Exo 2 et 3.(b) - Feuille 5

On définit une suite (u_n) comme : u_0, un nombre donné ; $u_0 \geq -2$, et pour $n \geq 0$,

$$u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$$

Il s'agit d'étudier la suite : c'est à dire

(a) bien définie
(b) Majorée / minorée / bornée
(c) Monotonie
(d) Convergence
(e) Limite

On a déjà étudié des suites définies par "récurrence linéaire" ; u_0 et u_1 sont donnés et on engendre la reste de termes comme

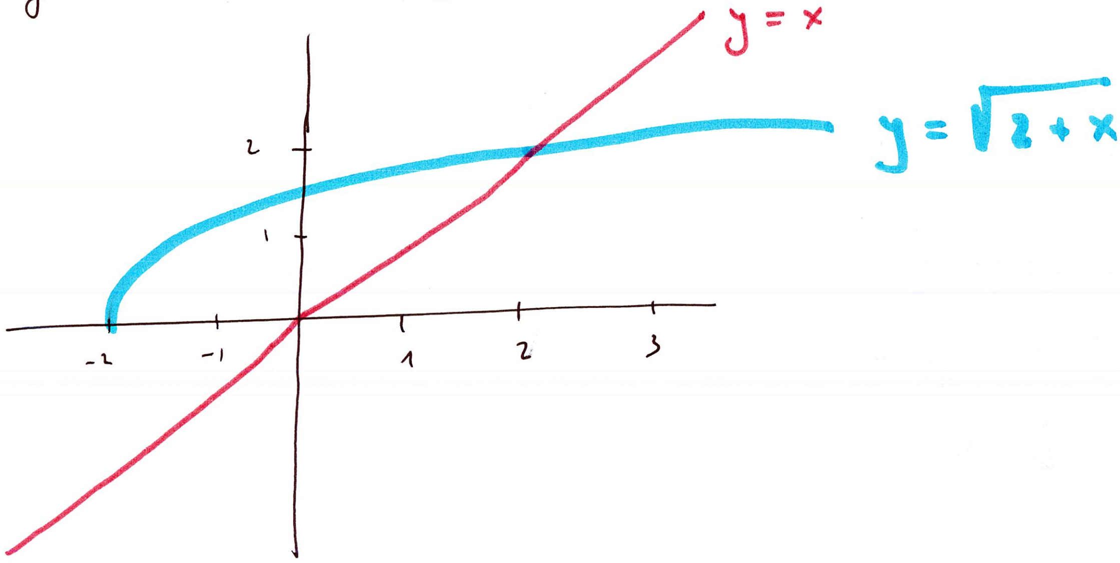
$$u_{n+2} = a \cdot u_{n+1} + b \cdot u_n \quad , \ n \geq 0 \ , \ a,b \in \mathbb{R}$$

J'ai mis en ligne un document qui explique comment calculer le terme général de telle suite. Maintenant le problème est un peu différent : on a qu'un terme initial u_0, et l'expression pour u_{n+1}

peut être n'importe quelle fonction $f(x)$. Donc : on commence avec une fonction $f(x)$ (ici, $f(x) = \sqrt{2+x}$) et on engendre la suite comme

$$u_{n+1} = f(u_n) .$$

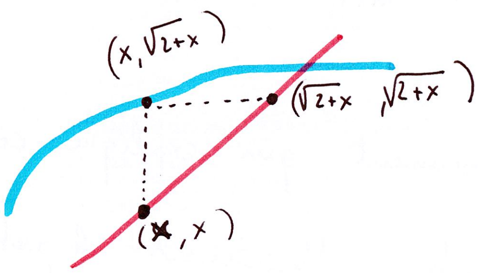
La première etape est toujour faire un dessin de la graphique de f, où je vais rajoutter la droite $y = x$:



Je vais mettre les valeurs de le suite $u_{n+1} = f(u_n)$ dans la droite rouge.

