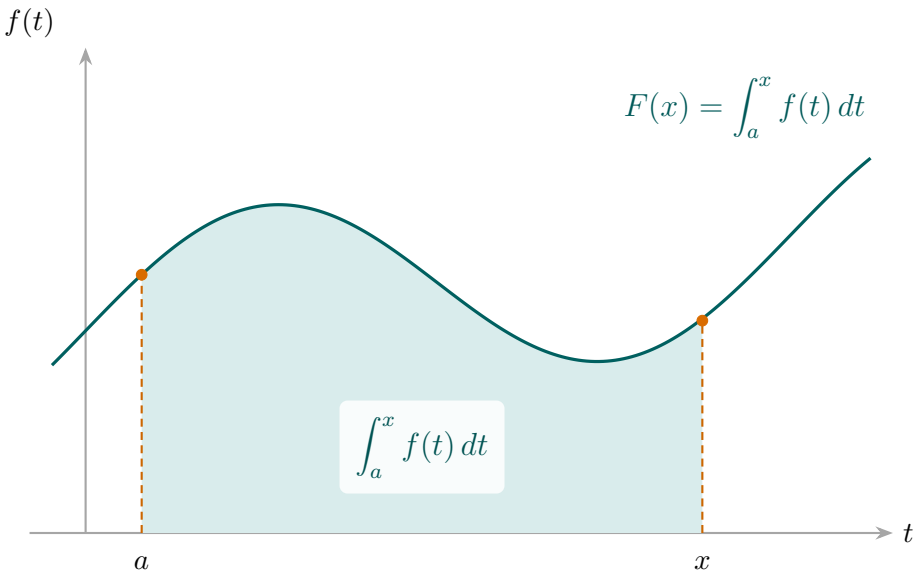
Tema 3: Integración de funciones de una variable

Matemáticas I, Grado en Química, Universidad de la Rioja



Profesor: Jorge Becerra

Curso 2026–2027

Última vez actualizado: 9 de noviembre de 2026

Martes 3 de noviembre

Introducción

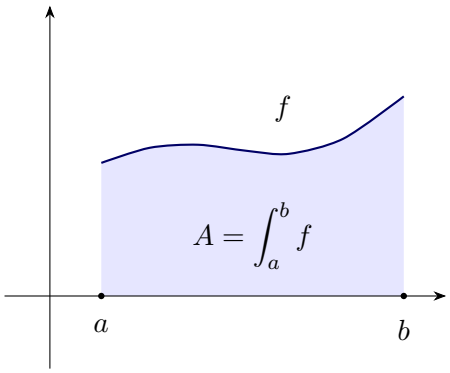
He aquí un vistazo a lo que veremos este tema. ¿Qué es una integral?

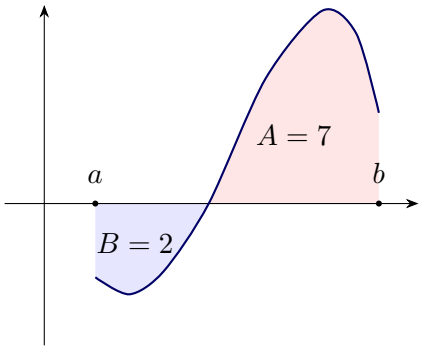
Funciones integrables. Para una función no negativa

$$f\colon [a,b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow [0,\infty) \subset \mathbb{R}$$

integrar es calcular el área subyacente a la gráfica

$$A = \int_a^b f.$$





Para funciones generales (positivas, negativas o con parte positiva y parte negativa)

$$f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

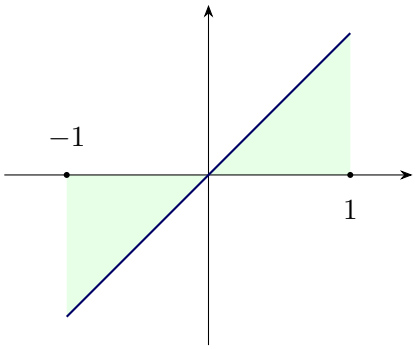
la integral mide cuánta área hay por encima del eje X menos cuánta área hay por debajo. En la figura de la izquierda la integral mide $\int_a^b f = 7 - 2 = 5$.

