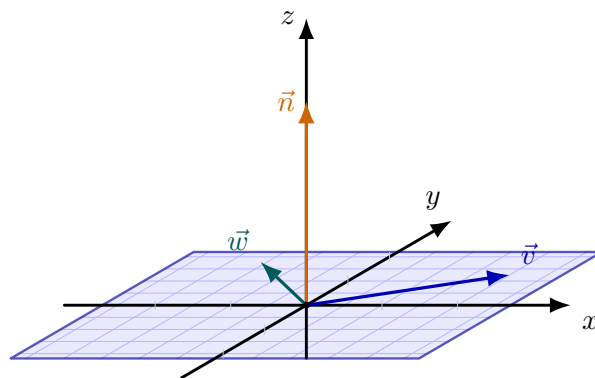


Tema 1: Álgebra Lineal

Matemáticas I, Grado en Química, Universidad de la Rioja



Profesor: Jorge Becerra

Curso 2026–2027

Última vez actualizado: 24 de septiembre de 2026

Miércoles 9 de septiembre

Símbolos matemáticos comunes

Estas son algunas de las notaciones y símbolos que utilizaremos habitualmente.

Conjuntos de números

$\mathbb{N}$ números naturales: $0, 1, 2, 3, \dots$

$\mathbb{Z}$ números enteros: $\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$

$\mathbb{Q}$ números racionales: números de la forma $\frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$

$\mathbb{R}$ números reales: racionales e irracionales (π , $\sqrt{2}$, etc)

Estos conjuntos están contenidos unos en otros:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

Conjuntos y elementos

Un conjunto es una colección de elementos. Por ejemplo,

$$A = \{1, 2, 3\},$$

o también

$$X = \{\circ, \triangle, \square, \diamond\},$$

un conjunto de cuatro elementos, formado por el círculo, el triángulo, el cuadrado y el rombo. O volviendo a los números naturales,

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}.$$

El símbolo $\in$ significa “pertenece a”, por ejemplo

$$2 \in A.$$

El símbolo $\notin$ significa “no pertenece a”, por ejemplo

$$5 \notin A.$$

El símbolo $\subset$ significa “es subconjunto de”: todos los elementos de A pertenecen también a B , y se escribe

$$A \subset B.$$

También se lee “está contenido en”. Por ejemplo,

$$\{1, 2\} \subset \{1, 2, 3\}.$$

El símbolo $\subseteq$ significa “es subconjunto de o es igual a”: $A \subset B$ ó $A = B$. Por ejemplo, $\{1, 2\} \subseteq \{1, 2, 3\}$ pero también

$$\{1, 2, 3\} \subseteq \{1, 2, 3\}.$$

Para referirnos a los elementos de un conjunto X que cumplen una determinada condición, se suele escribir

$$\{x \in X : (x \text{ satisface una cierta condición})\}.$$

El símbolo “ : ” se lee “tal que”. Por ejemplo,

$$\{n \in \mathbb{N} : n \text{ es múltiplo de } 2\} \subset \mathbb{N}$$

es el conjunto de números pares. O también

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}.$$

Otros símbolos importantes

=	igual a
$\neq$	distinto de
<, >	menor que, mayor que
$\leq$, $\geq$	menor o igual que, mayor o igual que
$\Rightarrow$	implica
$\Leftrightarrow$	sí y sólo si
$\forall$	para todo
$\exists$	existe
$\emptyset$	conjunto vacío.

Un enunciado del tipo “ $P \Rightarrow Q$ ” significa que si P es verdad (o se cumple), entonces Q también es verdad (o se cumple). Por ejemplo,

$$\text{mi mascota es un perro} \Rightarrow \text{mi mascota es un mamífero}$$

significa que si mi mascota es un perro, también es un mamífero. Esto se usa mucho en matemáticas, por ejemplo

$$x > 2 \Rightarrow x^2 > 4$$

significa que “si $x > 2$, entonces $x^2 > 4$ ”.

En cambio, $P \Rightarrow Q$ **no significa** que $Q \Rightarrow P$, por ejemplo puedo tener un mamífero como mascota que no sea un perro (un gato, un hámster, etc). O volviendo al ejemplo de matemáticas, puede ser que $x = -3$, que cumple que $x^2 = 9 > 4$, pero sin embargo $x < 2$!

Para los casos en los que se cumpla que $P \Rightarrow Q$ y $Q \Rightarrow P$, se usa el símbolo $P \Leftrightarrow Q$, y se lee “ P sí y sólo si Q ”. Por ejemplo,

un equipo de fútbol pasa a la final $\Leftrightarrow$ el equipo gana la semifinal,

o también

$$x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2.$$

Es decir, el símbolo $\Rightarrow$ significa que las dos afirmaciones son equivalentes.

El espacio $\mathbb{R}^n$

Fijado un número natural $n \geq 1$, el espacio real n -dimensional $\mathbb{R}^n$ es el conjunto cuyos elementos, llamados *puntos*, son las n -tuplas ordenadas $(x_1, \dots, x_n)$ de números reales, siendo x_i la i -ésima *coordenada* o *componente* de $(x_1, \dots, x_n)$. Es decir,

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n) : x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}.$$

Dos n -tuplas son iguales si y sólo si tienen las mismas componentes.

Ejemplo

- (i) $(1, 2, 0, -1) \in \mathbb{R}^4$, $(1, 0) \in \mathbb{R}^2$ y no tiene sentido comparar por igualdad los vectores anteriores.
- (ii) Si $(2, 1) = (a, b)$ en $\mathbb{R}^2$ entonces $a = 2$ y $b = 1$.
- (iii) $(2, 0, 4) \neq (2, 1, 4) \neq (4, 2, 8)$ en $\mathbb{R}^3$.

Si concebimos cada punto $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ como un segmento dirigido que empieza en el *origen* $(0, \dots, 0)$ y termina en dicho punto, entonces decimos que tenemos el *vector*

$$\vec{x} = (x_1, \dots, x_n).$$

Notación: Existen diversas maneras de denotar a los vectores. En la anterior definición hemos utilizado la *flechita* $\vec{x}$ habitual en Física. En textos de matemáticas es más habitual encontrarse con $\bar{x}$ o simplemente la negrita $\mathbf{x}$. En lo que sigue nosotros utilizaremos la primera de ellas. Habitualmente se emplean las letras $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{x}, \vec{y}, \vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m$ para referirnos a vectores, $x, y, z, x_1, x_2, \dots, x_n$ para hacer referencia a componentes de vectores, y $t, s, t_1, t_2, \dots, t_n$ para denotar *escalares*, es decir, números reales.

Con los vectores del espacio $\mathbb{R}^n$ se pueden realizar muchas operaciones (suma, producto por un escalar, producto escalar, producto vectorial, producto mixto, ...) y cada una de ellas tiene sus aplicaciones. De momento consideraremos sólo las dos primeras, la suma y el producto por un escalar, que son las llamadas *operaciones lineales*.

