) où se trouvent les pivots.

* Augmenter la base de $Col(A)$ précedente à une base de $\mathbb{R}^m$ = = échelonner la matrice $(B \mid I)$ (et pas uniquement A) et prendre les colonnes de I où la version échelonnée a ses pivots.

* Si $V = \{\text{solutions de } AX = 0\} \subset \mathbb{R}^n$ et $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, alors $b + V$ est donné par les solutions du système $AX = Ab$.