Las integrales pueden salir negativas o cero aunque la función no sea la función cero. Por ejemplo, la función

$$f\colon [-1,1] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad , \quad f(x) = x$$

verifica

$$\int_{-1}^0 f = -\frac{1}{2}, \qquad \int_0^1 f = \frac{1}{2}, \qquad \int_{-1}^1 f = 0.$$



Pero, ¿cómo se define la integral?. Por definición, si $f\colon [a,b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función constante, $f(x) = c$ para todo $x \in [a,b]$, entonces la integral de f en $[a,b]$ es fácil de definir:

$$\int_a^b f \;=\; c \cdot (b-a)$$

que es un número positivo, negativo o cero según sea c. Pero, ¿qué pasa en general? ¿Cómo se define la integral de la función $\operatorname{sen}(x)$, $\ln(x^2 - 5x + 3)$, etc?

Integración de funciones

Empezamos con las funciones más sencillas: funciones constantes a trozos.

Definición

(1) Una *partición* de $[a, b]$ es una colección finita de puntos $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$. Suele escribirse

$$P = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b\}.$$

(2) Una *función escalonada* (asociada a esa partición) es una función que es constante en cada intervalo (x_{k-1}, x_k) de la partición

En otras palabras, una función escalonada es una función en $[a, b]$ definida a trozos según los intervalos que determina la partición, por ejemplo

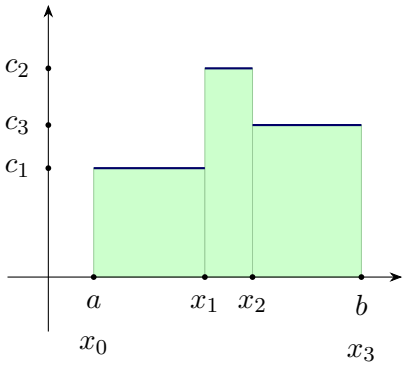
$$f(x) = \begin{cases} c_1 & \text{si } x \in [x_0, x_1), \\ c_2 & \text{si } x \in [x_1, x_2), \\ \vdots & \\ c_{n-1} & \text{si } x \in [x_{n-2}, x_{n-1}), \\ c_n & \text{si } x \in [x_{n-1}, x_n]. \end{cases}$$

(el valor en los extremos puede ser $f(x_k) = c_k$ o bien $f(x_k) = c_{k+1}$, todas las posibilidades son funciones escalonadas).

La integral para funciones escalonadas se define como

$$\int_a^b f = c_1(x_1 - x_0) + c_2(x_2 - x_1) + \cdots + c_n(x_n - x_{n-1}).$$

Es decir, $\int_a^b f$ es el área debajo de la función f (cuando $c_k < 0$, ésta cuenta de forma negativa).



Ejercicio

Comprobar que si f, g son funciones escalonadas, y $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces $\lambda \cdot f$ y $f+g$ son funciones escalonadas, y se cumple que

$$\int_a^b \lambda \cdot f = \lambda \cdot \int_a^b f$$

y

$$\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$$

Ejercicio

Probar que para funciones escalonadas, la integral es *monótona*: si $f \leq g$ (es decir, $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in [a,b]$), comprobar que

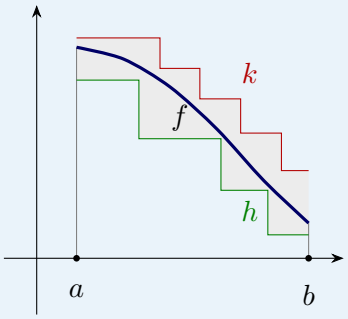
$$\int_a^b f \leq \int_a^b g,$$

Veamos ahora qué pasa con otro tipo de funciones. En general, habrá funciones para las cuales podremos definir su integral, y otras que no. Así que empecemos viendo para qué clase de funciones podremos definir su integral.

