Geometría y Topología de Superficies
Curso 2026/2027

# Problemas - Variedades topológicas, CW-complejos y complejos simpliciales

Última vez actualizado: 10 de noviembre de 2026

El símbolo ⚠ denota ejercicios difíciles, y van acompañados de una indicación para hacerlos.

1. Probar que una variedad topológica, con o sin borde, es conexa si y sólo si es arco-conexa.
2. Probar que el interior de una variedad topológica con borde es una variedad topológica de la misma dimensión.
3. Probar que $X = \{x \in \mathbb{R}^n : ||x|| \geq 1\}$ es una variedad topológica con borde de dimensión $n$.
4. Decidir razonadamente si los siguientes espacios son o no variedades topológicas (con o sin borde). Para aquellas con borde, describir su borde.

   *a)* $[0, 1)$
   *b)* $[0, +\infty)$
   *c)* $[-3, 2] \cup [4, 5]$
   *d)* $\mathbb{Q}$
   *e)* $[1, 2] \times [3, 5]$
   *f)* $S^1/(i \sim -i)$
   *g)* La curva seno del topólogo
   *h)* $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = |x|\}$
   *i)* $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$
   *j)* $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + |y| = 1\}$
   *k)* $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$
   *l)* $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 1\,,\, 0 \leq y \leq 1/x\}$
   *m)* $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 = y^3\}$
   *n)* $\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{\frac{1}{n}\} \times [0, 1]\right) \cup ([0, 1] \times 0)$
   *ñ)* $S^1 \vee S^2$
   *o)* $S^2 \vee S^2$

5. Probar que la unión disjunta de dos $n$-variedades (con o sin borde) es una $n$-variedad (con o sin borde).

   Si $X, Y$ son variedades con borde, ¿qué es $\partial(X \amalg Y)$?

**Definición.** Se llama *espacio proyectivo real de dimensión* $n$ al espacio cociente

$$\mathbb{RP}^n := \frac{\mathbb{R}^{n+1} - 0}{\sim}$$

donde $x \sim y$ si y sólo si $y = \lambda x$ para algún $\lambda \neq 0$.

Dado $x = (x_0, x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} - 0$, se dice que el punto $[x] \in \mathbb{RP}^n$ tiene *coordenadas homogéneas* $[x_0 : x_1 : \ldots : x_n]$, y estas están bien definidas salvo multiplicación por un escalar no nulo.

El ejercicio 6, de topología general, nos facilitará bastante las cosas para el 7:

6. Sea $X$ un espacio topológico, sea $\sim$ una relación de equivalencia en $X$ y supongamos que la aplicación $\pi : X \to X/\sim$ de paso al cociente es una aplicación abierta.

*a*) Probar que $X/\sim$ es Hausdorff si y sólo si

$$R := \{(x, y) \in X \times X : x \sim y\} \subset X \times Y$$

es cerrado.

*b*) Probar que si $X$ es segundo contable, también lo es $X/\sim$.

7. El propósito de este ejercicio es probar que $\mathbb{RP}^n$ es una variedad topológica de dimensión $n$.

   *a*) Probar que $\pi : \mathbb{R}^{n+1} - 0 \to \mathbb{RP}^n$ es una aplicación abierta.

   *b*) Concluir que $\mathbb{RP}^n$ es Hausdorff y segundo contable.

   *c*) Sea $U_i$ el subconjunto de puntos de $\mathbb{RP}^n$ cuya coordenada homogénea $i$-ésima es distinta de cero. Probar que está bien definido y es un abierto de $\mathbb{RP}^n$.

   *d*) Probar que $\mathbb{RP}^n = U_0 \cup \cdots \cup U_n$.

   *e*) Producir, para cada $i = 0, \ldots, n$, un homeomorfismo

   $$U_i \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}^n.$$

   *f*) Concluir que $\mathbb{RP}^n$ es una variedad topológica de dimensión $n$.

8. Consideremos, sobre $S^n$, la relación de equivalencia que identifica puntos antipodales, $x \sim -x$ para todo $x \in S^n$. Probar que $S^n/\sim$ es homeomorfo a $\mathbb{RP}^n$.

9. Consideremos, sobre $D^n$, la relación de equivalencia que identifica puntos antipodales en el borde, $x \sim -x$ para todo $x \in \partial D^n$. Probar que $D^n/\sim$ es homeomorfo a $\mathbb{RP}^n$.

10. Probar que $\mathbb{RP}^n$ es un espacio topológico compacto.

11. Probar que $\mathbb{RP}^1$ es homeomorfo a $S^1$.

12. ⚠ Probar que el *espacio proyectivo complejo de dimensión* $n$,

    $$\mathbb{CP}^n := \frac{\mathbb{C}^{n+1} - 0}{\sim}$$

    donde $x \sim y$ si y sólo si $y = \lambda x$ para algún $\lambda \in \mathbb{C} - 0$, es una variedad topológica de dimensión $2n$.