Se dice que $\mathbb{R}^n$ es el *espacio vectorial real n -dimensional* cuando sus elementos son considerados

como vectores sometidos a las dos operaciones lineales:

— **Suma de vectores.** La suma de dos vectores $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ es el siguiente vector de $\mathbb{R}^n$:

$$\vec{x} + \vec{y} = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n).$$

— **Producto de un escalar por un vector.** El producto de un escalar $t \in \mathbb{R}$ por un vector $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ es el siguiente vector de $\mathbb{R}^n$:

$$t\vec{x} = (tx_1, \dots, tx_n).$$

Ejemplo

$$(1, 3, 2, 0) + (2, 3, 4, -3) = (3, 6, 6, -3); \quad 4(1, 0, -3) = (4, 0, -12).$$

Ejercicio

Comprobar que estas operaciones lineales tienen las siguientes propiedades:

- Propiedades de la suma:
 - Asociativa: $\vec{x} + (\vec{y} + \vec{z}) = (\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z}$.
 - Conmutativa: $\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$.
 - Vector nulo $\vec{0} = (0, \dots, 0)$: $\vec{x} + \vec{0} = \vec{x}$.
 - Vector opuesto $-\vec{x} = (-1)\vec{x}$: $\vec{x} + (-\vec{x}) = \vec{0}$.
- Propiedades del producto por un escalar:
 - Escalar unidad: $1\vec{x} = \vec{x}$.
 - Doble escalar: $t(s\vec{x}) = (ts)\vec{x}$.
- Propiedades mixtas:
 - Distributiva del escalar: $(t + s)\vec{x} = t\vec{x} + s\vec{x}$.
 - Distributiva del vector: $t(\vec{x} + \vec{y}) = t\vec{x} + t\vec{y}$.

Estas operaciones se pueden realizar sucesivamente un número finito de veces.

Definición

Diremos que un vector $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ es *combinación lineal* de los vectores $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_r \in \mathbb{R}^n$ si existen escalares (números reales) $t_1, \dots, t_r$, tales que

$$\vec{v} = t_1\vec{v}_1 + \dots + t_r\vec{v}_r.$$

Ejemplo

- (i) En $\mathbb{R}^3$, el vector $(5, 13, 2)$ es combinación lineal de los vectores $(2, 1, 2)$ y $(1, 4, 0)$ pues $(5, 13, 2) = 1(2, 1, 2) + 3(1, 4, 0)$.
- (ii) En $\mathbb{R}^3$, el vector $(1, 1, 1)$ no es combinación lineal de los vectores $(0, 1, 1)$ y $(0, 2, 1)$.
- (iii) En $\mathbb{R}^n$, sea la familia de vectores $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$, donde $\vec{e}_i$ tiene todas las coordenadas nulas

excepto la que ocupa el lugar i , que vale 1, es decir,

$$\vec{e}_1 = (1, 0, \dots, 0), \quad \vec{e}_2 = (0, 1, \dots, 0), \quad \dots, \quad \vec{e}_n = (0, 0, \dots, 1).$$

Entonces cada vector $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ es combinación lineal de la familia anterior, siendo los escalares las propias componentes del vector:

$$\vec{x} = x_1 \vec{e}_1 + \dots + x_n \vec{e}_n.$$

Definición

Diremos que los vectores $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_r$ de $\mathbb{R}^n$ son *linealmente dependientes* si existen números reales $t_1, \dots, t_r \in \mathbb{R}$, **no todos nulos**, tal que

$$t_1 \vec{v}_1 + \dots + t_r \vec{v}_r = \vec{0}.$$

Que unos vectores $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_r$ de $\mathbb{R}^n$ sean linealmente dependientes significa justamente que hay alguno que puede escribirse como una combinación lineal del resto: por ejemplo si $t_r \neq 0$, entonces

$$\vec{v}_r = -\frac{1}{t_r} (t_1 \vec{v}_1 + \dots + t_r \vec{v}_{r-1}) = -\frac{t_1}{t_r} \vec{v}_1 - \dots - \frac{t_{r-1}}{t_r} \vec{v}_{r-1}.$$

De la misma manera: si un vector $\vec{v}$ es combinación lineal de vectores $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_r$, por ejemplo $\vec{v} = t_1 \vec{v}_1 + \dots + t_r \vec{v}_r$, entonces la familia $\vec{v}, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_r$ es linealmente dependiente, porque

$$t_1 \vec{v}_1 + \dots + t_r \vec{v}_r - \vec{v} = \vec{0}$$

y hay un coeficiente que no es cero: el que multiplica a $\vec{v}$, que es -1 .

Ejemplo

Para dos vectores, ser linealmente dependientes es lo mismo a ser proporcionales.

Jueves 10 de septiembre

Familias de vectores que no son linealmente dependientes se llaman independientes. Más concretamente:

Definición

Diremos que los vectores $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_r$ de $\mathbb{R}^n$ son *linealmente independientes* (o que la familia de vectores $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_r\}$ es *libre*) si

$$t_1 \vec{v}_1 + \dots + t_r \vec{v}_r = \vec{0} \Rightarrow t_1 = t_2 = \dots = t_r = 0$$

Es decir: si una familia de vectores es linealmente independiente, ningún vector de la misma puede ser combinación lineal de los demás.

Ejemplo

- (i) Los vectores $(1, 2), (1, 3)$ de $\mathbb{R}^2$ son linealmente independientes, pues si $t_1(1, 2) + t_2(1, 3) = (0, 0)$ entonces $(t_1 + t_2, 2t_1 + 3t_2) = (0, 0)$, es decir, $t_1 + t_2 = 0 = 2t_1 + 3t_2$; por tanto $t_1 = t_2 = 0$.
- (ii) Los vectores $(1, 2)$ y $(2, 4)$ son linealmente dependientes, pues $2(1, 2) + (-1)(2, 4) = (0, 0)$.
- (iii) En $\mathbb{R}^4$, la familia de vectores $\{\vec{x} = (1, 2, 4, 5), \vec{y} = (0, 2, 0, 0), \vec{z} = (0, 0, 3, 1), \vec{u} = (0, 0, 0, 4)\}$ es libre, luego también lo son sus subfamilias $\{\vec{x}, \vec{y}, \vec{u}\}$ y $\{\vec{z}, \vec{u}\}$.
- (iv) En $\mathbb{R}^n$, la familia de vectores $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ es libre.
- (v) También lo es la siguiente familia *triangular*, con $a_{ii} \neq 0$:

$$\{(a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}), (0, a_{22}, \dots, a_{2n}), \dots, (0, 0, \dots, a_{nn})\}.$$

Ejercicio

- (1) Probar que si $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_r \in \mathbb{R}^n$ son linealmente independientes, también lo es cualquier subcolección de ellos.
- (2) Probar que si $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_r \in \mathbb{R}^n$ son linealmente dependientes, entonces

$$\vec{v}_1 + \vec{v}_2, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_r \in \mathbb{R}^n$$

también son linealmente dependientes.

- (3) Probar que si $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_r \in \mathbb{R}^n$ son linealmente independientes, entonces

$$\vec{v}_1 + \vec{v}_2, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_r \in \mathbb{R}^n$$

también son linealmente independientes.

Rango

Pasemos a la siguiente cuestión: dados $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_r \in \mathbb{R}^n$, imaginemos que son linealmente dependientes. Por tanto, hay un vector que es combinación lineal de los otros, digamos que es el $\vec{v}_r$. Ahora dados $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_{r-1}$, ¿son linealmente dependientes? Si sí, misma historia: hay un vector que es combinación lineal de los otros, y lo puedo eliminar. ¿Cuándo acaba este proceso? Cuando ya no puedo quitar ninguno, porque los que tengo son linealmente independientes. Al número de vectores que quedan se le llama *rango*.

Definición

El *rango* de una familia finita de vectores de $\mathbb{R}^n$ es el máximo número de vectores linealmente independientes que existen en dicha familia.

Nótese que basta que una familia contenga algún vector no nulo para que su rango sea, al menos, 1.

Propiedades importantes del rango

- (i) En $\mathbb{R}^n$, el rango de cualquier familia de vectores es menor o igual que n .
- (ii) Si una familia de n vectores de $\mathbb{R}^n$ tiene rango n , entonces todo vector de $\mathbb{R}^n$ es combinación lineal de los vectores de la familia.

