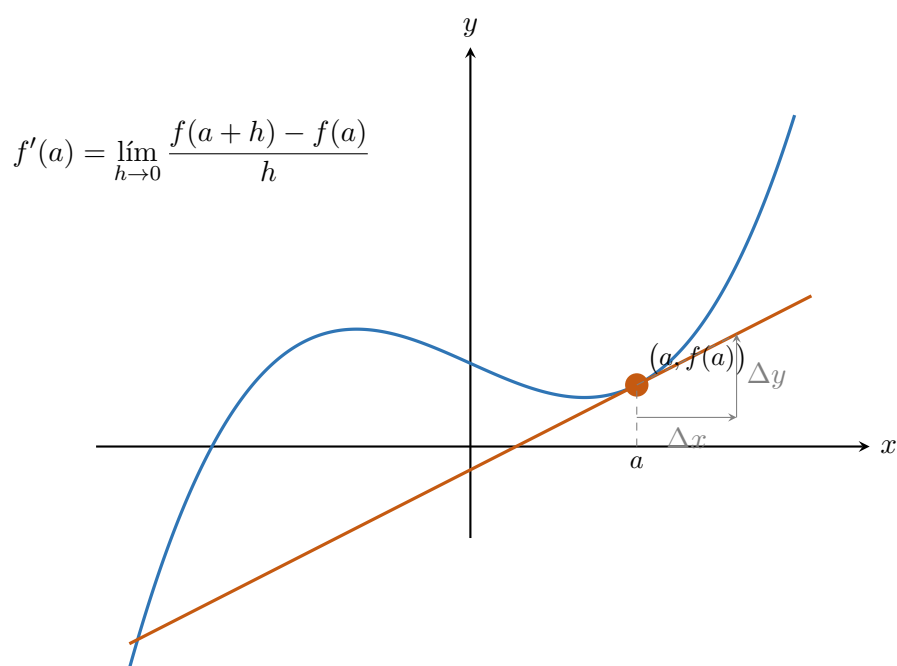


Tema 2: Cálculo diferencial de una variable

Matemáticas I, Grado en Química, Universidad de la Rioja



Profesor: Jorge Becerra

Curso 2026–2027

Última vez actualizado: 13 de octubre de 2026

Miércoles 7 de octubre

Aplicaciones y composición

En este tema vamos a estudiar funciones $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ no necesariamente lineales. A veces podemos restringir donde f está definida a un subconjunto $A \subset \mathbb{R}$, bien porque queramos bien porque hay puntos donde una función no tiene sentido (por ejemplo $1/x$ en $x = 0$).

Así que dada $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, se dice que A es el *dominio* de f y que $\mathbb{R}$ a la llegada es su *codominio*. También que $y = f(x)$ es la *imagen* del elemento $x \in A$ por la aplicación f . El *recorrido* o *conjunto imagen* de una aplicación f es el conjunto $\text{Rec } f$ ó $f(A)$ de todas las imágenes de los elementos del dominio, es decir, $\text{Rec } f = f(A) = \{f(x) \in \mathbb{R} : x \in A\} \subseteq \mathbb{R}$.

En ocasiones escribiremos $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \text{Rec } f \subset \mathbb{R}$ para hacer énfasis en el dominio y el recorrido de una función f .

A veces se define una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que no es válida para todos los valores de $\mathbb{R}$ y entonces es necesario determinar el dominio de f , que será el subconjunto $\text{Dom } f$ de $\mathbb{R}$ formado por todos los valores de la variable x para los que f está bien definida. Veremos ejemplos numéricos de esto más adelante.

Definición

Dadas dos funciones $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, se define la *composición* $g \circ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mediante la regla

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

El diagrama siguiente indica que la composición se realiza aplicando primero una función y después la otra:

$$g \circ f : \mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) \mapsto (g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Podríamos escribir $y = f(x)$, $z = g(y) = g(f(x))$. Nótese que, en general, no es cierto que $f \circ g$ sea lo mismo que $g \circ f$.

