

Problemas - Conexión

Última vez actualizado: 12 de octubre de 2026

El símbolo $\triangle$ denota ejercicios difíciles, y van acompañados de una indicación para hacerlos.

1. Probar que un espacio topológico X es conexo sí y sólo si toda aplicación continua $X \rightarrow \{0, 1\}$ es constante.
2. Probar que un espacio topológico es conexo sí y sólo los únicos subconjuntos con frontera vacía son el vacío y el total.
3. Probar, usando argumentos topológicos, el *Teorema de Bolzano* del cálculo: si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua tal que $f(a) \cdot f(b) < 0$, entonces existe un $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.
4. Más generalmente, probar el siguiente *Teorema del valor intermedio*: si X es un espacio conexo, $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua, $x, y \in X$ con $f(x) < f(y)$ y $c \in (f(x), f(y))$, existe un punto $z \in X$ tal que $f(z) = c$.
5. Probar que ninguno de los espacios $(0, 1)$, $(0, 1]$ y $[0, 1]$ es homeomorfo a otro de ellos.
6. Sea $A \subset X$ un subespacio conexo. ¿Es su interior $\overset{\circ}{A}$ conexo? ¿Es su frontera ∂A conexa? Si $\overset{\circ}{A}$ y ∂A son conexos, ¿es A conexo?
7. ¿Son homeomorfos una recta y el espacio que se obtiene de considerar una circunferencia y la recta tangente a ella en un punto dado?
8. Clasificar las letras del abecedario (como se muestran a continuación) según su clase de homeomorfía, es decir, decidir qué letras son homeomorfas entre sí:

A B C D E F G H I J K L M N Ñ O P Q R S T U V W X Y Z

9. Probar que todo subespacio conexo está contenido en una única componente conexa.
10. Probar que toda componente conexa de un espacio topológico es un cerrado.
11. Probar que si un espacio topológico tiene un número finito de componentes conexas, entonces toda componente conexa es también un abierto.

Definición. Un espacio topológico X se dice *totalmente disconexo* si los únicos subespacios conexos no vacíos son los puntos.

12. Probar que todo espacio topológico totalmente disconexo es T_1 .
13. Probar que todo subespacio de un espacio topológico totalmente disconexo es totalmente disconexo.
14. Probar que si un espacio Hausdorff cumple que todo abierto tiene clausura abierta, entonces es totalmente disconexo.

15. Sea X un espacio topológico, y definamos la siguiente relación: $x \sim y$ sí y sólo si hay un conexo que los contiene.

- a) Probar que la relación anterior es de equivalencia.
- b) Probar que hay una biyección

$$X/\sim \rightarrow \text{Comp}(X)$$

que manda $[x]$ a la única componente conexa que contiene a x .

16. Sea X un espacio topológico, y definamos la siguiente relación: $x \sim y$ sí y sólo si hay un arco que une x e y .

- a) Probar que la relación anterior es de equivalencia.
- b) Probar que hay una biyección

$$X/\sim \rightarrow \pi_0(X)$$

que manda $[x]$ a la única componente arco-conexa que contiene a x .

17. Sea $X' = ([0, 1] \times 0) \cup (\{1/n : n \in \mathbb{N}\} \times [0, 1])$. El propósito de este ejercicio es probar que el *peine del topólogo* $X := X' \cup \{(0, 1)\}$ no es arco-conexo. La idea es que todo camino que empieza en el punto $(0, 1)$ debe ser constante. Sea $\sigma : I \rightarrow X$ un arco de extremo inicial $\sigma(0) = (0, 1)$.

- a) Probar que $Y := \{1/n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ es totalmente desconexo.
- b) Sea $A := \{t \in I : \sigma(t) = (0, 1)\} \subset I$. Probar que A es cerrado.

El resto del ejercicio trata de probar que A es también abierto, de modo que $A = I$ por ser I conexo y A no vacío. En concreto, trataremos de probar que $\overset{\circ}{A} = A$. Es decir, si $t_0 \in A$, se trata de probar que existe un $\delta > 0$ tal que $J := (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \cap I \subset A$.

- c) Probar que existe un $\delta > 0$ tal que $\sigma(t) \notin [0, 1] \times 0 \subset X$ cuando $t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$.
- d) Probar que la composición f

$$(t_0 - \delta, t_0 + \delta) \hookrightarrow I \xrightarrow{\sigma} X \hookrightarrow \mathbb{R}^2 \xrightarrow{pr_1} \mathbb{R}$$

es continua y tiene imagen contenida en Y .

- e) Probar que $f(J)$ consiste en un único punto.
- f) Concluir que $J \subset A$.

18. Sea P una propiedad topológica, sea X un espacio topológico y sea $U \subseteq X$ un abierto. Probar que si X es localmente P , también lo es U .

19. Probar que cualquier abierto conexo de un espacio localmente arco-conexo es arco-conexo.

20. Decidir si los siguientes espacios topológicos son o no conexos, arco-conexos, localmente conexos o localmente arco-conexos.

- a) $(\mathbb{R}, \tau_{\text{grosera}})$.
- b) $(\mathbb{R}, \tau_{\text{discreta}})$.
- c) $(\mathbb{R}, \tau_{\text{cofinita}})$.
- d) $(\mathbb{R}, \tau = \{A \subset \mathbb{R} : 33 \notin A\} \cup \{\mathbb{R}\})$.
- e) $(\mathbb{R}, \tau = \{A \subseteq \mathbb{R} : 33 \in A\} \cup \{\emptyset\})$.
- f) $(\mathbb{R}, \tau = \{A \subseteq \mathbb{R} : x \in A \Rightarrow -x \in A\})$.