

Problemas - Compacidad

Última vez actualizado: 12 de septiembre de 2026

El símbolo $\triangle$ denota ejercicios difíciles, y van acompañados de una indicación para hacerlos.

1. Sea Y un subespacio de un espacio topológico X . Demostrar que Y es compacto si y sólo si todo recubrimiento de Y por abiertos de X contiene una subcolección finita cubriendo a Y .
2. Sea X un conjunto y τ_1 y τ_2 dos topologías en X con $\tau_1 \subset \tau_2$. Probar que si (X, τ_2) es compacto, entonces (X, τ_1) es compacto.
3. Decir razonadamente si son o no compactos los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}$ o de $\mathbb{R}^2$:

a) $[0, 1]$	h) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$
b) $[0, +\infty)$	i) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 1\}$
c) $\mathbb{I}$	j) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$
d) $\mathbb{Q} \cup [0, 1]$	k) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 1, 0 \leq y \leq 1/x\}$
e) $[-3, 2] \cup [4, 5]$	l) $\{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\} \cup \{(1/n, 1/n) \mid n \in \mathbb{N}\}$
f) $[0, 1] \cup \{2 + \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$	m) $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{\frac{1}{n}\} \times [0, 1]$
g) $[0, 1] \cup \{2 + \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{2\}$	
4. Decidir si los siguientes espacios topológicos son o no compactos:
 - a) $(\mathbb{R}, \tau_{\text{grosera}})$.
 - b) $(\mathbb{R}, \tau_{\text{discreta}})$.
 - c) $(\mathbb{R}, \tau_{\text{cofinita}})$.
 - d) $(\mathbb{R}, \tau = \{A \subset \mathbb{R} : 33 \notin A\} \cup \{\mathbb{R}\})$.
 - e) $(\mathbb{R}, \tau = \{A \subseteq \mathbb{R} : 33 \in A\} \cup \{\emptyset\})$.
 - f) $(\mathbb{R}, \tau = \{A \subseteq \mathbb{R} : x \in A \Rightarrow -x \in A\})$.
5. Si X es un espacio topológico y $(x_n)_{n \geq 1}$ es una sucesión en X convergente a $x_0 \in X$, probar que el conjunto $A := \{x_n : n \geq 1\} \cup \{x_0\}$ es compacto.
6. Probar que la unión de una colección finita de subconjuntos compactos de un espacio X , es un compacto; pero que la unión arbitraria no es necesariamente compacto.
7. Probar que la intersección de una colección de subconjuntos compactos de un espacio Hausdorff X es compacta.
8. El propósito de este problema es comprobar que si el espacio X no es Hausdorff, la intersección de dos subconjuntos compactos no es necesariamente compacta.
Sea $X := \{-1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ con la topología generada por los subconjuntos $\{n\}$ para $n \geq 1$, $\{-1, 1, 2, 3, \dots\}$ y $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$.

- a) Describir explícitamente esta topología.
 - b) Probar que X no es Hausdorff.
 - c) Encontrar dos compactos cuya intersección no sea compacta.
9. Probar que todo subconjunto infinito de un espacio topológico compacto tiene algún punto de acumulación.

Definición. Sea X un conjunto. Se dice que una familia de subconjuntos $\mathcal{E} = (A_i)_{i \in I}$ tiene la *propiedad de la intersección finita* (P.I.F.) si cualquier subfamilia finita tiene intersección no vacía.

10. Demostrar que un espacio X es compacto si y sólo si toda familia $\mathcal{E}$ de cerrados de X con la P.I.F. tiene intersección no vacía.
- (Pista: Notar primero que una colección de subconjuntos (B_i) recubre X si y solo si la intersección de sus complementarios es vacía).

Definición. Sea X un espacio topológico.

(a) Se dice que X es *Lindelöf* si de cualquier recubrimiento por abiertos de X se puede extraer un subrecubrimiento numerable.

(b) Se dice que X es *numerablemente compacto* si de cualquier recubrimiento por abiertos de X numerable se puede extraer un subrecubrimiento finito.

11. (i) Probar que ser Lindelöf y ser numerablemente compacto son propiedades topológicas.
(ii) Probar que un subespacio cerrado de un Lindelöf es Lindelöf.
12. Probar que un espacio topológico es compacto si y sólo si es numerablemente compacto y Lindelöf.
13. Probar que todo espacio segundo contable es Lindelöf.