Ejemplo

Si $f(x) = x^2 + 3$ y $g(x) = x + 1$ entonces $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2 + 3) = x^2 + 3 + 1 = x^2 + 4$, mientras que $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x + 1) = (x + 1)^2 + 3 = x^2 + 2x + 4$.

La composición de aplicaciones es *asociativa*, lo que significa que si tres aplicaciones se pueden componer sucesivamente, entonces no importa el orden en que las composiciones se efectúen, es decir: $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$. Por eso escribimos simplemente $h \circ g \circ f$, sin olvidar la condición de que las composiciones han de ser posibles.

Ejemplo

Si añadimos al ejemplo anterior la función $h(x) = 2x$, resulta: $(h \circ (g \circ f))(x) = 2(x^2 + 4) = 2x^2 + 8$, mientras que $(h \circ g)(x) = 2x + 2$ y $((h \circ g) \circ f)(x) = 2(x^2 + 3) + 2 = 2x^2 + 8$; ambos resultados son iguales.

Definición

Dada una función $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, se dice que f es *biyectiva* si todo elemento de $\text{Rec } f$ es imagen de un y sólo un elemento de A .

En tal caso, se define su *función inversa* $f^{-1} : \text{Rec } f \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ asignando a cada $y \in \text{Rec } f$ el único $x \in A$ tal que $f(x) = y$

La inversa de una aplicación biyectiva f es la única aplicación f^{-1} que cumple $f^{-1} \circ f = \text{id}_A$ y $f \circ f^{-1} = \text{id}_Y$.

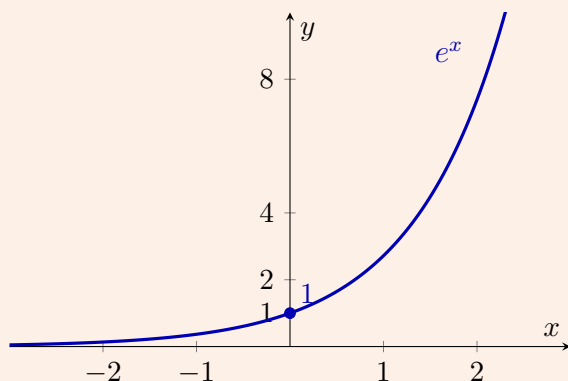
Es claro que si una aplicación f es biyectiva su inversa f^{-1} también lo es, y la inversa de f^{-1} es la propia f , es decir: $(f^{-1})^{-1} = f$.

Especialmente para las funciones biyectivas, se suele escribir $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \text{Rec } f \subset \mathbb{R}$ para denotar que f establece una correspondencia unívoca entre A y $\text{Rec } f$.

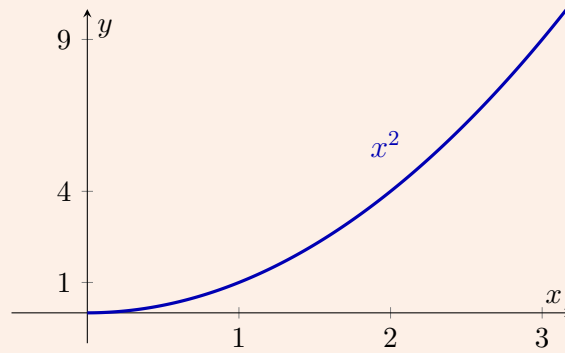
Ejemplo

La aplicación $f(x) = e^x$ con dominio $\mathbb{R}$ y recorrido $(0, \infty)$ es biyectiva y tiene como inversa la aplicación $f^{-1}(x) = \ln x$, cuyo dominio es $(0, \infty)$ y cuyo recorrido es $\mathbb{R}$.

