Control parcial - Soluciones

30 de octubre de 2026

(2 puntos) 1. Decidir si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa, justificando la respuesta:

a) El subespacio $\{1/n : n \geq 1\} \subset (\mathbb{R}, \tau = \{U \subset \mathbb{R} : 1 \notin U\} \cup \{\mathbb{R}\})$ es compacto.
Solución: Verdadero. Como $\mathbb{R}$ es el único abierto que contiene a $1 \in A = \{1/n : n \geq 1\}$, todo recubrimiento por abiertos de A debe contener a $\mathbb{R}$, y por tanto A siempre admite un subrecubrimiento finito (con tan sólo con un abierto, $\mathbb{R}$).

b) Un subconjunto de $\mathbb{R}$ con la topología discreta es compacto si y sólo si es cerrado y acotado con la distancia discreta $d(x, x) = 0$ y $d(x, y) = 1$ si $x \neq y$.
Solución: Falso. En $\mathbb{R}$ con la topología discreta, todo subconjunto es tanto cerrado como acotado; pero sólo los conjuntos finitos son compactos, como vimos en clase.

c) $\mathbb{I}^5 \subset \mathbb{R}^5$ es conexo ($\mathbb{I} \subset \mathbb{R}$ denota el conjunto de números irracionales).
Solución: Falso. El producto cartesiano de espacios topológicos es conexo si y sólo si cada uno de los factores lo es. Así que $\mathbb{I}^5$ es conexo sí y sólo si $\mathbb{I}$ es conexo. Esto es falso ya que en $\mathbb{R}$, los conexos son los intervalos, e $\mathbb{I}$ no lo es (entre dos reales diferentes existen infinitos raciones, ya que $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$).

d) Si $f : X \to Y$ es una aplicación continua que induce una biyección

$$f_* : \pi_0(X) \xrightarrow{\cong} \pi_0(Y),$$

entonces f es un homeomorfismo.
Solución: Falso. La aplicación constante $f : \mathbb{R} \to *$ al punto induce una biyección

$$f_* : \pi_0(\mathbb{R}) = \{\mathbb{R}\} \xrightarrow{\cong} \{*\} = \pi_0(*)$$

(es una aplicación de conjuntos entre dos conjuntos con un elemento cada uno) pero $\mathbb{R}$ y el punto no pueden ser homeomorfos porque ni siquiera puede existir una biyección por cardinalidad!

(2 puntos) 2. Sea

$$X = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{(0,0)(1,1/n)} \right) \cup \overline{(0,0)(1/2,0)} \subset (\mathbb{R}^2, \tau_{\text{usual}})$$

donde dados $x, y \in \mathbb{R}^2$, hemos escrito $\overline{xy}$ para el segmento que une x e y. Argumentar si X es o no

(a) Hausdorff.
Solución: Sí. Ser Hausdorff es una propiedad hereditaria, y $(\mathbb{R}^2, \tau_{\text{usual}})$ lo es.

(b) Compacto.
Solución: No. Por el teorema de Heine-Borel, en $(\mathbb{R}^2, \tau_{\text{usual}})$ equivale a ser cerrado y acotado, pero

$$\overline{X} = X \cup \overline{(1/2,0)(1,0)} \neq X,$$

por lo que X no es cerrado, así que no puede ser compacto.

(c) Localmente compacto.

Solución: No. Como X es Hausdorff, ser localmente compacto equivale a encontrar un entorno compacto para cada punto. Pero el punto $(1/2, 0)$ no tiene ningún entorno compacto. Si tuviera un entorno compacto $K \subset X$, entonces contendría la intersección $X \cap B[(1/2, 0), \varepsilon]$ de X con una bola cerrada. Como $X \cap B[(1/2, 0), \varepsilon]$ es un cerrado de X en un compacto K, sería también compacto. Pero esto no puede ser: la intersección de cada uno de los segmentos $\overline{(0,0)(1,1/n)}$ con $B[(1/2, 0), \varepsilon]$ es abierto en $X \cap B[(1/2, 0), \varepsilon]$. Tomando la intersección de $X \cap B[(1/2, 0), \varepsilon]$ con un pequeño entorno de $\overline{(0,0)(1/2,0)}$, tendríamos un recubrimiento por abiertos de $X \cap B[(1/2, 0), \varepsilon]$ del cual no podríamos extraer uno finito.