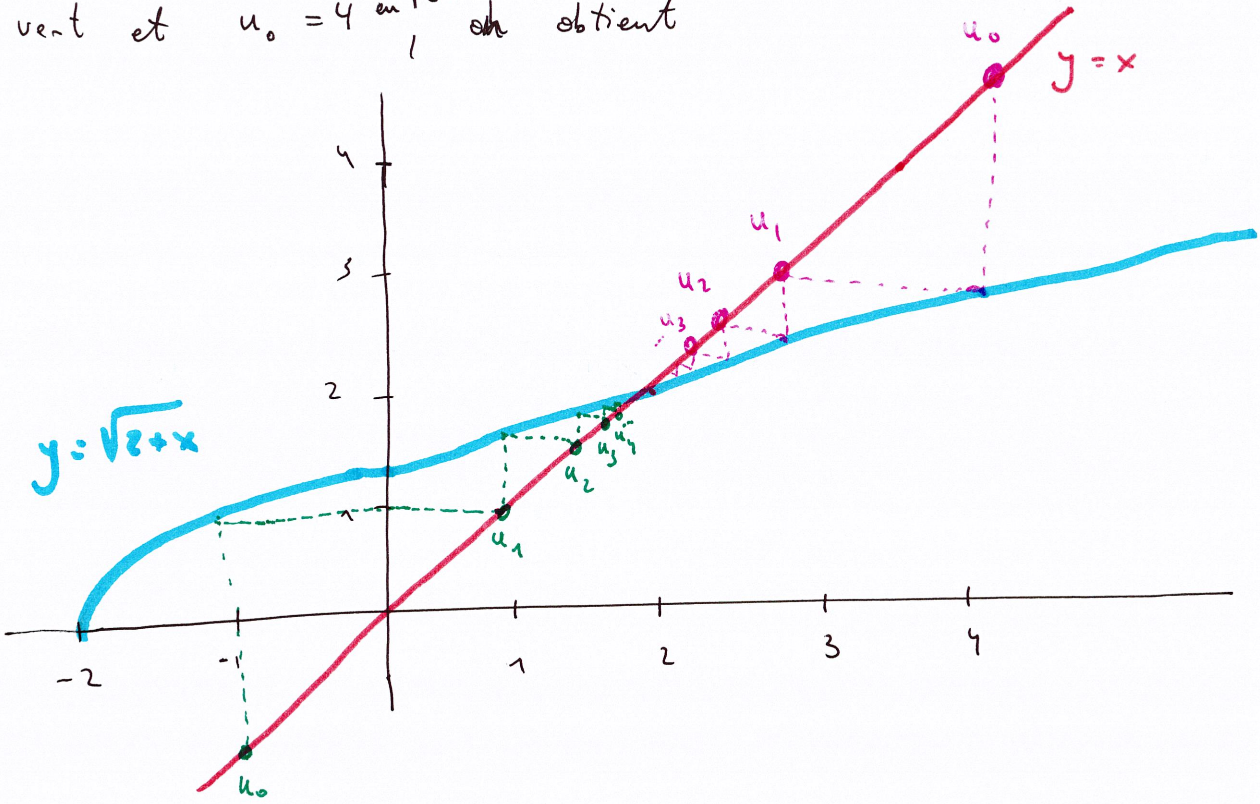
Rappelez qu'un point sur le graphique bleue a coordonés $(x, \sqrt{2+x})$.

Donc : regardez que



Du coup on peut obtenir le suite à partir de la première coordoné des points sur la droite rouge.

À la fin, on obtient une sorte d'escalier. Par exemple, pour $u_0 = -1$ en vert et $u_0 = 4$ en rose, on obtient



Ainsi, le dessin peut nous aider beaucoup: on voit que pour $u_0 = -1$ et $u_0 = 4$, la suite converge vers 2. Pour $u_0 = -1$, elle est croissante, alors que pour $u_0 = 4$, elle est décroissante. Pour $u_0=-1$, majorée par 2; pour $u_0=4$, minorée par 2.

On va maintenant voir ces propriétés de manière plus précise, mais avec le dessin on déjà sait ce qu'on devrait obtenir.