Definición

Sea $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función acotada, es decir, existe $M > 0$ que verifica $|f(x)| < M$ para todo $x \in [a,b]$. Se dice que f *Riemann-integrable* o $\mathcal{R}$-integrable (o integrable en el sentido de Riemann) en $[a,b]$ si para todo $\varepsilon > 0$ existen funciones escalonadas h, k en $[a,b]$ tales que

a) $h \leq f \leq k$ b) $\int_a^b (k-h) < \varepsilon$



Es decir, f es Riemann-integrable si f está encajada entre funciones escalonadas cuya diferencia en área es tan pequeña como se quiera.

Ejemplo

Cualquier función escalonada en es Riemann integrable: si f es escalonada se eligen $h = k = f$ que verifican los apartados a) y b) anteriores.

Algunas funciones Riemann-integrables

Sea $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función real.

1. Si f es monótona (es decir, creciente o decreciente), entonces f es Riemann-integrable.
2. Si f es continua, entonces f es Riemann-integrable.

¡OJO! No todas las funciones son Riemann-integrables. Hay funciones que no se pueden integrar.

Ejemplo

La *función de Dirichlet* $f : [0,1] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{Q} \\ 1, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

no es Riemann-integrable. Para comprobarlo basta observar que si h y k son funciones escalonadas en $[0,1]$ y verifican $h \leq f \leq k$ entonces deben cumplir $h \leq 0$ y $1 \leq k$. Por tanto

$$\int_0^1 (k-h) \geq \int_0^1 1 = 1$$

de modo que f no es Riemann-integrable.

Miércoles 4 de noviembre

Empecemos con un ejemplo de una función que no es continua pero sí es Riemann-integrable.

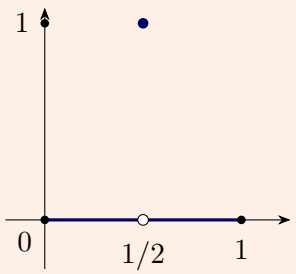
Ejemplo

La función $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 1/2 \\ 1, & x = 1/2 \end{cases}$$

es Riemann-integrable. Para esta función se eligen $h = 0$ y

$$\begin{array}{rccl} k\colon [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} & \\ x & \longmapsto & k(x) = \begin{cases} 1 & x \in \left[\frac{1}{2} - \frac{\varepsilon}{4}, \frac{1}{2} + \frac{\varepsilon}{4}\right] \\ 0 & \text{resto} \end{cases} \end{array}$$



que verifican $h \leq f \leq k$ y además

$$\int_0^1 (k - h) \;=\; \int_0^1 k \;=\; \varepsilon/2 < \varepsilon$$

La misma idea sirve para probar que son Riemann-integrables funciones que son constantes en un intervalo salvo en una cantidad finita de puntos en los que la función toma valores arbitrarios.

Si f es Riemann-integrable, para cualquier $\varepsilon > 0$ (tan pequeño como se quiera), hay funciones escalonadas $h \leq f \leq k$ tal que

$$\int_a^b h \leq \int_a^b k$$

(por monotonía) y

$$\int_a^b k \leq \varepsilon + \int_a^b h$$

(por la propiedad de ser Riemann-integrable. Por tanto, existe un único número real I tal que

$$\int_a^b h \;\leq\; I \;\leq\; \int_a^b k$$

para todas las funciones escalonadas h, k en $[a,b]$ con $h \leq f \leq k$.

Definición

A ese número I se le llama *integral de* f y se denota

$$I = \int_a^b f.$$

Se puede extender la definición de función Riemann-integrable, y la integral, a funciones no acotadas y funciones definidas en un intervalo no acotado como $[a, \infty)$ o $(-\infty, a]$, pero la definición se vuelve más técnica y no lo haremos en este curso.

Propiedades de la integral

Si f y g son Riemann-integrables en $[a, b]$, se verifica:

1. Para cada $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \cdot f$ es Riemann-integrable y
$$\int_a^b \lambda \cdot f = \lambda \cdot \int_a^b f$$
2. $f + g$ y $f \cdot g$ son Riemann-integrable, y además se tiene
$$\int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g.$$
(sin embargo $\int_a^b (f \cdot g)$ es en general diferente a $(\int_a^b f) \cdot (\int_a^b g)$.
3. La integral es monótona: si $f \leq g$, entonces
$$\int_a^b f \leq \int_a^b g$$
4. Se tiene la *desigualdad triangular*
$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|$$
5. Dado $a < c < b$, se tiene
$$\int_a^b f = \int_a^c + \int_c^b f.$$
6. Se tiene que
$$\int_a^a f = 0.$$

Ya sabemos qué funciones tienen integral, qué es la integral de una función integrable, sus propiedades, ¡pero aún no hemos dicho cómo calcularla!