La condición (ii) del anterior se expresa diciendo que n vectores de $\mathbb{R}^n$ linealmente independientes *engendran* (o *generan*) todo el espacio vectorial, y también que forman una *base* de $\mathbb{R}^n$. (Para que una familia de vectores engendre todo $\mathbb{R}^n$, esa familia tiene que tener n vectores o más; para que sea base, debe tener exactamente n vectores.)

En el Bachillerato ya visteis qué es el rango de una matriz. Recordad que una *matriz* A de *orden* $m \times n$ sobre $\mathbb{R}$ es un cuadro de números reales dispuestos en m filas y n columnas:

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Para las matrices, el rango se definía como el mayor número de filas linealmente independientes. ¿Cuál es la relación con el rango de una familia de vectores?

Dados vectores de $\mathbb{R}^n$

$$\vec{v}_1 = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n})$$

$$\vec{v}_2 = (a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n})$$

$$\vdots$$

$$\vec{v}_r = (a_{r1}, a_{r2}, \dots, a_{rn}),$$

el rango $rg(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_r)$ de $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_r$ es justamente el rango de la matriz $A = (a_{ij})$ de los coeficientes

de los vectores,

$$rg(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_r) = rg(A),$$

porque cada fila de A representa justamente cada uno de los vectores $\vec{v}_i$.

¿Y cómo se calcula el rango de una matriz?

Definición

Una matriz A se dice *escalonada* si verifica que, dada una fila, su primer elemento no nulo está estrictamente más a la derecha que el de las filas anteriores.

Ejemplo

La matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

sí es escalonada, mientras que

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

no es escalonada, porque la tercera fila tiene su primer coeficiente no nulo en cuarta posición, mientras que la cuarta fila tiene su primer coeficiente no nulo en tercera posición. Tampoco está escalonada

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

porque su segunda y tercera fila tienen su primer coeficiente no nulo en la misma posición.

Cualquier matriz puede convertirse en una matriz escalonada siguiendo 3 operaciones en filas:

- (i) Intercambiar entre sí dos filas de la matriz: $F_i \leftrightarrow F_j$
- (ii) Multiplicar una fila por un escalar no nulo: $F_i \rightarrow \lambda F_i$, con $\lambda \neq 0$
- (iii) Sumarle a una fila un múltiplo escalar de otra fila: $F_i \rightarrow \lambda F_i + \lambda F_j$.

Si conseguimos escalonar una matriz dada, calcular su rango es inmediato:

Propiedades sobre las matrices escalonadas

- (i) Aplicar las tres operaciones filas anteriores no modifica el rango de una matriz.
- (ii) Si A es una matriz escalonada, su rango es igual al número de filas no nulas.

Por tanto, a modo de resumen:

Receta para calcular el rango de una familia de vectores $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_r$

1. Poner las coordenadas de los vectores $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_r$ en una matriz A .
2. Usar las 3 operaciones de filas anteriores para escalonar la matriz A .
3. El rango de A será justamente el número de filas no nulas.

Ejemplo

Consideremos los vectores de $\mathbb{R}^4$

$$\vec{v}_1 = (1, 2, 1, 3), \quad \vec{v}_2 = (2, 4, 3, 7), \quad \vec{v}_3 = (1, 2, 2, 4), \quad \vec{v}_4 = (3, 6, 4, 10).$$

Para calcular su rango, colocamos sus coordenadas como columnas de una matriz y la escalonamos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 2 & 6 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \\ 3 & 7 & 4 & 10 \end{pmatrix}.$$

Primero hacemos

$$F_2 \longrightarrow F_2 - 2F_1, \quad F_3 \longrightarrow F_3 - F_1, \quad F_4 \longrightarrow F_4 - 3F_1,$$

obteniendo

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Intercambiamos F_2 y F_3 :

$$F_2 \longleftrightarrow F_3,$$

y obtenemos

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Finalmente,

$$F_4 \longrightarrow F_4 - F_2,$$

por lo que

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Hay exactamente dos filas no nulas. Por tanto,

$$\operatorname{rg}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4) = 2.$$

Lunes 14 de septiembre

Vamos a estudiar un tipo muy concreto de subconjuntos de $\mathbb{R}^n$: aquellos que preservan la suma y producto por escalares.

Subespacios vectoriales

Definición

Un *subespacio vectorial* del espacio vectorial $\mathbb{R}^n$, es un subconjunto no vacío $S \subset \mathbb{R}^n$ que cumple:

- (i) Si $\vec{v}, \vec{w} \in S$, entonces $\vec{v} + \vec{w} \in S$.
- (ii) Si $t \in \mathbb{R}$ y $\vec{v} \in S$, entonces $t\vec{v} \in S$.

En consecuencia: si $\vec{v}, \vec{w} \in S$, y $t, s \in \mathbb{R}$ entonces $t\vec{v} + s\vec{w} \in S$.

Otra consecuencia importante: el vector $\vec{0} \in S$ para cualquier subespacio vectorial S , porque $\vec{0} = 0 \cdot \vec{v} \in S$ para cualquier $\vec{v} \in S$. Por tanto: dado un subconjunto $S \subset \mathbb{R}^n$, si $\vec{0} \notin S$, entonces sabemos que S no es un subespacio vectorial.

Ejemplo

- (i) $\mathbb{R}^n \subseteq \mathbb{R}^n$ y $\{\vec{0}\} \subseteq \mathbb{R}^n$ son subespacios vectoriales.
- (ii) $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = y\} \subset \mathbb{R}^2$ es un subespacio vectorial
- (iii) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 5\} \subset \mathbb{R}^3$ no es un subespacio vectorial.

Vamos a ver ahora un ejemplo muy concreto de subespacio vectorial, que resultará ser el más importante.

Definición

Dados vectores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_r \in \mathbb{R}^n$, el *subespacio generado por* $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_r$ es

$$\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_r \rangle = \{ \vec{v} \in \mathbb{R}^n \mid \vec{v} = t_1 \vec{v}_1 + t_2 \vec{v}_2 + \dots + t_r \vec{v}_r, \text{ con } t_i \in \mathbb{R} \} \subseteq \mathbb{R}^n.$$

Es decir, $\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_r \rangle$ es el conjunto de los vectores que son combinación lineal de una familia de vectores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_r$ de $\mathbb{R}^n$.

Ejercicio

Comprobar que $\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_r \rangle$ es en efecto un subespacio vectorial.

Una observación importante: consideremos el subespacio vectorial $\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_r \rangle$. Imaginemos que ahora añadimos un vector que es una combinación lineal de los otros como generador, por ejemplo

consideremos

$$\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_r, 3\vec{v}_1 + 5\vec{v}_2 \rangle.$$

¿Cuál es la relación entre $\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_r \rangle$ y $\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_r, 3\vec{v}_1 + 5\vec{v}_2 \rangle$? ¿Son iguales!

$$\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_r \rangle = \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_r, 3\vec{v}_1 + 5\vec{v}_2 \rangle.$$

¿Cómo se demuestra esto? En general, para comprobar que dos subconjuntos A, B son iguales, hay que comprobar que todo elemento de A también está en B y que todo elemento de B también está en A . Es decir, $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$ juntos significan que $A = B$.

