

Ejercicios Tema 1

- En el espacio vectorial $\mathbb{R}^4$ consideramos los vectores $(1, 1, 0, a)$, $(3, -1, b, -1)$ y $(-3, 5, a, -4)$. Determinar los valores de a y b para que estos vectores sean linealmente dependientes y dar la combinación lineal que los liga.
- Encontrar el valor de a para que el vector $(1, 5, a)$ pertenezca al subespacio engendrado por los vectores $(3, 1, -1)$, $(-1, 2, 0)$ y $(0, 7, -1)$. Asimismo, determinar, según los valores de t , cuándo son linealmente independientes los siguientes vectores de $\mathbb{R}^3$: $(1, t, 1)$, $(1, 1, t)$ y $(t, 1, 1)$.
- ¿Puede una familia de vectores que contiene al vector $\vec{0}$ ser linealmente independiente? Justifica tu respuesta.
- Consideramos las siguientes familias de vectores:
 $A = \{(1, 3, 2), (1, 0, -1), (2, -3, 5)\}$; $B = \{(0, 2, -1), (4, 3, -2), (4, 1, -1)\}$;
 $C = \{(1, 2, 1, 3), (2, 1, 4, 3), (1, 3, 2, 1)\}$; $D = \{(1, 2, -1, 1), (3, -1, 2, 1), (2, -3, -3, 0), (4, 1, -5, 2)\}$.
 (a) Determinar cuáles de ellas son linealmente independientes.
 (b) Considerar el subespacio generado por cada una de las familias. Hallar bases y dimensiones de cada uno de ellos.
- Consideramos los vectores $\vec{u} = (4, -5, 7)$, $\vec{v} = (3, -3, 4)$, $\vec{w} = (1, 1, -2)$ y $\vec{z} = (2, -1, 1)$ de $\mathbb{R}^3$. Hallar $S = \langle \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{z} \rangle$. ¿Es $S = \langle (1, -2, 3), (3, 0, -1) \rangle$?
- Decidir si la siguiente afirmación es verdadera o falsa, justificando la respuesta: si $\vec{v}$ es combinación lineal de $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$, entonces $\vec{v}_1$ es combinación lineal de $\vec{v}$ y $\vec{v}_2$.
- Decir cuáles de los siguientes subconjuntos son subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^4$:

$$R = \{(a, b, c, d) \mid a = 0\}, \quad S = \{(3a, a, a+b, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}, \quad T = \{(a, b, c, d) \mid 2a+4d = 1\}.$$

En su caso, hallar una base de los subespacios.

- Explicar por qué no puede haber un conjunto $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ de tres vectores linealmente independientes en $\mathbb{R}^2$.
- Si $S, T \subseteq \mathbb{R}^n$ son dos subespacios vectoriales, comprobar que su intersección

$$S \cap T = \{\vec{v} \in \mathbb{R}^n : \vec{v} \in S \text{ y } \vec{v} \in T\}$$

es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$.

- Determinar, en los casos en que sea posible, $(AB)C$, $A(BC)$, $(A+B)C$, $A(B+C)$ si:

$$(i) \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$(ii) \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}^t.$$

11. Demostrar que el producto de dos matrices diagonales es una matriz diagonal.
12. Comprobar que $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$ no conmutan y que $(A + B)^2 = A^2 + B^2$.
13. Si $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, demostrar que $(A + B)^t = A^t + B^t$, $cA^t = (cA)^t$, con $c \in \mathbb{R}$.
14. Si $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, demostrar que $(AB)^t = B^t A^t$.
15. Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$, demostrar que $A + A^t$ y AA^t son matrices simétricas mientras que $A - A^t$ es antisimétrica.
16. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$.
- Obtener el conjunto de las matrices cuadradas B tales que $AB = 0$.
 - Obtener el conjunto de las matrices cuadradas C tales que $CA = I$.
17. Calcular la matriz $C = A + AB + AB^2 + \dots + AB^{n-1}$ donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

18. Calcular el rango de las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 0 & 2 \\ 3 & -3 & 0 & 3 \\ 5 & -5 & 0 & 5 \\ 7 & -8 & 0 & 8 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

19. Estudiar el rango de las siguientes matrices, según los valores de a, b, c , en los casos correspondientes

$$\begin{pmatrix} a & b \\ a-b & a+b \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 5 & 1 & a \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}.$$

20. Hallar la inversa de las siguientes matrices:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

21. Supongamos que A, B, C son matrices cuadradas del mismo orden, y que A es invertible. Probar que si $(B - C)A$ es igual a la matriz cuadrada cero (la matriz cuyos todos coeficientes son cero), entonces $B = C$.