Teorema fundamental del cálculo

Sea $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función Riemann-integrable, y consideremos $F : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función "acumular área",

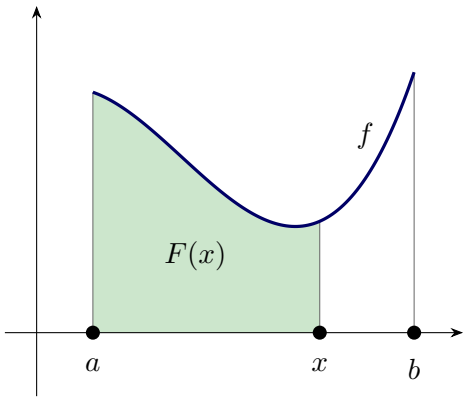
$$F(x) = \int_a^x f.$$

Entonces

1. F es continua en $[a, b]$,
2. Si f es continua en $c \in [a, b]$, entonces F es derivable en c y se cumple que

$$F'(c) = f(c).$$

Este teorema relaciona el cálculo diferencial con el cálculo integral (es decir, el cálculo de áreas): la derivada de la función acumular áreas es la función original.



Definición

Dadas funciones $f, F : [a, b] \to \mathbb{R}$, y F es diferenciable, se dice que F es una *primitiva* de f si $F' = f$.

La primitiva de una función no es única: si F es una primitiva de f, y $c \in \mathbb{R}$, entonces $F + c$ también es una primitiva de f. Más aún: si F y G son primitivas de f, entonces debe existir un $c \in \mathbb{R}$ tal que $F = G + c$, porque $(F - G)' = F' - G' = 0$.

El apartado 2. del teorema fundamental del cálculo, por otra parte, dice que si f es continua en $[a, b]$, entonces tiene una primitiva, que es la función "acumular áreas" $F(x) = \int_a^x f$. Por tanto también es una primitiva la función $F(x) = 33 + \int_a^x f$.

El cálculo de primitivas permite de una manera fácil realizar el cálculo de áreas:

Regla de Barrow

Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es Riemann-integrable, y F es una primitiva de f, entonces

$$\int_a^b f = F(b) - F(a).$$

Veamos por qué. Escribamos $G(x) = \int_a^x f$ para la función "acumular áreas". Como F y G son dos primitivas de f, por lo dicho anteriormente $F = G + c$ para un cierto $c \in \mathbb{R}$. Como

$$G(a) = \int_a^a f = 0$$

tenemos

$$F(a) = G(a) + c = 0 + c = c,$$

y por otra parte

$$F(b) = G(b) + c.$$

Si restamos $F(b) - F(a)$, la constante c se cancela:

$$F(b) - F(a) = (G(b) + c) - c = G(b) = \int_a^b f$$

OJO

Errores comunes a evitar:

1. Hemos visto que las funciones continuas tienen primitiva (el teorema fundamental del cálculo), pero hay funciones no continuas que tienen primitiva.
2. Que una función sea Riemann-integrable no significa que tenga primitiva! Por ejemplo, hay funciones que tienen discontinuidades de salto que son Riemann-integrable pero no tienen primitiva. Por tanto, hay funciones para las que $\int_a^b f$ existe pero no se puede calcular mediante la regla de Barrow!
3. Hay funciones Riemann-integrables que tienen primitiva, pero que su primitiva no se puede expresar en términos de funciones elementales (senos, cosenos, logaritmos, exponenciales, polinomios, etc). Por tanto, la integral de estas funciones tampoco se puede calcular mediante la regla de Barrow! Por ejemplo, este es el caso de las inofensivas funciones $\operatorname{sen}(x^2)$, $e^x \operatorname{tg}(x)$, o e^{-x^2}, entre muchas otras.

