Exo 5 feuille 4 (preuve plus correcte)

$$u_n = \sqrt[n]{a} = a^{1/n}$$

$\boxed{\text{Si } a > 1}$:

$$a > 1 \Rightarrow \underline{u_n} = a^{1/n} > 1^{1/n} = \underline{1}$$

Soit $v_n = u_n - 1 > 0$, c.a.d. $a^{1/n} = u_n = 1 + v_n$, c.a.d. $\underline{\underline{a = (1+v_n)^n}}$

Rappel : Quelque soit $x > 0$, on a

$$\underline{\underline{(1+x)^n}} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i \geqslant \sum_{i=0}^{1} \binom{n}{i} x^i = \underline{\underline{1 + nx}}$$

Pour $x = v_n$, on a

$$a = (1+v_n)^n \geqslant 1 + n v_n \quad , \quad \text{c.a.d} \quad 0 \leq v_n \leq \frac{a-1}{n} \xrightarrow{n \to \infty} 0$$

Notre astuce $\Rightarrow$ $(v_n) \to 0$, alors $(u_n) = (v_n + 1) \to 0 + 1 = 1$.

$\boxed{\text{Si } 0 < a < 1}$. Soit $b := \frac{1}{a} > 1$, Alors

$$\left(a^{1/n}\right) = \left(\frac{1}{b^{1/n}}\right) \longrightarrow \frac{1}{1} = 1.$$

Règles de calcul