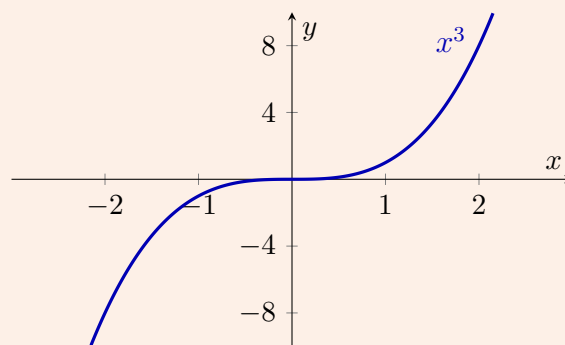
La razón es que $\ln x$ es el único número tal que $e^{\ln x} = x$, por la definición del logaritmo.

**Ejemplo**

La aplicación $f(x) = x^2$ con dominio $[0, \infty)$ y recorrido $[0, \infty)$ es biyectiva y tiene como inversa la aplicación $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$, también con dominio y recorrido $[0, \infty)$.

**Ejemplo**

La aplicación $f(x) = x^3$ con dominio y recorrido $\mathbb{R}$ es biyectiva y tiene como inversa la aplicación $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$, también con dominio y recorrido $\mathbb{R}$.



Martes 13 de octubre

Funciones reales

En general usaremos como dominios de las funciones *intervalos* definidos por números reales $a < b$, que pueden ser intervalos *abiertos* (a, b) o *cerrados* $[a, b]$, siendo

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\} \subset [a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}.$$

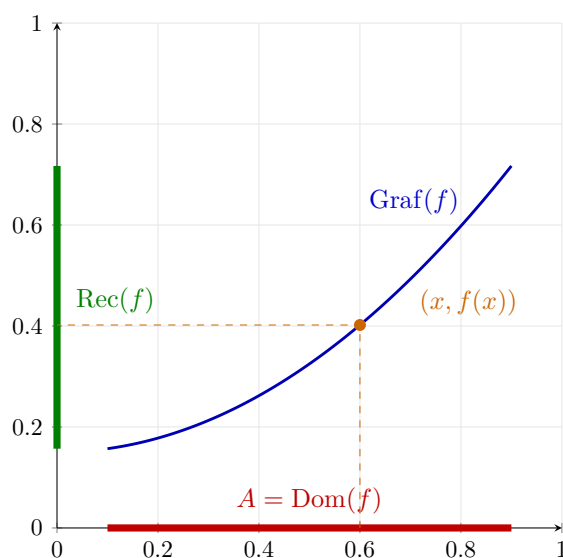
También podemos definir de modo evidente intervalos mixtos $(a, b]$ o $[a, b)$. Como intervalos no acotados o de longitud infinita consideraremos las *semirrectas* abiertas o cerradas: $(-\infty, b) \subset (-\infty, b]$ o $(a, \infty) \subset [a, \infty)$. Siguiendo con estas notaciones suele escribirse $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$. Los dominios habituales serán intervalos, semirrectas o uniones de ellos.

Definición

La *gráfica* de una función real de una variable real $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es la curva en el plano $\mathbb{R}^2$ formada por todos los puntos $(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2$ con $x \in A$:

$$\text{Graf}(f) = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 : x \in A\}.$$

Por la definición de función, estas gráficas tienen la propiedad de que una recta vertical que pase por un punto del dominio las corta en un solo punto.

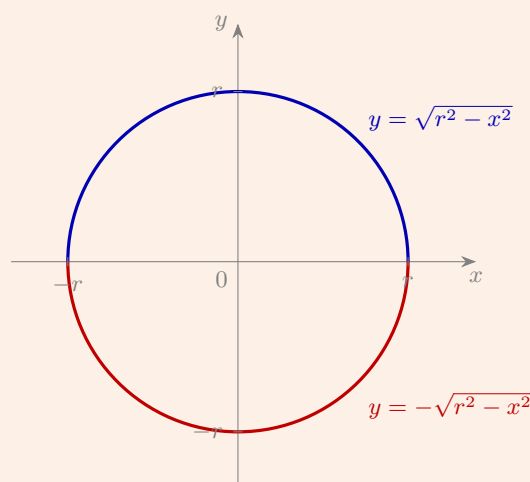


Ejemplo

En el plano $\mathbb{R}^2$, la circunferencia de centro el origen y radio $r \geq 0$ es el conjunto