    (*Indicación:* Proceder como en el ejercicio 7).

13. ⚠ Probar que $\mathbb{CP}^1$ es homeomorfo a $S^2$.

    (*Indicación:* Utilizar la compactificación por un punto)

**Definición.** Sea $X$ un espacio topológico, sea $\sim$ una relación de equivalencia en $X$ y $\pi : X \to X/\sim$ la aplicación de paso al cociente. Un subconjunto $A \subset X$ se dice *saturado* (respecto a $\sim$) si $\pi^{-1}(\pi(A)) = A$.

14. Probar que $A \subset X$ es saturado si y sólo si dados $x \in A$ e $y \in X$ con $x \sim y$, se tiene que $y \in A$.

15. Sea $X$ un espacio topológico, sea $\sim$ una relación de equivalencia en $X$ y sea $A \subset X$ un subespacio cerrado y saturado. Probar que la aplicación inducida

    $$A/\sim \to X/\sim$$

    es una inmersión.

    (*Pista:* Probar que es una aplicación continua, inyectiva y cerrada, y concluir el ejercicio 29 de la hoja 1)

16. Probar que para $n \neq 1$, la aplicación

$$\mathbb{RP}^{n-1} \to \mathbb{RP}^n \qquad , \qquad [x_0 : \ldots : x_{n-1}] \mapsto [x_0 : \ldots : x_{n-1} : 0]$$

es una inmersión.

(*Pista:* Probar que $\mathbb{R}^n - 0 \subset \mathbb{R}^{n+1} - 0$ es cerrado y saturado, y usar el ejercicio anterior).

17. Probar que $\mathbb{RP}^n - \mathbb{RP}^{n-1}$ es homeomorfo a $\mathbb{R}^n$ (aquí $\mathbb{RP}^n$ se identifica con un subespacio de $\mathbb{RP}^{n+1}$ gracias al ejercicio anterior).

**Definición.** Dos $n$-variedades cerradas $X, Y$ se dicen *cobordantes* si existe una $(n+1)$-variedad compacta con borde $W$, llamada *cobordismo*, tal que $\partial W = X \amalg Y$. Se dice que la $(n+1)$-variedad $W$ es un *cobordismo* entre $X$ e $Y$.

18. Probar que la relación de ser cobordantes es una relación de equivalencia.

**Definición.** Dado $n \geq 0$, denotaremos como $\Omega_n$ al cociente del conjunto de $n$-variedades cerradas módulo cobordismo.

19. Probar que

$$[X] + [Y] := [X \amalg Y] \qquad , \qquad \mathbf{0} := [\emptyset] \qquad , \qquad -[X] := [X]$$

dota a $\Omega_n$ de estructura de grupo abeliano.

Este grupo se llama el *$n$-ésimo grupo de cobordismos* (topológicos no orientados).

20. Probar que todo elemento de $\Omega_n$ es de 2-torsión.

21. Dada una $n$-variedad $X$, probar que en $\Omega_n$ se tiene que $[X] = \mathbf{0}$ si y sólo si $X = \partial W$ para alguna $(n+1)$-variedad con borde $W$.

22. Probar que

$$[X] \cdot [Y] := [X \times Y] \qquad , \qquad \mathbf{1} := [pto] \in \Omega_1$$

dota a $\Omega_* := \bigoplus_{n=0}^{\infty} \Omega_n$ de estructura de anillo conmutativo.

Este anillo se llama el *anillo de cobordismos* (topológicos no orientados).

**Definición.** Sea $J$ un conjunto de índices, y sea $(X_j)_{j \in J}$ una familia de conjuntos indexados por $J$. La *unión disjunta* $\amalg_{j \in J} X_j$ es el conjunto formado por todos los elementos de $X_j$ para todo $j \in J$, que viene con inclusiones naturales $h_i : X_i \to \amalg_{j \in J} X_j$.

Dada una familia $(X_j)_{j \in J}$ de espacios topológicos indexados por $J$, *unión disjunta* $\amalg_{j \in J} X_j$ es el conjunto $\amalg_{j \in J} X_j$ dotado de la topología final con respecto a la familia de inclusiones $h_i$. Es decir, $U \subset \amalg_{j \in J} X_j$ es abierto si y sólo si $h_i^{-1}(U)$ es abierto en $X_i$ para todo $i \in J$.

23. Probar que para $|J| = 2$, esta definición coincide con la dada en la Hoja 1.

24. Sea $X$ un espacio topológico y sea $J$ un espacio discreto. Probar que $J \times X$ es homeomorfo a $\amalg_J X$, la unión disjunta de tantas copias de $X$ como elementos en $J$.

(*Pista:* Utilizar la propiedad universal de la unión disjunta para producir una aplicación continua)