Outils / astuces pour le calcule des limites

(1) Règles avec des suites convergentes :

Si $(u_n) \to a$, $(v_n) \to b$, alors

$(u_n \pm v_n) \longrightarrow a \pm b$

$(u_n \cdot v_n) \longrightarrow a \cdot b$

$\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right) \longrightarrow \dfrac{a}{b}$ (ici $v_n \neq 0 \ \forall n$, $b \neq 0$)

(2) Règles avec 0 et ∞

Soit $k \in \mathbb{R}$:

$\infty \pm k = \infty$, $\infty + \infty = \infty$, $\infty \cdot \infty = \infty$

$$\infty \cdot k = \begin{cases} +\infty & \text{si } k > 0 \\ -\infty & \text{si } k < 0 \\ \text{indétermination} & \text{si } k = 0 \end{cases}$$

, $\dfrac{k}{\infty} = 0$,

(Mais faites attention avec les indéterminations,

$\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, $\dfrac{0}{0}$, $\dfrac{\infty}{\infty}$, 1^∞, 0^∞, ∞^0, ...)

(3) Fractions des polynômes

Si $p(n)$, $q(n)$ sont polynômes, alors pour calculer la limite de $\frac{p(n)}{q(n)}$, il est très souvant utile de diviser le numérateur et le dénominateur par la plus grande puissance de n.

Ex. $$\frac{n^3+5n+7}{2n^3-88n+1} = \frac{\frac{n^3+5n+7}{n^3}}{\frac{2n^3-88n+1}{n^3}} = \frac{1+\frac{5}{n^2}+\frac{7}{n^3}}{2-\frac{88}{n^2}+\frac{1}{n^3}}$$

et comme $\frac{k}{n^p} \to 0$, avec notres règles de calcul on obtient que la limite est $\frac{1}{2}$.

(4) Comparaison de suites

Si (u_n), (v_n) sont suites, $(v_n) \to 0$ et $|u_n| \leq |v_n|$ (pour n grande), alors $(u_n) \to 0$ aussi.

Ex. $\left(\frac{\sin(n)}{n}\right) \to 0$ parce que

$$0 \leq \left|\frac{\sin(n)}{n}\right| = \frac{|\sin(n)|}{n} \leq \frac{1}{n} \to 0.$$

(5) Suites importantes à savoir.

Soit $x \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}$.

- $u_n = x^n$

  - Si $x > 1$, $(x^n) \to \infty$
  - Si $x = 1$, $(x^n) = (1, 1, 1, \dots) \to 1$
  - Si $-1 < x < 1$, $(x^n) \to 0$
  - Si $x \leq -1$, (x^n) ne converge pas.

- $u_n = \dfrac{k^n}{n^k}$

  - Si $k > 1$, $\left(\dfrac{k^n}{n^k}\right) \to \infty$, c.a.d $\left(\dfrac{n^k}{k^n}\right) \to 0$
  - Si $k = 1$, $\dfrac{1}{n} \to 0$
  - Si $k = 0$, $(0, 0, 0, \dots) \to 0$
  - Si $k = -1$, $\dfrac{(-1)^n}{n^{-1}} = (-1)^n \cdot n = (0, -1, 2, -3, \dots)$ ne converge pas
  - Si $k < -1$, $\left(\dfrac{k^n}{n^k}\right)$ ne converge pas, **mais** $\left(\dfrac{n^k}{k^n}\right) \to 0$.

- $u_n = \dfrac{n!}{x^n}$

- Si $x > 0$, alors $\left(\dfrac{n!}{x^n}\right) \to \infty$, c.a.d. $\left(\dfrac{x^n}{n!}\right) \to 0$.

- Si $x < 0$, alors $\left(\dfrac{n!}{x^n}\right)$ ne converge pas, mais $\left(\dfrac{x^n}{n!}\right) \to 0$.

Donc :

$$\boxed{\text{factorielle} \gg \text{exponentielle} \gg \text{polynomiale}}$$