(d) Metrizable.

Solución: Sí. Ser metrizable es una propiedad hereditaria, y $(\mathbb{R}^2, \tau_{\text{usual}})$ lo es.

(e) Conexo.

Solución: Sí. X es arco-conexo (ver (g)).

(f) Localmente conexo.

Solución: No. La intersección de X con una bola de centro $(1/2, 0)$ y radio $\varepsilon < 1/2$ no es conexa: dicha intersección tiene infinitas componentes conexas, cada una homeomorfa a un intervalo.

(g) Arco-conexo.

Solución: Sí. X es unión de subconjuntos arco-conexos (segmentos) con intersección no vacía (el punto $(0, 0)$), luego es arco-conexo.

(h) Localmente arco-conexo.

Solución: No, porque no es localmente conexo.

y además

(i) Calcular $\text{Comp}(X)$ y $\pi_0(X)$.

Solución: Como X es conexo, $\text{Comp}(X) = \{X\}$ (un conjunto de un elemento); y como X es arco-conexo, $\pi_0(X) = \{X\}$ también

(j) Describir la aplicación canónica $\pi_0(X) \to \text{Comp}(X)$.

Solución: Existe una única aplicación de conjuntos entre dos conjuntos con un elemento cada uno, así que debe ser esa (manda X a X en este caso).

(2 puntos) 3. Repetir el ejercicio anterior para el espacio topológico

$$X = (\mathbb{R}, \tau_{\text{conumerable}} = \{U \subset \mathbb{R} : \mathbb{R} - U \text{ es numerable}\} \cup \{\emptyset\}).$$

(a) Hausdorff.

Solución: No. Los abiertos de X son subconjuntos de la forma $U = \mathbb{R} - A$ con A numerable. Ningún par de dichos subconjuntos puede ser disjunto, porque si $U = \mathbb{R} - A$ y $V = \mathbb{R} - B$ con A, B numerables, $U \cap V = \mathbb{R} - (A \cup B)$; como $A \cup B$ es también numerable, $U \cap V$ jamás puede ser vacío.

(b) Compacto.

Solución: No. Para cada $n \geq 1$, $U_n = \mathbb{R} - \{n, n+1, n+2, \ldots\}$ es un abierto y $X = \bigcup_n U_n$ es un recubrimiento por abiertos, del cual no puede extraerse uno finito. En efecto $U_{i_1} \cup \cdots \cup U_{i_p} = U_N$ para $N = max(i_j)$.

(c) Localmente compacto.

Solución: No. Aquí la pregunta a contestar es: ¿qué subconjuntos son compactos? Si $A \subset X$ es infinito, el mismo argumento que en (b) muestra que A no es compacto - ahora con una colección $a_1, a_2, \ldots \in A$. Por otra parte, si A es finito es compacto (esto es cierto para cualquier espacio topológico). En resumen: $A \subset X$ es compacto si y sólo si A es finito.

¿Puede un entorno de un punto ser compacto? Si es entorno, debe contener a un abierto, es decir un conjunto no numerable. Pero hemos dicho que compacto = finito, así que no puede ser.

(d) Metrizable.

Solución: No. Como no es Hausdorff, no puede ser metrizable.

(e) Conexo.

Solución: Sí. Hemos dicho en (a) que no existe un par de abiertos disjuntos no vacíos, así que X debe ser conexo.

(f) Localmente conexo.

Solución: Si. De nuevo la pregunta a contestar es: ¿qué subconjuntos son conexos? Si A es no numerable, exactamente el mismo argumento que en (e) muestra que A es conexo. Por otra parte, si A es numerable y tiene más de un elemento, entonces no puede ser conexo, porque si $x \in A$ entonces

$$A = (A \cap (\mathbb{R} - x)) \dot{\cup} (A \cap ((\mathbb{R} - A) \cup x))$$

y A puede escribirse como la unión de dos abiertos disjuntos no vacíos. En resumen: $A \subset X$ es conexo si y sólo si A es no numerable o A es un punto.

Como cualquier abierto es no numerable, todo abierto es conexo, luego X sí es localmente conexo (cualquier entorno abierto de un punto es conexo).

(g) Arco-conexo.