$$C = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = r^2\},$$

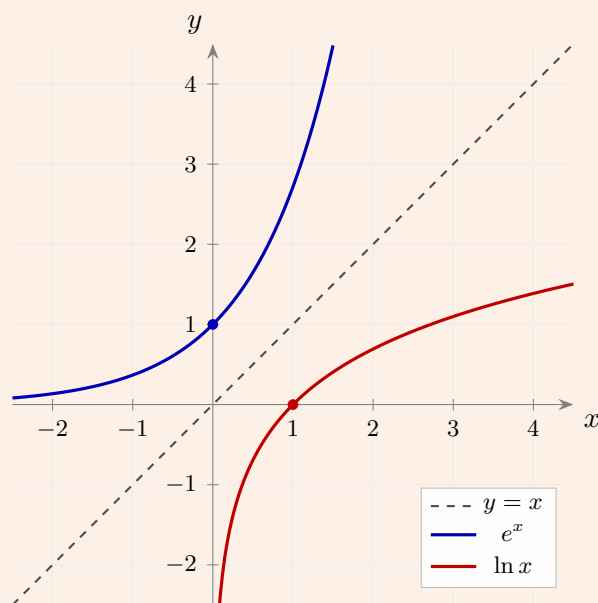
que no es la gráfica de una función real de una variable real (sino de dos funciones). Si despejamos la variable y obtenemos dos posibles reglas que pudieran ser funciones: $y = \sqrt{r^2 - x^2}$, $y = -\sqrt{r^2 - x^2}$ (lo que habitualmente se escribe $y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$). Ambas tienen como dominio el intervalo $[-r, r] \subset \mathbb{R}$ del eje de abscisas (horizontal), pero la primera tiene como conjunto imagen el intervalo $[0, r] \subset \mathbb{R}$ del eje de ordenadas (vertical) y su gráfica es la semicircunferencia superior; en cambio, la segunda tiene como conjunto imagen el intervalo $[-r, 0] \subset \mathbb{R}$ del eje de ordenadas (vertical) y su gráfica es la semicircunferencia inferior.



Las funciones biyectivas tienen la propiedad que una recta horizontal que pase por un punto del recorrido las corta en un solo punto. Las gráficas de las funciones biyectivas inversas entre sí, f y f^{-1} , son simétricas respecto a la recta diagonal $y = x$, que es la gráfica de la identidad en $\mathbb{R}$.

Ejemplo

Como vimos, la función $f : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty) \subset \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$ es biyectiva con inversa dada por $f : (0, \infty) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f^{-1}(x) = \ln x$. Sus gráficas son simétricas con respecto a la recta $y = x$:



Hay operaciones aritméticas que podemos hacer con funciones: si $f, g : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, se define:

- (i) $f + g : A \rightarrow \mathbb{R}$ de la forma $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$.
- (ii) $f \cdot g : A \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$.
- (iii) $f/g : \{x \in A \mid g(x) \neq 0\} \rightarrow \mathbb{R}$ de modo que $(f/g)(x) = f(x)/g(x)$.

Ejemplo

Dadas $f(x) = x^2 + 3$ y $g(x) = x + 1$, tenemos

- $(f + g)(x) = x^2 + x + 4$,
- $(f \cdot g)(x) = x^3 + x^2 + 3x + 3$,
- $(f/g)(x) = \frac{x^2+3}{x+1}$ si $x \neq -1$.

La función inversa respecto a la composición no debe confundirse con la de inversa respecto al producto de funciones. En el caso de la función anterior $f(x) = x^3$, su inversa multiplicativa es $\frac{1}{f}(x) = \frac{1}{x^3} = x^{-3}$, función cuyo dominio es el conjunto de los números reales no nulos.