Lunes 9 de noviembre

Cálculo de primitivas

Para calcular derivadas en el tema anterior, la tabla de las derivadas, las reglas de la suma, producto y cociente, y la regla de la cadena, nos permitieron calcular las derivadas de cualquier función elemental. Sin embargo, el cálculo de primitivas de funciones elementales es muchísimo más complejo, un "arte". Para empezar, como hemos dicho antes, hay funciones que pese a ser integrables no tienen una primitiva que pueda expresarse como suma, resta, cociente y composición de funciones elementales. Para cuando sí existe, no hay un único procedimiento, así que veremos distintos métodos de integración.

Definición

Al conjunto de primitivas de una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ se denota como

$$\int f(x)dx$$

y se llama *integral indefinida* de f.

Es decir, si F es *una* primitiva de f, entonces $\int f(x)dx$ denota el *conjunto* de todas las funciones de la forma $F + c$ donde $c \in \mathbb{R}$. El nombre proviene, por supuesto, del teorema fundamental del cálculo,

(1) Fórmulas básicas de integración

Para $u = u(x)$ una función, tenemos las siguientes fórmulas básicas:

(1) $\displaystyle\int u^n u'\,dx = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1)$

(2) $\displaystyle\int \frac{u'}{u}\,dx = \ln|u| + C$

(3) $\displaystyle\int e^u u'\,dx = e^u + C$

(4) $\displaystyle\int a^u u'\,dx = \frac{1}{\ln a}a^u + C \quad (a > 0)$

(5) $\displaystyle\int (\operatorname{sen} u)u'\,dx = -\cos u + C$

(6) $\displaystyle\int (\cos u)u'\,dx = \operatorname{sen} u + C$

(7) $\displaystyle\int \frac{u'}{\cos^2 u}\,dx = \int (1 + \operatorname{tg}^2 u)u'\,dx = \operatorname{tg} u + C$

(8) $\displaystyle\int (\operatorname{cosec}^2 u)u'\,dx = -\operatorname{cotg} u + C$

(9) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} u}{\cos^2 u}u'\,dx = \sec u + C$

(10) $\displaystyle\int \frac{\cos u}{\operatorname{sen}^2 u}u'\,dx = -\operatorname{cosec} u + C$

(11) $\displaystyle\int (\operatorname{tg} u)u'\,dx = -\ln|\cos u| + C$

(12) $\displaystyle\int (\operatorname{cotg} u)u'\,dx = \ln|\operatorname{sen} u| + C$

(13) $\displaystyle\int \frac{u'}{u^2 + a^2}\,dx = \frac{1}{a}\operatorname{arc\,tg}\frac{u}{a} + C$

(14) $\displaystyle\int \frac{u'}{u^2 - a^2}\,dx = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + C$

(15) $\displaystyle\int \frac{u'}{\sqrt{u^2 \pm a^2}}\,dx = \ln|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}| + C$

(16) $\displaystyle\int \frac{u'}{\sqrt{a^2 - u^2}}\,dx = \operatorname{arc\,sen}\frac{u}{a} + C$

(17) $\displaystyle\int (\operatorname{senh} u)u'\,dx = \cosh u + C$

(18) $\displaystyle\int (\cosh u)u'\,dx = \operatorname{senh} u + C$

Cada una de estas fórmulas puede verificarse derivando el segundo miembro y comprobando que coincide con la función la cual se quiere obtener la primitiva. Observar que si $u(x) = x$ obtenemos las fórmulas básicas que se suelen dar en bachillerato.