Volviendo a nuestro ejemplo: comprobemos que $\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_r \rangle = \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_r, 3\vec{v}_1 + 5\vec{v}_2 \rangle$

Dado $\vec{v} \in \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_r \rangle$. Por definición de espacio generado,

$$\vec{v} = t_1\vec{v}_1 + \dots + t_r\vec{v}_r$$

para ciertos $t_1, \dots, t_r \in \mathbb{R}$. Pero entonces $\vec{v}$ también es una combinación lineal de

$$\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_r, 3\vec{v}_1 + 5\vec{v}_2.$$

porque

$$\vec{v} = t_1\vec{v}_1 + \dots + t_r\vec{v}_r + 0(3\vec{v}_1 + 5\vec{v}_2)$$

Por tanto, $\vec{v} \in \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_r, 3\vec{v}_1 + 5\vec{v}_2 \rangle$, y hemos demostrado que

$$\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_r \rangle \subseteq \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_r, 3\vec{v}_1 + 5\vec{v}_2 \rangle.$$

Recíprocamente: si $\vec{v} \in \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_r, 3\vec{v}_1 + 5\vec{v}_2 \rangle$. Entonces, por definición de espacio generado, existen $t_1, \dots, t_r, t \in \mathbb{R}$ tales que

$$\vec{v} = t_1\vec{v}_1 + \dots + t_r\vec{v}_r + t(3\vec{v}_1 + 5\vec{v}_2).$$

Reagrupando,

$$\vec{v} = (t_1 + 3t)\vec{v}_1 + (t_2 + 5t)\vec{v}_2 + t_3\vec{v}_3 + \dots + t_r\vec{v}_r,$$

así que $\vec{v}$ también está en $\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_r \rangle$, así que concluimos.

Ejemplo

Si $S = \langle (1, 2, 0), (-2, 3, 1) \rangle$, entonces

$$S = \langle (1, 2, 0), (-2, 3, 1), (3, -1, -1), (1, 5, 1) \rangle$$

porque

$$(3, -1, -1) = (1, 2, 0) - (-2, 3, 1)$$

y

$$(1, 5, 1) = (1, 2, 0) + (-2, 3, 1).$$

Definición

Si S es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$, se dice que S está *generado* por vectores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_r \in \mathbb{R}^n$ si $S = \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_r \rangle$. Se dice también que $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_r \in \mathbb{R}^n$ son un *sistema de generadores* de S .

Propiedad importante

Todo subespacio vectorial está generado por algunos vectores. Es decir, cualquier subespacio vectorial $S \subseteq \mathbb{R}^n$ es de la forma $S = \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_r \rangle$.

¡Ojo! Lo explicado anteriormente significa que un mismo subespacio vectorial admite sistemas de generadores diferentes. También justifica lo siguiente: dado

$$S = \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_r \rangle,$$

si hay algún vector que es combinación lineal del resto, puedo quitarlo (igual que en el ejemplo anterior el vector $3\vec{v}_1 + 5\vec{v}_2$ puede quitarse como generador de $\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_r, 3\vec{v}_1 + 5\vec{v}_2 \rangle$). De los $r - 1$ vectores resultantes, si hay alguno que es combinación lineal del resto, entonces misma historia: puedo quitarlo. ¿Cuándo acaba este proceso? Precisamente cuando me quede con una familia de vectores linealmente independientes. Al número de vectores con los que me he quedado como generadores se le llama la *dimensión*, y a tales vectores *base*.

Definición

Se llama *base* de un subespacio vectorial S a toda familia $\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_d$ de vectores linealmente independientes que genera S .

Es un teorema (que no veremos en esta asignatura) que cualquier base de un subespacio vectorial dado tiene el mismo número de vectores. La *dimensión* de un subespacio vectorial S es el número de vectores que tiene cualquier base, y se denota como $\dim S$.

Ejemplo

Recordad la familia de vectores de $\mathbb{R}^n$ (visto como subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$)

$$\vec{e}_1 = (1, 0, \dots, 0), \quad \vec{e}_2 = (0, 1, \dots, 0), \quad \dots, \quad \vec{e}_n = (0, 0, \dots, 1).$$

Hemos visto que generan $\mathbb{R}^n$ y que son linealmente independientes. Por tanto forman una base de $\mathbb{R}^n$, que se llama *base canónica*. En particular, $\dim \mathbb{R}^n = n$.

Martes 15 de septiembre

Hemos visto el subespacio vectorial $\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_r \rangle$ generado por unos vectores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_r \in \mathbb{R}^n$. ¿Cuál es su dimensión? Tenemos

Importante

$$\dim \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_r \rangle = \text{rg}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_r)$$

¿Por qué? $\dim \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_r \rangle$ es el número de vectores de cualquier base de $\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_r \rangle$. Como, por definición $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_r$ generan $\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_r \rangle$, una base de dicho subespacio vectorial está dada por una subcolección que contenga el número máximo posible de vectores linealmente independientes. Ésto es precisamente el rango.

Kahoot

Hemos hecho el siguiente Kahoot en clase. ¡Tratad de responder por vosotros mismos a estas preguntas para asegurarnos que estáis comprendiendo la asignatura!

1. Si $v = (1, 2, 3)$ y $w = (4, 5, 6)$ entonces $v + w$ es...
 - (a) $(2, 3, 4)$
 - (b) $(5, 7, 9)$
 - (c) $(-4, 1, 0)$
 - (d) $(0, 0, 0)$
2. Verdadero o falso: los vectores $e_1 = (1, 0)$ y $e_2 = (0, 1)$ son linealmente independientes.
 - (a) Verdadero
 - (b) Falso
3. Verdadero o falso: los vectores $e_1 = (1, 0)$ y $w = (7, 0)$ son linealmente independientes.
 - (a) Verdadero
 - (b) Falso
4. Verdadero o falso: los vectores $e_1 = (1, 0)$ y $w = (7, 1)$ son linealmente independientes.
 - (a) Verdadero
 - (b) Falso
5. El rango de unos vectores $v_1, \dots, v_r \in \mathbb{R}^n$ es...
 - (a) r
 - (b) El número máximo de vectores linealmente dependientes
 - (c) El número máximo de vectores linealmente independientes
 - (d) $n - r$
6. Si $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^2$, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es cierta?
 - (a) v_1, v_2, v_3 son una base

- (b) v_1, v_2, v_3 siempre generan un subespacio de dimensión 3 en $\mathbb{R}^2$
- (c) $\text{rg}(v_1, v_2, v_3) = 1$
- (d) v_1, v_2, v_3 son linealmente dependientes
7. Verdadero o falso: $S = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, \dots\} \subset \mathbb{R}$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}$.
- (a) Verdadero
- (b) Falso
8. Verdadero o falso: $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x - y = 0\} \subset \mathbb{R}^2$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$.
- (a) Verdadero
- (b) Falso
9. Si $v_1, \dots, v_r \in \mathbb{R}^n$ son linealmente independientes, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es cierta?
- (a) $\text{rg}(v_1, \dots, v_r) < r$
- (b) $\dim\langle v_1, \dots, v_r \rangle > r$
- (c) $r \leq n$
- (d) $r > n$
10. Si $v_1, \dots, v_r \in \mathbb{R}^n$ son linealmente dependientes, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es cierta?
- (a) $\text{rg}(v_1, \dots, v_r) = r$
- (b) $\dim\langle v_1, \dots, v_r \rangle < r$
- (c) Ningún vector es combinación lineal de los otros
- (d) Forman una base de $\mathbb{R}^n$

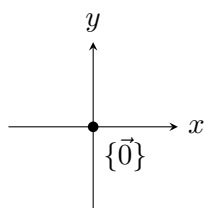
Interpretación geométrica de los subespacios vectoriales

La dimensión de un subespacio vectorial nos indica cuántos vectores linealmente independientes necesitamos para generar todo el subespacio.