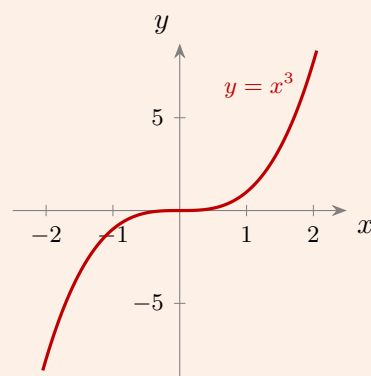
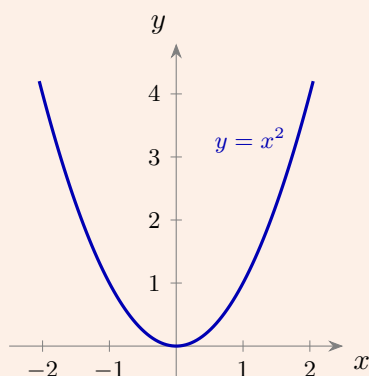
Definición

Dada una función $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, diremos que

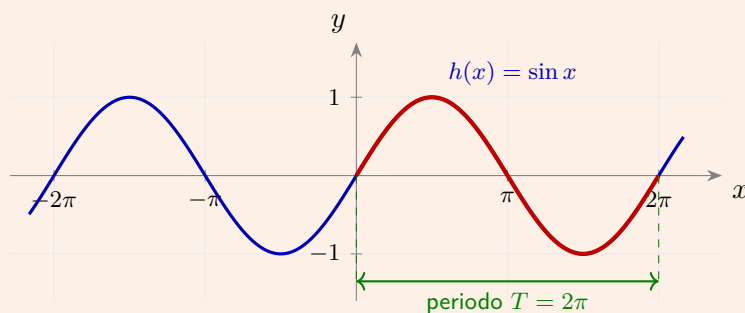
1. f es *par* (o simétrica respecto al eje vertical) si $f(-x) = f(x)$ para cada $x \in A$.
2. f es *impar* (o simétrica respecto al origen) si $f(-x) = -f(x)$ para cada $x \in A$.
En particular, la función $f(x) = x^n$ es par o impar según lo sea el exponente $n \in \mathbb{N}$.
3. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es *periódica* de periodo $T > 0$ si T es el menor número positivo tal que $f(x) = f(x + T)$ para cada $x \in \mathbb{R}$.

Ejemplo

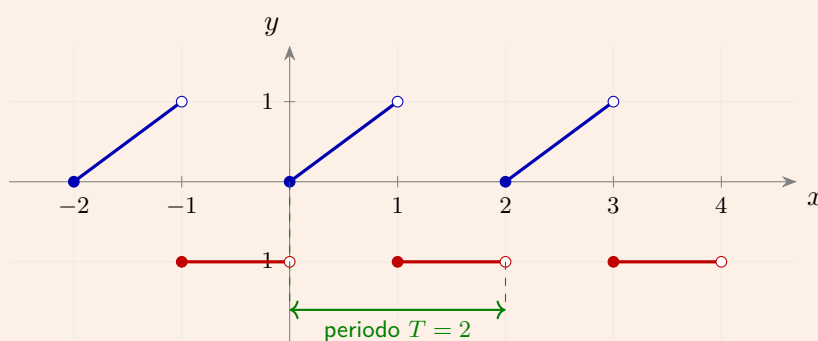
La función $f(x) = x^2$ es par, mientras que la función $g(x) = x^3$ es impar.



Por otra parte, la función $h(x) = \sin(x)$ es periódica de periodo $T = 2\pi$:



También es periódica de periodo $T = 2$ la siguiente función:



Funciones elementales

En este apartado presentamos las funciones que usaremos con más frecuencia.