Solución: No. Aquí la pregunta es: ¿cuáles son las aplicaciones continuas $\sigma : I \to X$? Como I es compacto, $\sigma(I)$ es compacto, y por lo dicho en (c), $\sigma(I)$ debe ser finito. Pero por otra parte $\sigma(I)$ debe ser conexo al ser I conexo, así que por lo dicho en (f) tiene que ser un punto! Es decir, que no hay más aplicaciones continuas $\sigma : I \to X$ que las constantes.

Así que X no puede ser arco-conexo.

(h) Localmente arco-conexo.

Solución: No, por la misma razón que en (g), ya que un entorno de un punto debe ser no numerable

y además

(i) Calcular $\mathrm{Comp}(X)$ y $\pi_0(X)$.

Solución: Como X es conexo, $\mathrm{Comp}(X) = \{X\}$, y como por lo dicho en (g) los únicos subconjuntos arco-conexos son los puntos, $\pi_0(X) = \{\{x\} : x \in X\}$

(j) Describir la aplicación canónica $\pi_0(X) \to \mathrm{Comp}(X)$.

Solución: Hay única única aplicación de conjuntos de cualquier conjunto a un conjunto con un solo elemento, luego debe ser esa. En este caso manda $\{x\}$ a X para cualquier $x \in X$.

(2 puntos) 4. Probar que toda aplicación continua $f : X \to Y$ de un espacio compacto X a un espacio Hausdorff Y es propia.

Solución: Una aplicación es propia si la preimagen de compactos es compacta. Si $K \subset Y$ es un compacto, K es cerrado porque Y es Hausdorff. Por tanto $f^{-1}(K)$ es también cerrado al ser f continua. Así que $f^{-1}(K)$ es un cerrado en X compacto, de modo que $f^{-1}(K)$ es compacto, como se quería probar.

(2 puntos) 5. Sea

$$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0 \text{ ó } y = 0\} \subset (\mathbb{R}^2, \tau_{\text{usual}})$$

Probar que toda aplicación continua y epiyectiva $f : \mathbb{R} \to X$ cumple que $f^{-1}\{(0, 0)\}$ consiste al menos de tres puntos.

Solución: Aquí la clave es notar que si $f : X \to Y$ es una aplicación continua y epiyectiva entre espacios topológicos, entonces la aplicación inducida

$$f_* : \mathrm{Comp}(X) \to \mathrm{Comp}(Y)$$

también debe ser epiyectiva. En efecto si $C \in \mathrm{Comp}(Y)$, dado $y = f(x) \in C$ para algún $x \in X$, se tiene que $f_*(D) = C$ para $D \in \mathrm{Comp}(X)$ la única componente conexa que contiene a $\{x\}$. Esto es debido a que $f(D)$ es un conexo y contiene a $y = f(x)$ (hemos usado este argumento en clase y en los ejercicios varias veces).

Consideremos ahora la aplicación $f : \mathbb{R} \to X$ del ejercicio. La restricción

$$f_{res} : \mathbb{R} - f^{-1}\{(0,0)\} \to X$$

de f a $\mathbb{R} - f^{-1}\{(0,0)\}$ es continua ya que es la composición con la inclusión $\mathbb{R} - f^{-1}\{(0,0)\} \hookrightarrow \mathbb{R}$. Por tanto también es continua f_{res} cuando se restringe a su imagen,

$$f_{res} : \mathbb{R} - f^{-1}\{(0,0)\} \to X - \{(0,0)\};$$

y además ahora vuelve a ser epiyectiva ya que la f original lo es. Por lo dicho al principio, la aplicación inducida

$$(f_{res})_* : \mathrm{Comp}(\mathbb{R} - f^{-1}\{(0,0)\}) \to \mathrm{Comp}(X - \{(0,0)\})$$

es epiyectiva. El conjunto $\mathrm{Comp}(X - \{(0,0)\})$ consiste de cuatro elementos - uno para cada uno de los semiejes - de modo que $\mathrm{Comp}(\mathbb{R} - f^{-1}\{(0,0)\})$ debe consistir al menos de 4 elementos para tener una epiyección. Esto únicamente es posible si $f^{-1}\{(0,0)\}$ consiste al menos de 3 elementos (si $f^{-1}\{(0,0)\}$ tuviera uno o dos elementos, $\mathbb{R} - f^{-1}\{(0,0)\}$ tendría dos o tres componentes conexas, respectivamente).