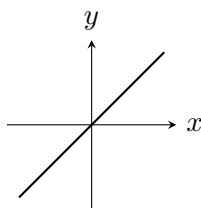
En particular, los posibles subespacios de $\mathbb{R}^2$ son:

- de dimensión 0: únicamente $\{\vec{0}\}$;
- de dimensión 1: una recta que pasa por el origen;
- de dimensión 2: todo $\mathbb{R}^2$.

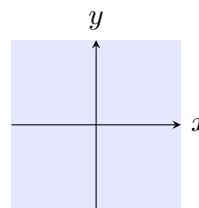
Por tanto, geoméricamente:



Dimensión 0



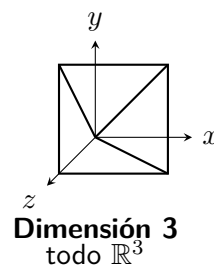
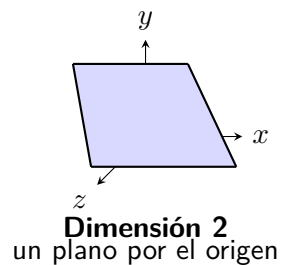
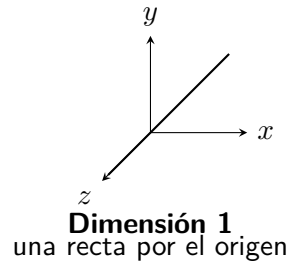
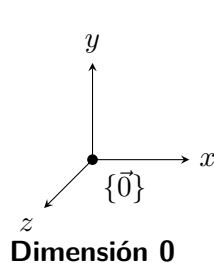
Dimensión 1
una recta por el origen



Dimensión 2
todo $\mathbb{R}^2$

En $\mathbb{R}^3$ tenemos cuatro posibilidades:

- de dimensión 0: únicamente $\{\vec{0}\}$;
- de dimensión 1: una recta que pasa por el origen;
- de dimensión 2: un plano que pasa por el origen;
- de dimensión 3: todo $\mathbb{R}^3$.



Importante: los dibujos representan un ejemplo de cada caso. Hay infinitas rectas por el origen en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$, y también infinitos planos por el origen en $\mathbb{R}^3$.

En general, un subespacio vectorial de dimensión d de $\mathbb{R}^n$ es un “espacio d -dimensional” que pasa siempre por el origen.

Miércoles 16 de septiembre

Veamos algunos ejemplos.

Ejemplo

Calcular la dimensión del subespacio vectorial generado por los vectores

$$v_1 = (1, 2, 0), \quad v_2 = (-2, 3, 1), \quad v_3 = (3, -1, -1), \quad v_4 = (-1, 5, 1),$$

y obtener una base.

El subespacio que queremos estudiar es

$$S = \langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle.$$

Para determinar la dimensión y una base, colocamos los vectores como filas de una matriz y la escalonamos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Realizamos operaciones elementales por filas:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 \rightarrow F_2 + 2F_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 7 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{F_3 \rightarrow F_3 - 3F_1 \\ F_4 \rightarrow F_4 + F_1}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 7 & 1 \\ 0 & -7 & -1 \\ 0 & 7 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{F_3 \rightarrow F_3 + F_2 \\ F_4 \rightarrow F_4 - F_2}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La matriz escalonada tiene dos filas no nulas. Por tanto,

$$\dim S = 2.$$

Además, las dos primeras filas de la matriz resultante pueden tomarse como base de S : los vectores

$$(1, 2, 0), (0, 7, 1)$$

forman una base de S .

Ejemplo

Sean

$$\vec{w}_1 = (2, 5, 0), \quad \vec{w}_2 = (-1, -1, -2),$$

y sea

$$S = \langle \vec{w}_1, \vec{w}_2 \rangle.$$

Determinar si el vector

$$\vec{v} = (-1, 2, -6)$$

pertenece a S .

Método 1: comparación de rangos.

El vector $\vec{v}$ pertenece a S si y solo si añadirlo a los vectores generadores no aumenta el rango.

Por tanto, calculamos

$$\text{rg}(\vec{w}_1, \vec{w}_2) \quad \text{y} \quad \text{rg}(\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{v}).$$

Es decir,

$$\text{rg} \begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \text{rg} \begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 \\ -1 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & -6 \end{pmatrix}.$$

Para la primera matriz, escalonamos:

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_2} \begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 2 & 5 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 \rightarrow F_2 + 2F_1} \begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & -4 \end{pmatrix}.$$

Por tanto,

$$\text{rg} \begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix} = 2.$$

También se podía haber hecho directamente porque $\vec{w}_1$ y $\vec{w}_2$ no son proporcionales.

Ahora escalonamos la matriz que incluye también a $\vec{v}$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 \\ -1 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_2} \begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 2 & 5 & 0 \\ -1 & 2 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{F_2 \rightarrow F_2 + 2F_1 \\ F_3 \rightarrow F_3 - F_1}} \begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & -4 \\ 0 & 3 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 \rightarrow F_3 - F_2} \begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Así,

$$\text{rg} \begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 \\ -1 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & -6 \end{pmatrix} = 2.$$

Como

$$\text{rg} \begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 \\ -1 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & -6 \end{pmatrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 \\ -1 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & -6 \end{pmatrix} = 2,$$

concluimos que

$$\boxed{\vec{v} \in S}.$$

Método 2: expresión como combinación lineal.

Por definición,

$$\vec{v} \in S$$

si y solo si existen $t, s \in \mathbb{R}$ tales que

$$\vec{v} = t\vec{w}_1 + s\vec{w}_2.$$

Sustituyendo los vectores,

$$(-1, 2, -6) = t(2, 5, 0) + s(-1, -1, -2).$$

Igualando coordenadas, obtenemos el sistema

$$\begin{cases} 2t - s = -1, \\ 5t - s = 2, \\ -2s = -6. \end{cases}$$

De la tercera ecuación,

$$s = 3.$$

Sustituyendo en la primera ecuación,

$$2t - 3 = -1 \implies t = 1.$$

Comprobamos que estos valores satisfacen también la segunda ecuación:

$$5(1) - 3 = 2.$$

Por tanto,

$$t = 1, \quad s = 3,$$

y

$$\vec{v} = \vec{w}_1 + 3\vec{w}_2.$$

En efecto,

$$(2, 5, 0) + 3(-1, -1, -2) = (-1, 2, -6).$$

Por tanto,

$$\boxed{\vec{v} \in S}.$$

Ejemplo

Sean

$$\vec{w}_1 = (3, 1, -1), \quad \vec{w}_2 = (-1, 2, 0), \quad \vec{w}_3 = (0, 7, -1),$$

y sea

$$S = \langle \vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3 \rangle.$$

Determinar, en función del parámetro λ , si el vector

$$\vec{v} = (1, 5, \lambda)$$

pertenece a S .

Solución.