Definición. Un espacio topológico X se dice T_3 si X es T_1 (= los puntos son cerrados) y se cumple que para cualquier cerrado F y cualquier punto $x \notin F$, existen entornos disjuntos de F y x .

Un espacio topológico X se dice T_4 si X es T_1 (= los puntos son cerrados) y se cumple que para cualquier par de cerrados disjuntos F_1 y F_2 , existen entornos disjuntos de F_1 y F_2 .

14.  Probar que todo espacio Lindelöf y T_3 es T_4 .

(Indicación: Dados cerrados disjuntos F_1 y F_2 , basta con encontrar recubrimientos por abiertos $F_1 \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$ y $F_2 \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} V_i$ tal que $\overline{U_i} \cap F_1 = \emptyset$ y $\overline{V_i} \cap F_2 = \emptyset$ para todo i . Una vez tengamos eso, se concluye definiendo inductivamente los abiertos $S_1 := U_1$, $T_1 := V_1 - \overline{S_1}$, $S_2 := U_2 - \overline{T_1}$, $T_2 := V_2 - \overline{(S_1 \cup S_2)}$, $S_3 := U_3 - \overline{(T_1 \cup T_2)}$, $T_3 := V_3 - \overline{(S_1 \cup S_2 \cup S_3)}$, etc., y $S = \bigcup_{i=1}^{\infty} S_i$ y $T = \bigcup_{i=1}^{\infty} T_i$ son los entornos de F_1 y F_2 buscados.)

15. Probar que todo espacio compacto y Hausdorff (= T_2) es T_4 .

(Pista: Usar el ejercicio anterior.)

Definición. Un *revestimiento* es una aplicación continua $\pi : X \rightarrow S$ entre espacios topológicos con la propiedad de que todo punto de S tiene un entorno abierto U tal que $\pi^{-1}(U)$ es unión disjunta de abiertos homeomorfos a U , es decir,

$$\pi^{-1}(U) = \sqcup_i U_i \quad , \quad \pi|_{U_i} : U_i \xrightarrow{\cong} U.$$

Se dice que U es un abierto *trivializante*, y cada uno de los U_i se llama *hoja*.

16. Probar que $\mathbb{R} \rightarrow S^1 \subset \mathbb{C}$, $t \mapsto e^{it}$ es un revestimiento.
17.  Sea $\pi : X \rightarrow S$ un revestimiento, sea $x_0 \in X$ y sea $s_0 := \pi(x_0)$. Dada una aplicación continua $\sigma : [0, 1] \rightarrow S$ tal que $\sigma(0) = s_0$, probar que existe una aplicación continua $\tilde{\sigma} : [0, 1] \rightarrow X$ tal que $\tilde{\sigma}(0) = x_0$ y $\pi \circ \tilde{\sigma} = \sigma$. Se dice que σ es un *arco* en X y $\tilde{\sigma}$ un *levantamiento* de σ .
- (Indicación: Elegir un recubrimiento (U_i) de S por abiertos trivializantes y usar el lema de Lebesgue del recubrimiento sobre el recubrimiento $(\sigma^{-1}(U_i))$ del compacto $[0, 1]$. Después definir $\tilde{\sigma}$ a trozos.)
18. El objetivo de este problema es probar el conocido como *teorema del punto fijo de Edelstein*.
- a) Probar que en todo espacio métrico (X, d) se tiene la desigualdad triangular inversa: para todo $x_1, x_2, y_1, y_2 \in X$,
- $$|d(x_1, y_1) - d(x_2, y_2)| \leq d(x_1, x_2) + d(y_1, y_2).$$
- b) Probar que si (X, d) es un espacio métrico, el espacio topológico producto es metrizable con $d_\infty((x_1, y_1), (x_2, y_2)) := \max(d(x_1, x_2), d(y_1, y_2))$.
- c) Probar que si (X, d) es un espacio métrico, la aplicación distancia $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ es continua.
- d) Probar que todo subconjunto compacto en $\mathbb{R}$ tiene un máximo y un mínimo, es decir, que su supremo y su ínfimo pertenecen al subconjunto.
- e) Probar que si X es un espacio topológico compacto, toda aplicación continua $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ alcanza un valor máximo y mínimo.
- f) Probar el *teorema del punto fijo de Edelstein*: si X es un espacio métrico compacto, y $f : X \rightarrow X$ es una aplicación continua tal que $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$ para todo $x, y \in X$, $x \neq y$, entonces f tiene un único punto fijo.
- (Pista: Definir $g(x) := d(x, f(x))$ y usar c) y e)).