En la mayoría de los casos, la integral que debemos calcular no encaja en ninguna de estas fórmulas básicas. Hay unas cuantas técnicas que nos permiten transformar una integral en una combinación de integrales básicas. Algunos ejemplos:

Ejemplo

Separar el numerador:

$$\int \frac{x+1}{x^2+1}\,dx = \int \frac{x}{x^2+1}\,dx + \int \frac{1}{x^2+1}\,dx \quad \text{(Tipos (2) y (13))}.$$

Ejemplo

Dividir si en una función racional el grado del polinomio del numerador es mayor o igual que el del denominador:

$$\int \frac{x^2}{x^2+1}\,dx = \int \Big(1 - \frac{1}{x^2+1}\Big)\,dx \quad \text{(Tipos (1) y (13))}.$$

Ejemplo

Sumar y restar términos en el numerador:

$$\int \frac{2x}{x^2+2x+1}\,dx = \int \frac{2x+2-2}{x^2+2x+1}\,dx = \int \frac{2x+2}{x^2+2x+1}\,dx - \int \frac{2}{(x+1)^2} \quad \text{(Tipos (2) y (1))}.$$

Ejemplo

Usar identidades trigonométricas:

$$\int \operatorname{tg}^2 x\,dx = \int (\sec^2 x - 1)\,dx \quad \text{(Tipos (7) y (1))}.$$

Ejemplo

Multiplicar y dividir por un factor adecuado:

$$\int \frac{1}{1+\operatorname{sen} x}\,dx = \int \Big(\frac{1}{1+\operatorname{sen} x}\Big)\Big(\frac{1-\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen} x}\Big)\,dx = \int \frac{1-\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen}^2 x}\,dx =$$

$$= \int \frac{1-\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}\,dx = \int \sec^2 x\,dx - \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}\,dx \quad \text{(Tipos (7) y (9))}.$$

Para integrar productos de senos y cosenos,

$$\int \operatorname{sen}(mx)\cos(nx)\,dx, \quad \int \operatorname{sen}(mx)\operatorname{sen}(nx)\,dx, \quad \int \cos(mx)\cos(nx)\,dx, \quad \text{con} \quad m, n \in \mathbb{R},$$

se pueden utilizar las identidades trigonométricas

$$2\,\mathrm{sen}\,(mx)\cos(nx) = \mathrm{sen}\,\big((m-n)x\big) + \mathrm{sen}\,\big((m+n)x\big),$$

$$2\,\mathrm{sen}\,(mx)\,\mathrm{sen}\,(nx) = \cos\big((m-n)x\big) - \cos\big((m+n)x\big),$$

$$2\cos(mx)\cos(nx) = \cos\big((m-n)x\big) + \cos\big((m+n)x\big)$$

y obtenemos una suma de integrales básicas de los Tipos (5) y (6).

Ejemplo

Hallar $\int \mathrm{sen}\,(\frac{7x}{5})\cos(9x)\,dx$.

$$\int \mathrm{sen}\left(\frac{7x}{5}\right)\cos(9x)\,dx = \frac{1}{2}\int\left[\mathrm{sen}\left(\left(\frac{7}{5}+9\right)x\right) + \mathrm{sen}\left(\left(\frac{7}{5}-9\right)x\right)\right]dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{5}{52}\cos\left(\frac{52x}{5}\right) + \frac{1}{2}\frac{5}{38}\cos\left(-\frac{38x}{5}\right) + C.$$

(2) Integración por partes

Esta técnica se basa en la fórmula de derivación de un producto,

$$\int u(x)v'(x)\,dx \;=\; u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\,dx$$

(viene de $(uv)' = uv' + vu'$). Se suele escribir

$$\int u\,dv \;=\; u\cdot v - \int v\,du.$$

donde $du = u'(x)\,dx$ y $dv = v'(x)\,dx$ (esto es una regla notacional).

Reglas mnemotécnicas (elige tu favorita):

- Un Día Vi Una Vaca Vestida De Uniforme
- Un Día Vi Un Valiente Soldadito Vestido De Uniforme
- Un Día Vi Un Viajero Sobre su Volkswagen De Uranio
- Unamuno dice verdades: una verdad menos integra verdaderas dudas universales

La fórmula de integración por partes expresa la integral original en términos de otra integral. Su aplicación tendrá interés cuando la segunda integral resulte más sencilla que la primera. Esta fórmula es aplicable a una gran variedad de problemas y es particularmente útil para integrandos que contengan productos de funciones.

Ahora bien, ¿cómo elegir qué es u y qué es dv? Es recomendable, como regla general, elegir u de acuerdo al siguiente orden (ALPES):

A – Arcotrigonométricas: Funciones trigonométricas inversas como $\arcsin(x)$, $\arccos(x)$, etc.