El vector $\vec{v}$ pertenece a S si y solo si al añadirlo a los vectores generadores no aumenta el rango. Por tanto, comparamos

$$\text{rg}(\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3) = \text{rg} \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 7 & -1 \end{pmatrix}$$

con

$$\text{rg}(\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3, \vec{v}) = \text{rg} \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 7 & -1 \\ 1 & 5 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Comenzamos calculando el rango de la primera matriz. Para facilitar el escalonamiento, cambiamos de signo la segunda fila e intercambiamos las dos primeras filas:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 7 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 \rightarrow -F_2} \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 7 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \\ 0 & 7 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ahora anulamos los elementos que están por debajo del primer elemento no nulo de la primera fila:

$$\xrightarrow{F_2 \rightarrow F_2 - 3F_1} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 7 & -1 \\ 0 & 7 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 \rightarrow F_3 - F_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 7 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por tanto,

$$\text{rg} \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 7 & -1 \end{pmatrix} = 2.$$

Ahora añadimos $\vec{v}$ como una nueva fila:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 7 & -1 \\ 1 & 5 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Realizamos las mismas operaciones iniciales:

$$F_2 \xrightarrow{\sim} -F_2 \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 7 & -1 \\ 1 & 5 & \lambda \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \\ 0 & 7 & -1 \\ 1 & 5 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Anulamos ahora los elementos situados debajo del primer elemento no nulo de la primera fila:

$$\begin{matrix} F_2 \rightarrow F_2 - 3F_1 \\ F_4 \rightarrow F_4 - F_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 7 & -1 \\ 0 & 7 & -1 \\ 0 & 7 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Finalmente, anulamos los elementos situados debajo del primer elemento no nulo de la segunda fila:

$$\begin{matrix} F_3 \rightarrow F_3 - F_2 \\ F_4 \rightarrow F_4 - F_2 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 7 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda + 1 \end{pmatrix}.$$

Por tanto tenemos

$$\text{rg}(\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3, \vec{v}) = \begin{cases} 2, & \lambda = -1 \\ 3, & \lambda \neq -1 \end{cases}.$$

Es decir, $\vec{v} \in S$ si $\lambda = -1$, y por otra parte $\vec{v} \notin S$ si $\lambda \neq -1$. En conclusión,

$$\boxed{\vec{v} \in S \iff \lambda = -1.}$$

Algunas propiedades sobre la dimensión

- (a) $S \subseteq T \implies \dim(S) \leq \dim(T)$.
En particular, $S \subseteq \mathbb{R}^n \implies \dim(S) \leq n$.
- (b) $S \subseteq T$ y $\dim(S) = \dim(T) \implies S = T$.
En particular, $S \subseteq \mathbb{R}^n$ y $\dim(S) = n \implies S = \mathbb{R}^n$.
- (c) Si $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_r\}$ es una familia libre de vectores del (sub)espacio vectorial V y $\dim(V) = k$, entonces $r \leq k$.
En particular, $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_r\}$ familia libre de vectores de $\mathbb{R}^n \implies r \leq n$.

Jueves 17 de septiembre

Empecemos por revisar el ejemplo del miércoles, en el que empleamos dos métodos. Vamos a ver cómo podemos rehacerlo, utilizando el método 1 de la comparación de los rangos, para ver cómo podemos obtener la combinación lineal exacta en la que expresar $\vec{v}$ como combinación lineal de $\vec{w}_1$ y $\vec{w}_2$, sin utilizar el método 2.

Ejemplo

Sean

$$\vec{w}_1 = (2, 5, 0), \quad \vec{w}_2 = (-1, -1, -2),$$

y sea

$$S = \langle \vec{w}_1, \vec{w}_2 \rangle.$$

Se trata de determinar si el vector

$$\vec{v} = (-1, 2, -6)$$

pertenece a S , y en tal caso expresar $\vec{v}$ como combinación lineal de $\vec{w}_1, \vec{w}_2$.

Solución.

Para determinar si $\vec{v}$ pertenece a S , consideramos la matriz cuyas filas son $\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{v}$, como hicimos, pero esta vez vamos a añadir a la derecha una matriz identidad:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 5 & 0 & \vec{w}_1 & \vec{w}_2 & \vec{v} \\ -1 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -6 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right).$$

Las tres primeras columnas contienen los vectores $\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{v}$, mientras que las tres últimas columnas nos permitirán registrar las operaciones realizadas sobre las filas. Los coeficientes que aparecerán en cada paso, en una fila dada de la matriz de la derecha, indican la combinación lineal exacta de $\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{v}$ en la que expresar el vector fila de la matriz de la derecha.

Para facilitar el escalonamiento, cambiamos primero de signo la segunda fila e intercambiamos las dos primeras filas:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -6 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_2 \rightarrow -F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -6 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -6 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

Ahora anulamos los elementos que están por debajo del 1 de la primera fila:

$$\begin{array}{l} F_2 \rightarrow F_2 - 2F_1 \\ F_3 \rightarrow F_3 + F_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -4 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -4 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right).$$

Por ejemplo, viendo la segunda fila, vemos que el vector $(0, 3, -4)$ puede expresarse como combinación lineal de $\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{v}$ como

$$(0, 3, -4) = \vec{w}_1 + 2\vec{w}_2 + 0\vec{v}.$$

Finalmente, anulamos la tercera fila:

$$F_3 \rightarrow F_3 - F_2 \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -4 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -3 & 1 \end{array} \right).$$

La última fila nos proporciona la información que buscamos. Las tres primeras entradas son cero, lo que significa que hemos obtenido una combinación lineal nula de los tres vectores:

$$-1\vec{w}_1 - 3\vec{w}_2 + 1\vec{v} = \vec{0}.$$

Por tanto,

$$\vec{v} = \vec{w}_1 + 3\vec{w}_2.$$

En efecto,

$$(2, 5, 0) + 3(-1, -1, -2) = (-1, 2, -6).$$

Así pues,

$$\boxed{\vec{v} \in S}$$

y la combinación lineal buscada es

$$\boxed{\vec{v} = \vec{w}_1 + 3\vec{w}_2}.$$

A modo de resumen: la matriz identidad que hemos añadido a la derecha sirve para “recordar” las operaciones realizadas sobre las filas. Al finalizar, la última fila de la parte izquierda se ha convertido en

$$\vec{0} = (0, 0, 0),$$

mientras que la parte derecha contiene

$$(-1, -3, 1).$$

Estos números son precisamente los coeficientes de una combinación lineal de $\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{v}$ que da cero:

$$-\vec{w}_1 - 3\vec{w}_2 + \vec{v} = \vec{0}.$$

Despejando $\vec{v}$, obtenemos la combinación lineal buscada.

Coordenadas de un vector en una base

Si $S \subseteq \mathbb{R}^n$ es un subespacio vectorial de dimensión d , y $\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_d$ es una base, existen $t_1, \dots, t_d$ **únicos** tal que

$$\vec{v} = t_1 \vec{b}_1 + \dots + t_d \vec{b}_d.$$

Que existan se debe a que una base siempre genera, y que son únicos se debe a que si

$$\vec{v} = t_1 \vec{b}_1 + \dots + t_d \vec{b}_d$$

y

$$\vec{v} = s_1 \vec{b}_1 + \dots + s_d \vec{b}_d,$$

entonces

$$\vec{0} = \vec{v} - \vec{v} = (t_1 - s_1) \vec{b}_1 + \dots + (t_d - s_d) \vec{b}_d,$$

y como $\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_d$ son linealmente independientes, esto implica que

$$t_1 = s_1, \quad t_2 = s_2, \quad \dots, \quad t_d = s_d.$$

Definición

A esos escalares únicos $(t_1, \dots, t_d)$ se le llaman las *coordenadas del vector* $\vec{v} \in S$ en la base $\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_d$.

No debería de extrañar que $(t_1, \dots, t_d)$ sea un elemento de $\mathbb{R}^d$. De hecho, poner coordenadas es una manera de “identificar” el subespacio d -dimensional S con $\mathbb{R}^d$: en ambos casos, un vector está determinado por una colección de d números!