22. Calcular el valor de k para que las siguientes matrices tengan inversa. Calcular las inversas.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & k & 3 \\ 4 & 1 & -k \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & k & k \\ 2 & 0 & k \\ k & k & k \end{pmatrix}.$$

23. Sea A una matriz $n \times n$ que cumple que su última fila es la suma de todas las filas anteriores. ¿Es A invertible?

24. Resolver

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & x-5 \\ 4 & 2+x & x \\ -1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3x-6 & 4 & x+4 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ 3 & 1+x & 4 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

25. Calcular el valor de los siguientes determinantes:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} x & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x & -1 \\ a & b & c & d & e & x-f \end{vmatrix}, \quad C = \begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix}.$$

26. Resolver los siguientes sistemas matriciales:

$$\begin{aligned} & \left\{ Y \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = X \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad y \quad X + Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\} \\ & \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} Y = X \quad y \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

27. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ 2y - z = 1 \\ -x + y = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} 4x + y + z + w = 1 \\ x - y + 2z - 3w = 0 \\ 2x + y + 3z + 5w = 0 \\ x + y - z - w = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x - y + 2z - w = 0 \\ 2x + 3y - 4z + 2w = 0 \\ 3x + z - w = 0 \end{cases}$$

28. Discutir los siguientes sistemas, según los distintos valores de a y b , y resolverlos en los casos posibles:

$$\begin{aligned} & \begin{cases} 3x + 2y + 6z = 0 \\ 2x + y + az = 0 \\ x - 3y - 2z = 0 \end{cases} & \begin{cases} x - ay + z = 0 \\ x + y - z = 0 \\ bx - 2y - 5z = 0 \\ 2x + y + z = 0 \end{cases} & \begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ x + (a+1)y - 1 = 0 \\ x + y - b - 1 = 0 \end{cases} \\ & \begin{cases} ax + by + z = 1 \\ x + aby + z = b \\ x + by + az = 1 \end{cases} & \begin{cases} ax + by + z = 0 \\ x + by + az = 0 \\ x + aby + z = 0 \end{cases} & \begin{cases} 5x - 11y + 9z = a \\ x - 3y + 5z = 2 \\ 2x - 4y + 2z = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

29. Hallar los valores y vectores propios de las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -6 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Calcular los subespacios fundamentales correspondientes.

30. Considerar la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 24 \\ -4 & -8 & -24 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

- (a) Probar que los vectores $(4, -4, 1)$ y $(0, 4, -1)$ son vectores propios de A . Hallar los valores propios asociados.
- (b) Encontrar otro vector propio de A , de valor propio -4 .
31. (a) Discutir, en función de los valores de a , y resolver, en los casos en los que sea posible, el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{aligned} x - y &= a \\ x + 2y - az &= a \\ ax - z &= 3 \end{aligned}$$

- (b) Sea A la matriz del sistema anterior. Calcular (para cualquier valor de a) su polinomio característico. Para $a = \sqrt{3}$ determinar los valores y vectores propios.
32. (a) Discutir, en función de los valores de a y b , y resolver, en los casos en los que sea posible, el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{aligned} x - y &= -1 \\ x - 2y - z &= -2 \\ x + y + az &= -b \end{aligned}$$

- (b) Sea A la matriz del sistema anterior. Calcular (para cualquier valor de a) su polinomio característico. Para $a = 2$ determinar los valores y vectores propios.
33. Sea A la matriz del sistema

$$\begin{aligned} x - z &= a \\ y - z &= 1 \\ ax + az &= 2a + 1 \end{aligned}$$

Resolver el sistema según los valores del parámetro a .

34. Discutir y resolver, según los valores del parámetro a , el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 3x + az = a, \\ x - y - z = 0, \\ y + z = a. \end{cases}$$

35. Hallar los valores de a para que sea inversible la matriz A siguiente:

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 2 \\ 1 & a & 2 \\ 1 & 2 & a \end{pmatrix}.$$

Tomando a partir de ahora $a = 1$, calcula: (a) los valores propios de A ; (b) una base de cada uno de los subespacios de vectores propios.

36. Encontrar, en función del parámetro a , las soluciones del sistema

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ ay + z = 0 \\ x + (a + 1)y + az = a + 1 \end{cases}$$

37. Considerar la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & b \end{pmatrix}$. Hallar los valores propios y los subespacios de vectores propios asociados a dichos valores propios.

38. Discutir y resolver, según los valores del parámetro a , el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x + y + az = a \\ x + z = 0 \\ y + z = a \end{cases}$$