(1) Funciones polinómicas, racionales y radicales

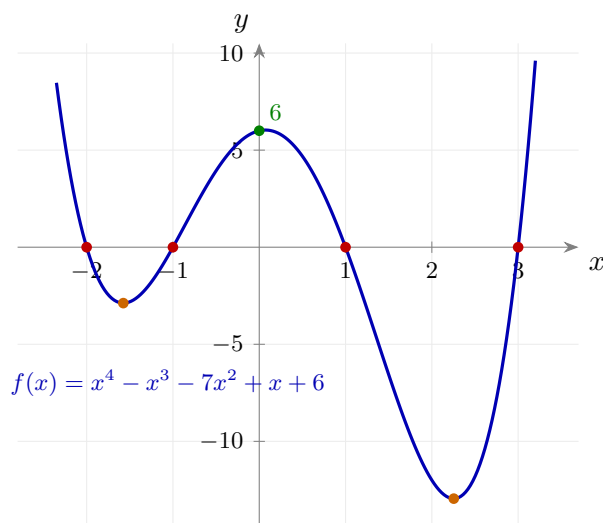
Las funciones *polinómicas* o *polinomios* son de la forma

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \quad a_i \in \mathbb{R}, \quad a_n \neq 0.$$

Al entero positivo n se le llama *grado* del polinomio. Se dice que a_0 es el *término independiente*, y a_n el *coeficiente principal* (o *director*).

El dominio (máximo) de cualquier polinomio es $\mathbb{R}$. La imagen o recorrido de un polinomio de grado impar es $\mathbb{R}$. Para polinomios de grado par, la imagen es un subconjunto acotado que habrá que determinar en cada caso. Los polinomios de grado cero son las funciones constantes, cuyas gráficas son rectas horizontales. Las gráficas de los polinomios de grado uno son rectas oblicuas. Las gráficas

de los polinomios de grado dos son parábolas.



Las *raíces* reales de un polinomio son los números $x \in \mathbb{R}$ en los que el polinomio se anula: $f(x) = 0$. Se corresponden con los puntos en los que la gráfica del polinomio corta el eje de abscisas. Un polinomio puede tener también raíces complejas no reales. Las *raíces* de un polinomio sólo son fáciles de calcular si el grado es ≤ 2 , como habéis aprendido en el instituto con la famosa fórmula

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

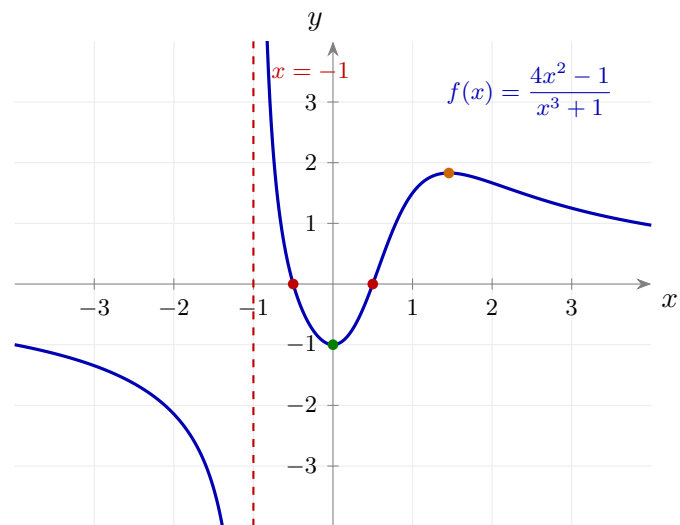
para un polinomio $ax^2 + bx + c = 0$. Más generalmente, hay fórmulas en términos de sumas, restas, multiplicaciones, divisiones y raíces para polinomios de grado 3 y 4 también (pero son muy largas). Sin embargo, gracias al matemático francés Evariste Galois, sabemos que no existe una fórmula en estos términos para polinomios de grado 5 o más grande (no es que no se haya encontrado aún, es que no se puede encontrar!).

Las funciones *racionales* son de la forma

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)},$$

donde $p(x)$ y $q(x)$ son polinomios. Se suele suponer que p y q no tiene raíces comunes. Quedan fuera del dominio de f los puntos donde se anula el denominador, es decir, las raíces del polinomio q . El

grado de la función racional es el mayor de los grados de p y q .



Las funciones *radicales* son de la forma

$$f(x) = \sqrt[n]{r(x)}, \quad n \in \mathbb{N},$$

siendo $r(x)$ una función racional. Si n es un número par, hay que asegurar que $r(x) \geq 0$ para que la función esté definida.