Ejemplo

(1) Ya hemos dicho que cada vector $\vec{v} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ es combinación lineal de la familia anterior, siendo los escalares las propias componentes del vector:

$$\vec{v} = x_1 \vec{e}_1 + \dots + x_n \vec{e}_n.$$

Como $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ son base de $\mathbb{R}^n$, las coordenadas del vector $\vec{v}$ en dicha base son $(x_1, \dots, x_n)$. ¡Las mismas! Por eso a la base $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ se le llama la base canónica de $\mathbb{R}^n$.

(2) Sean

$$\vec{w}_1 = (2, 5, 0), \quad \vec{w}_2 = (-1, -1, -2),$$

y sea

$$S = \langle \vec{w}_1, \vec{w}_2 \rangle$$

del ejemplo anterior. Los vectores $\vec{w}_1, \vec{w}_2$ son linealmente independientes, y generan S , así que

forman una base de S . ¿Cuáles son las coordenadas del vector

$$\vec{v} = (-1, 2, -6)$$

en dicha base?

Como $\vec{v} = \vec{w}_1 + 3\vec{w}_2$, entonces sus coordenadas en dicha base son $(1, 3)$.

Matrices

Todos habéis visto matrices, pero a modo de repaso:

Definición

Una *matriz* A de *orden* $m \times n$ sobre $\mathbb{R}$ es un cuadro de números reales dispuestos en m filas y n columnas:

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

La matriz se escribe en la forma abreviada $A = (a_{ij})$ siendo a_{ij} al número real que ocupa la intersección de la fila i -ésima con la columna j -ésima. Dos matrices $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$ son iguales si son del mismo orden y sus elementos con índices iguales coinciden: $a_{ij} = b_{ij}$ para cada i, j .

Las matrices $m \times n$ se suman y se multiplican por escalares como los vectores, componente a componente, y tienen las mismas propiedades; se tratan como si fuera un vector de $\mathbb{R}^{mn}$ escrito en una disposición particular. Al fin y al cabo, dar una matriz $m \times n$ consiste simplemente en dar m vectores (vectores fila) de $\mathbb{R}^n$.

Ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 0 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -10 \\ 4 & 3 & -1 \end{pmatrix}, A+B = \begin{pmatrix} 3 & -7 & -10 \\ 9 & 4 & 1 \end{pmatrix}, 7A = \begin{pmatrix} 21 & -35 & 0 \\ 35 & 7 & 14 \end{pmatrix}.$$

También podemos multiplicar matrices:

Definición

Si $A = (a_{ij})$ es una matriz $m \times n$ y $B = (b_{ij})$ es una matriz $n \times r$, llamaremos *producto de A por B* a la matriz $A \cdot B = (c_{ij})$ de tamaño $m \times r$ dada por

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}$$

Ejercicio

Comprobar que la multiplicación $A \cdot B$ se puede hacer de la siguiente manera: si $A = (a_{ij})$ y B es una matriz cuya i -ésima fila está dado por un vector $B_i \in \mathbb{R}^r$, entonces la fila i -ésima de $A \cdot B$ está dada el vector $a_{i1}B_1 + a_{i2}B_2 + \cdots + a_{in}B_n$.

Cuando los productos indicados son posibles, se cumplen las siguientes propiedades:

- Asociativa: $A(BC) = (AB)C$.
- Elemento neutro: Si $A \in \mathcal{M}(m \times n)$ se verifica $I_m A = A I_n = A$, donde I_n es la matriz identidad de orden n ,

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

- Distributiva del producto con respecto de la suma:

$$A(B + C) = AB + AC \quad , \quad (B + C)A = BA + CA.$$

En general, el producto de matrices no es conmutativo. Si A es una matriz $m \times n$ y B es una matriz $n \times m$, las multiplicaciones AB y BA tienen sentido. AB será una matriz $m \times m$ y BA una matriz $n \times n$. Para que AB y BA sean iguales es necesario que $m = n$, pero incluso en ese caso pueden ser diferentes.

Definición

Si A es una matriz cuadrada de orden n , diremos que A es *invertible* si existe una matriz cuadrada B del mismo orden que verifica $BA = AB = I_n$. Si existe, esta matriz es necesariamente única, porque si C es otra matriz que satisface $CA = AC = I_n$, entonces

$$B = BI_n = BAC = I_n C = C.$$

la llamaremos *matriz inversa* de A y la denotaremos por A^{-1} ; las ecuaciones que la definen son

$$A^{-1}A = AA^{-1} = I_n.$$

En realidad, basta comprobar una de las igualdades $BA = I_n$ ó $AB = I_n$ para asegurar la otra igualdad.

¿Cómo calcular la inversa de una matriz?

Sea A una matriz $n \times n$. Para calcular su inversa, buscamos una matriz

$$B = (b_{ij})$$

de orden n tal que

$$BA = I_n.$$

Denotemos por $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ las filas de A . Por el ejercicio anterior (que debéis hacer!), la fila i -ésima de BA es el vector fila

$$b_{i1}\vec{v}_1 + b_{i2}\vec{v}_2 + \dots + b_{in}\vec{v}_n.$$

Por tanto, la condición $BA = I_n$ equivale a exigir que

$$\begin{pmatrix} b_{11}\vec{v}_1 + b_{12}\vec{v}_2 + \dots + b_{1n}\vec{v}_n \\ b_{21}\vec{v}_1 + b_{22}\vec{v}_2 + \dots + b_{2n}\vec{v}_n \\ \vdots \\ b_{n1}\vec{v}_1 + b_{n2}\vec{v}_2 + \dots + b_{nn}\vec{v}_n \end{pmatrix} = I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Ahora bien, lo explicado en el primer ejemplo es que estas combinaciones lineales del tipo $b_{i1}\vec{v}_1 + b_{i2}\vec{v}_2 + \dots + b_{in}\vec{v}_n$ de las filas de A son las que obtenemos al realizar operaciones elementales por filas sobre A , donde los coeficientes b_{ij} son los coeficientes que aparecen en la parte derecha cuando hemos añadido la matriz identidad:

$$\left(A \mid I_n \right).$$

Cada operación elemental por filas que aplicamos a la parte izquierda transforma sus filas en nuevas combinaciones lineales de las filas originales de A . Al realizar exactamente las mismas operaciones sobre la parte derecha, los coeficientes de dichas combinaciones lineales quedan registrados en la matriz que inicialmente era I_n .

Por tanto, si mediante operaciones elementales conseguimos transformar A en I_n ,

$$\left(A \mid I_n \right) \longrightarrow \left(I_n \mid B \right),$$

la matriz B que se obtiene a la derecha una vez que en la parte izquierda hemos obtenido la matriz identidad contiene los coeficientes de las combinaciones lineales de las filas de A que producen las filas de I_n (porque buscamos B tal que $BA = I_n$). Es decir,

$$\boxed{B = A^{-1}}.$$

A esta forma de calcular la inversa de una matriz se le llama el *método de Gauss–Jordan*:

$$\boxed{\left(A \mid I_n \right) \xrightarrow{\text{operaciones elementales por filas}} \left(I_n \mid A^{-1} \right)}.$$

Ahora bien: ¿cuándo podemos transformar nuestra matriz cuadrada A en la matriz identidad por operaciones de fila? Como ya hemos explicado, las operaciones fila no cambian el rango, así que para poder transformar A en la identidad necesitamos

$$\text{rg}(A) = \text{rg}(I) = n.$$

De no ser así, obtendríamos una fila de ceros, ya que el rango sería menos estrictamente de n .

Por tanto:

Importante

Si A es una matriz cuadrada de orden n , entonces

$$A \text{ es invertible} \iff \operatorname{rg}(A) = n.$$

Notar que como A es una matriz cuadrada de orden n , entonces que A tenga rango n significa que A se puede convertir en una matriz escalonada donde ninguna de las filas tiene todos sus coeficientes cero. Esto equivale exactamente a decir que A puede transformarse en la matriz identidad por transformaciones de fila (primero se hacen cero la parte triangular inferior, y después la superior).