L – Logarítmicas: Funciones como $\ln(x)$, $\log_a(x)$.

P – Polinomios: Polinomios y expresiones algebraicas como x^2, $3x+1$, $\sqrt{x}$.

E – Exponenciales: Funciones como e^x, 2^x.

S – Seno / Coseno: Funciones trigonométricas directas como $\sin(x)$, $\cos(x)$, $\tan(x)$.

La función que aparezca primero en esta lista se elige como u, y el resto del integrando se asigna a dv.

Ejemplo

Hagamos $\int x\ln(x)\,dx$. Como **L**ogaritmo viene antes que **P**olinomio, entonces

$$\int x\ln(x)\,dx = \left\{\begin{matrix} u=\ln x; & du=\frac{1}{x}\,dx \\ dv=x\,dx; & v=\frac{x^2}{2}\end{matrix}\right\} = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}\,dx$$
$$= \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\int x\,dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + C$$

Ejemplo

Hallar $\int \operatorname{arc\,sen} x\,dx$.

$$\int \operatorname{arc\,sen} x\,dx = \left\{\begin{matrix} u=\operatorname{arc\,sen} x; & du=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx \\ dv=dx; & v=x\end{matrix}\right\} =$$

$$= x\operatorname{arc\,sen} x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = x\operatorname{arc\,sen} x + \sqrt{1-x^2} + C.$$

Aquí un ejemplo donde una primitiva puede calcularse aplicando integración por partes dos veces seguidas.

Ejemplo

Hallar $\int (x^2+5x+6)\cos(2x)\,dx$.

$$\int (x^2+5x+6)\cos(2x)\,dx = \left\{\begin{matrix} u=x^2+5x+6; & du=(2x+5)dx \\ dv=\cos(2x)dx; & v=\frac{1}{2}\operatorname{sen}(2x)\end{matrix}\right\} =$$

$$= \frac{1}{2}(x^2+5x+6)\operatorname{sen}(2x) - \frac{1}{2}\int (2x+5)\operatorname{sen}(2x)\,dx = \left\{\begin{matrix} u=2x+5; & u'=2 \\ v'=\operatorname{sen}(2x); & v=-\frac{1}{2}\cos(2x)\end{matrix}\right\} =$$

$$= \frac{1}{2}(x^2+5x+6)\operatorname{sen}(2x) - \frac{1}{2}\Big[-\frac{1}{2}(2x+5)\cos(2x) + \int \cos(2x)\,dx\Big] =$$

$$= \frac{1}{2}(x^2+5x+6)\operatorname{sen}(2x) + \frac{1}{4}(2x+5)\cos(2x) - \frac{1}{4}\operatorname{sen}(2x) + C.$$

Aquí un ejemplo donde haciendo integración por partes dos veces nos devuelve una expresión idéntica a la original, y por tanto puede resolverse dividiendo entre dos:

Ejemplo

Hallar $\int e^x \cos x \, dx$.

$$\int e^x \cos x \, dx = \left\{ \begin{array}{ll} u = \cos x; & du = -\operatorname{sen} x \, dx \\ dv = e^x \, dx; & v = e^x \end{array} \right\} = e^x \cos x + \int e^x \operatorname{sen} x \, dx$$

$$= \left\{ \begin{array}{ll} u = \operatorname{sen} x; & du = \cos x \, dx \\ dv = e^x \, dx; & v = e^x \end{array} \right\} = e^x \cos x + e^x \operatorname{sen} x - \int e^x \cos x \, dx.$$

Observar que nos aparece, aunque con signo menos, la integral original. Sumando esta integral a ambos lados, obtenemos

$$2 \int e^x \cos x \, dx = e^x (\operatorname{sen} x + \cos x).$$

Por tanto,

$$\int e^x \cos x \, dx = e^x \frac{(\operatorname{sen} x + \cos x)}{2} + C.$$

Ejercicio

Calcular las integrales

$$\int e^{ax} \operatorname{sen} bx \, dx, \quad \int \operatorname{arc\,tg} x \, dx, \quad \int x e^x \, dx, \quad \int x e^x \cos x \, dx.$$