(a) Bien définie

$u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}$, on peut prendre $\sqrt{\text{quelque chose}}$ si quelque chose ≥ 0.

le, si $u_n \geq -2$. On commence avec $u_0 \geq -2$. Donc $\overset{u_1}{\overset{\shortparallel}{2+u_0}} \geq 0$,

donc $u_1 \geq 0$ toujours. Maintenant $u_2 = \sqrt{\underset{\text{positif}}{2} + \underset{\text{positif}}{u_1}}$, donc on peut aussi prendre $\sqrt{\ }$.

C'est à dire, $2+u_0 \geq 0$ $\forall n$ si $u_0 \geq -2$. Donc la suite est bien définie.

(b) Majorée / minorée / bornée

Si $u_0 = 2$, la suite $u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}$ est la suite constante :

$$(u_n) = (u_0, u_1, u_2, u_3, \dots) = (2, 2, 2, 2, 2, \dots)$$

$$u_0 \to 2, \quad u_1 \to \sqrt{2+2} = 2, \quad u_2 \to \sqrt{2+2} = 2 \quad \dots$$

Dans ce cas là, elle est bornée, constante et du coup convergente vers 2.

Si $u_0 \in [-2, 2)$, on a

$$\left.\begin{aligned} & u_0 < 2 \\ & u_1 = \sqrt{2+u_0} < \sqrt{2+2} = \sqrt{4} = 2 \\ & u_2 = \sqrt{2+u_1} < \sqrt{2+2} = 2 \\ & \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \end{aligned}\right\}$$

Majorée par 2

Mais ~~aussi~~ minorée par -2

$\Rightarrow$ bornée

Si $u_0 \in (2, \infty)$,

$$\left.\begin{aligned} & u_0 > 2 \\ & u_1 = \sqrt{2+u_0} > \sqrt{2+2} = 2 \\ & u_2 = \sqrt{2+u_1} > \sqrt{2+2} = 2 \\ & \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \end{aligned}\right\}$$

Minorée par 2.

(c) Monotonie

Il faut voir si $\underbrace{u_n \geq u_{n+1}}_{\text{décroissant}}$ ou $\underbrace{u_n \leq u_{n+1}}_{\text{croissante}}$.

Pour $u_0 \in [-2, 2)$, on a dit que la suite doit être croissante. Pour montrer

$u_n \leq u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}$, on peut montrer $u_n^2 \leq u_{n+1}^2 = 2+u_n$,

parce que la fonction x^2 est croissante pour $x > 0$.

c.a.d., $u_n^2 - u_n - 2 \leq 0$? On a que

$$u_n^2 - u_n - 2 = \underbrace{(u_n - 2)}_{\substack{\text{toujours } < 0 \\ \text{si } u_n < 2}} \underbrace{(u_n + 1)}_{> 0 \text{ si } u_n > -1}$$

(et c'est toujours le cas pour $n > 0$!)

Donc : $u_n^2 - u_n - 2 < 0$, ie (u_n) croissante.

De la même façon : on voit que (u_n) décroissante pour $u_0 \in (2, \infty)$.

(d) Convergence : Rappellez :

croissante + majorée $\Longrightarrow$ convergente

décroissante + minorée $\Longrightarrow$ convergente.

Donc peut importe la valeur de u_0 : la suite est toujours convergente.

(e) Limite. Rappelez ce que je vous ai explique en cours :

Propriété : Si une suite (x_n) est convergente vers $a \in \mathbb{R}$, et f est une fonction continue, alors la suite $(f(x_n))$ est convergente vers $f(a)$.

Consequence. Si (u_n) est définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ et f est continue, alors la limite de la suite (si elle existe) doit être un point fixe de f, c.a.d. $f(a) = a$.

Donc : la limite de $u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}$ doit être une solution de

$$a = \sqrt{2+a} ,$$

On peut réssoudre la equation comme $a^2 = 2+a \longrightarrow a^2 - a - 2 = 0$

$\rightsquigarrow a = \begin{cases} +2 \\ -1 \end{cases}$. Donc la limite doit être 2 parce que la suite peut pas prendre des valeurs negetifs !