En la próxima clase, haremos algunos ejemplos de calcular inversas de matrices usando el método de Gauss–Jordan.

Jueves 24 de septiembre

La semana pasada explicamos cómo calcular la inversa de una matriz por el método de Gauss-Jordan. A modo de resumen, aquí va una receta:

Receta para calcular la inversa de una matriz mediante Gauss-Jordan

Sea A una matriz cuadrada. Para calcular A^{-1} , seguimos estos pasos:

1. Escribimos la matriz A junto a la matriz identidad del mismo tamaño:

$$\left(A \mid I \right).$$

2. Aplicamos operaciones elementales por filas para tratar de transformar la parte izquierda en la matriz identidad:

$$\left(A \mid I \right) \longrightarrow \left(I \mid B \right).$$

3. Si en la parte izquierda obtenemos una fila de ceros, A no es invertible.

Si nunca obtenemos una fila de ceros en la parte izquierda, entonces la parte izquierda sí se puede convertir en I , y la matriz que obtenemos en la parte derecha es precisamente la matriz inversa de A :

$$\boxed{B = A^{-1}}.$$

Ejemplo

Calculemos la inversa de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Para encontrar la inversa, colocamos la matriz identidad a la derecha de A y aplicamos operaciones elementales por filas hasta transformar A en la identidad:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

Primero hacemos

$$F_2 \rightarrow F_2 - F_1 :$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{array} \right).$$

Multiplicamos la segunda fila por -1 :

$$F_2 \rightarrow -F_2 :$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array} \right).$$

Finalmente, hacemos

$$F_1 \rightarrow F_1 - 2F_2 :$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array} \right).$$

Hemos transformado A en la matriz identidad. Por tanto, A es invertible (no hemos obtenido ninguna fila de ceros en el proceso) y la matriz que ha quedado a la derecha es A^{-1} :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ejemplo

Calcular, en función del parámetro $\lambda \in \mathbb{R}$, la inversa de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Aquí, es inmediato saber cuándo la matriz es invertible: A ya es una matriz escalonada, independientemente del valor de λ . Por tanto $\text{rg}(A)$ es el número de filas no nulas. O sea, si $\lambda = 0$, A no es invertible, y si $\lambda \neq 0$, A sí es invertible.

Calculemos ahora la inversa de A cuando ésta existe, es decir cuando $\lambda \neq 0$. De nuevo, colocamos la matriz identidad a la derecha de A y aplicamos operaciones elementales por filas:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 1 \end{array} \right).$$

Dividimos la segunda fila entre λ :

$$F_2 \rightarrow \frac{1}{\lambda} F_2 :$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{\lambda} \end{array} \right).$$

Finalmente, hacemos

$$F_1 \rightarrow F_1 - 2F_2 :$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & -\frac{2}{\lambda} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{\lambda} \end{array} \right).$$

Por tanto, para $\lambda \neq 0$,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{\lambda} \\ 0 & \frac{1}{\lambda} \end{pmatrix}.$$

Más sobre el rango de una matriz

Sea A una matriz de orden $m \times n$. Recordad que el rango de A se ha definido como el número máximo de filas linealmente independientes. Ahora bien, ¿qué se puede decir sobre las columnas de A ?

Ya vimos que las operaciones elementales por filas no cambian las relaciones de dependencia lineal entre las filas (fue un ejercicio). ¡Pero lo mismo pasa con la dependencia lineal de las columnas!

De forma intuitiva, veamos por qué: supongamos que

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

y sumamos la segunda fila a la primera,

$$A' = \begin{pmatrix} a_{11} + a_{21} & a_{12} + a_{22} & \cdots & a_{1n} + a_{2n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Afirmo que las columnas $C_1, \dots, C_n$ de A son linealmente dependientes (o independientes) si y solo si las columnas $C'_1, \dots, C'_n$ de A' son linealmente dependientes (o independientes).

Para ver por qué pasa, imaginad que tenemos una relación de dependencia lineal entre las columnas

$$t_1 C_1 + \cdots + t_n C_n = \vec{0}.$$

En coordenadas, esta igualdad se traduce al sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} a_{11}t_1 + a_{12}t_2 + \cdots + a_{1n}t_n = 0 \\ a_{21}t_1 + a_{22}t_2 + \cdots + a_{2n}t_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}t_1 + a_{m2}t_2 + \cdots + a_{mn}t_n = 0 \end{cases}$$

Pero entonces si escribimos en coordenadas $t_1 C'_1 + \cdots + t_n C'_n$ obtenemos

$$\begin{cases} (a_{11} + a_{21})t_1 + (a_{12} + a_{22})t_2 + \cdots + (a_{1n} + a_{2n})t_n = 0 \\ a_{21}t_1 + a_{22}t_2 + \cdots + a_{2n}t_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}t_1 + a_{m2}t_2 + \cdots + a_{mn}t_n = 0 \end{cases}$$

así que si $t_1, \dots, t_n$ son soluciones al primer sistema de ecuaciones, también lo son para el segundo,

porque la primera ecuación resulta de la suma de las dos primeras ecuaciones del sistema original. Por tanto

$$t_1 C'_1 + \cdots + t_n C'_n = \vec{0}$$

para los mismos t_i .

En resumen,

Importante

Las operaciones elementales en filas no cambia la dependencia o independencia lineal de las columnas de una matriz.

¿Por qué es útil esto? Recordad que, mediante operaciones elementales por filas, podemos transformar A en una matriz escalonada:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} a'_{11} & * & * & * & \cdots & * \\ 0 & a'_{22} & * & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & 0 & a'_{34} & \cdots & * \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & a'_{kn} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

donde los símbolos $*$ representan números cualesquiera y los primeros elementos a'_{ij} de las filas no nulas son los llamados *pivotes*, que son no nulos. Cuando tenemos una matriz escalonada, es muy fácil decir cuál es el rango: es el número de filas no nulas, porque los “escalones” hacen que las filas no nulas no puedan ser combinación lineal de las otras. Claro, pero cuando la matriz es escalonada, ¡el mismo argumento se puede hacer sobre las columnas! Las columnas a las que pertenecen los pivotes son linealmente independientes, y éste es el número máximo de columnas linealmente independientes. ¿Cuántos pivotes hay? Tantas como filas no nulas, es decir, ¡tantas como el rango de la matriz!

Como las operaciones elementales no cambian la dependencia o independencia lineal de las columnas, lo mismo se puede decir de las columnas de A . Es decir:

Importante

El rango de una matriz A es igual al número máximo de columnas linealmente independientes de A :

$$\text{rg}(A) = (\text{n.º máx. de filas lin. indep.}) = (\text{n.º máx. de columnas lin. indep.})$$

Por tanto, a modo de resumen:

Rango de una matriz

Si A es una matriz $m \times n$ con vectores fila $F_1, \dots, F_m \in \mathbb{R}^n$ y vectores columna $C_1, \dots, C_n \in \mathbb{R}^m$, entonces

$$\begin{aligned}\operatorname{rg}(A) &= \operatorname{rg}(F_1, \dots, F_m) \\ &= (\text{n.º máx. de filas lin. indep.}) \\ &= \dim \langle F_1, \dots, F_m \rangle \\ &= \operatorname{rg}(C_1, \dots, C_n) \\ &= (\text{n.º máx. de columnas lin. indep.}) \\ &= \dim \langle C_1, \dots, C_n \rangle.\end{aligned}$$